应　用　图　论

图和电网络

[美] 陈惠开　著
范定松　张玲玲　译
沙玉钧　审校

人民邮电出版社

内 容 简 介

本书是根据美国伊利诺大学陈惠开(WAI-KAI CHEN)教授所著的《应用图论》(APPLIED GRAPH THEORY)一书译出的。

全书共分七章，主要内容包括：基本理论；电网络理论基础；线性代数方程组的有向图解法；线性系统的拓扑分析法；树和树的生成；具有规定度数的有向图的实现以及网络的状态方程等。书中附有大量的例题，每章末均精选了许多习题，便于读者学习使用。

本书内容丰富，既有图论及其应用方面的入门内容，又有供读者进一步深造的专门课题。立论严谨，叙述清楚，既通俗易懂又不失数学的严密性。

本书可作为我国高等院校为研究生和高年级本科生开设网络图论、线性系统和电路课程的教材，也可供有关专业的工程技术人员、科研人员参考。

应用图论

图和电网络

〔美〕陈惠开 著

范定松 张玲玲 译

沙玉钧 审校

*

人民邮电出版社出版发行

北京东长安街27号

北京朝阳展望印刷厂印刷

新华书店总店科技发行所经销

开本：850×1168 1/32　1990年12月 第 一 版

印张：19 20/32 页数：314　1990年12月北京第1次印刷

字数：521 千字　印数：1—2 000 册

ISBN 7-115-04265-9/G·040

定 价：9.40 元

中译本前言

本书旨在为理工科学生介绍图论及其应用于电网络方面的基本知识。着重强调基本概念，对其中某些与工程应用密切相关的内容作了一定深度的论述，力求使本书既能反映出该学科的本质又有其特色。编写本书的指导思想是强调图论的精髓，分析讨论一些基础性的课题，以致可以引出新的设计和计算方法。因此，本书虽然是1976年出版的，但仍反映了当前的科研成果。

图论与许多数学分支密切相关，包括群论、矩阵论、数值分析、概率论、拓扑学、点阵论和组合论等。由于它所具有的用图表示的直观性，使它在物理学、工程学、社会科学和经济问题等方面的模拟系统中都显得非常有用。事实上，任何一个包括二元关系的系统都可以用图来表示。

很多使用过本书较早版本的教师及学生都对本书提出过许多宝贵的意见和建议，这对我的帮助是很大的，谨对他们表示诚挚的感谢。特别要感谢南京工学院吴叔美教授的推荐及人民邮电出版社的大力支持，使本书得以进入使用汉语的电工学界。最后，如没有范定松先生、张玲玲女士和沙玉钧教授的努力，本书是不可能出版的。他们工作得很完善，我非常清楚地了解这一工作的艰巨性，为此，谨对他们的宝贵贡献致以衷心的感谢。

陈惠开

1988年于伊利诺州奈培威尔

译 者 的 话

《应用图论》是美国伊利诺大学陈惠开教授最重要的著作之一。该书内容丰富，既有图论及其应用方面的入门内容，又有供读者进一步深入钻研的专门课题。立论严谨，叙述清楚，既通俗易读又不失数学的严密性。本书是作者多年从事图论研究和教学的结晶，也是近代网络图论及其应用方面的经典权威著作之一。全书还配有大量例题和精选的习题，可作为我国各高等学校为研究生或高年级本科生开设网络图论、线性系统和电路课的教材及参考书。

本书第一章、第二章和第七章由张玲玲译；前言、第三章、第四章、第五章和第六章由范定松译。全书由沙玉钧教授审校。在翻译过程中得到吴叔美副教授的鼓励和大力支持，在此表示感谢。

由于译者水平有限，难免有缺点和错误，切望广大读者给予批评指正。

译者

1987 年 5 月于南京工学院

前　言

在过去四十年中，我们一直致力于图论及其应用的研究，近些年来，图论及其应用已进入一个充满活力的新时期。仅在一年半的时间内，就发表了500多篇关于图论及其应用方面的论文，这从一个侧面表明了其飞速的发展。由于用图表示的直观性，图论在物理学、工程技术、社会科学以及经济问题中所产生的模拟系统中是极其有用的。事实上任何包含二元关系的系统都可以用图来表示。

本书力图使介绍的内容简单些，因此，避免了所有不必要的定义，宁可文字叙述略为长一点。例如，边不相接回路的并可以定义为圈，但没有这样做，因为列为定义的名词已经太多了。由于图论中目前使用的术语和符号远未统一，这里是根据它们在本书中涉及的五个主要领域内的应用来选用的。例如，用节点代替顶点或点，用回路代替圈，用并联边代替多边，等等，从而使本书具有一种特色即很多使用的术语几乎与日常英语有相同的意思，非常容易记忆。

贯穿本书的指导思想是数学上的严谨，因此，所有结论都严格证明，很多证明都是新颖的。本书在编号中试图以完整和合乎逻辑的方式安排主要课题，表明历史背景，并就本人所知道的前人贡献，给予应有的评价。还尝试以简洁的方式介绍内容，用论述和例题来说明所涉及的概念和原理。本书也包含一些在文献中未有的作者个人的贡献。

第二章到第五章，每一章的内容虽然不完全是独立的，但实际上都各自与第一章相连接而自成系统。这样使只对书中个别课题感兴趣的人们也能有用。

第一章建立了描述图的基本词汇，提供了一些在后续分析中需要用到的结论。为了减少这些预备知识的单调乏味，只介绍一些最

基本的术语，其它一些术语在后面章节需要时再给出定义。因此，要求读者在进入学习其它章节之前仔细学习这一章的内容。

第二、三和四章约占全书篇幅的三分之二，讨论了对电网络理论的各种应用，这正好是作者感兴趣的主要领域。事实上，图论在物理学中最重要的应用，是用于电网络问题的拓扑公式的表示和求解。虽然所讨论的方法可以很容易推广到其它学科，但主要课题无疑是电网络理论。在这些章节的每一部分，都假定读者已熟悉所论证主题的基本概念，而把讨论集中于与图论有较强联系的那些理论方面。

本书的一个特点是，几乎所有的结论都散见于已发表的文献，书中引用的所有参考资料都列在参考文献目录中，因此，本书特别适合于希望继续进行专题研究和将图论应用到其它领域中去的读者。

虽然基本上打算把本书作为科研人员的参考书，但本书同样也可作为研究生的网络拓扑和线性系统及电路课程的教材。后面某几章适合于作为本科高年级研究讨论的课题。阅读这本书唯一的必备条件是扎实的数学知识。

在每章末，提供了大量习题。

本书中大量内容是在过去六年中由国家科学基金会，国家宇航局和俄亥俄州立大学研究会提供给作者研究经费研究得出的。在这期间我有机会访问普渡大学，受到了友好的招待。对此，我特别感谢 L.O.Chua 教授和 B.J Leon 教授使这次访问成功。没有俄亥俄州立大学的院长 R.L Savage，系主任 B. Davison 和 J.C.Gilfert 博士的鼓励和帮助，是不可能写出这本书的。对伊利诺斯州立大学的 W.Mayeda 教授和普林斯顿大学的 M.E Van Valkenburg 教授的大力支持表示感谢。许多朋友和同事都提出了非常有益的意见，在此一并表示感谢，他们是 K.E Eldridge 教授，G.V.S.Raju 教授，H.C.Chen 教授，F.Y.Chen 教授以及我的学生 S.K Mark 博士和 H.C.Li 硕士。H.C.li 硕士帮助绘制插图的草图。特别要提出的是

K.E.Eldrige 教授和 S.K.Mark 博士，他们认真地校对原稿，提供了有益的意见。普渡大学的 P.M.Lin 教授仔细阅读了全书，给予了相当大的帮助。我也同时希望对 C.Korswage 博士和 North-Hollaand 出版公司，在出版本书的各项细节中，细致耐心和真诚合作表示感谢。最后，我想感谢我的妻子 Shiao-Ling，由于她仔细校对书稿，对我这一工作的无限耐心和理解，谨以本书奉献给她。

W.K.C.

1971 年 4 月

再版前言

自第一版发行后的过去四年中，我们已亲眼看到图论及其应用方面已有三十多本新书出版(参见参考文献目录)，预示未来某一时期它会继续得到飞速发展，这种加速发展的步调，证实了在第一版中所采用的一般方法、即在与工程应用紧密联系的较小范围内给予较深入的考虑，是有价值的。

在修订第一版的过程中，我想要补充的内容很多，根据读者的兴趣来推测，我决定集中在近年内受到广泛注意以及很大程度上依赖于图论的线性系统和网络分析方面，即网络的状态方程分析，作为第七章的主要内容来介绍这个论题。为了保持本书的合理篇幅，没有讨论状态方程的解法，因为它们可在关于常微分方程的很多优秀书籍中找到。

本版对原编写的整个内容也作了不少重要的修正，此外，还修改参考文献目录使之适合新的要求，包括详列了参考书目。

由于增添了主要内容，一个不可避免的结果是增加了本书的篇幅，这对于一学期每周三小时的线性系统与网络课程，材料足够有余，允许教师机动灵活地选取有关内容，以适应其特殊需要和客观条件。

自第一版公开发行以来，许多人经常花费相当大的时间和精力，相当友好地给了我有益的评价和意见，为此，新版的书名更加准确地反映了其内容。尤其是我感谢我的学生和促进本版改进的使用者，特别感谢我的博士生 S.Chardra， 他对全书进行了仔细的校对。同时，我感谢 North-Holland 出版公司的E.Fredriksson博士，

他以相当低廉的价格出版了适合学生的版本。最后，我对我的家属，在编写本书期间表示的耐心和理解表示感谢。

W.K.Chen

1975 年

目　录

第一章　基本理论

本章介绍描绘图的基本词汇，并提供后面分析时所需要的一些基本结论，但略去了图论中那些与本书的应用无关的内容。由于当前图论中所用的术语和符号表示还很不标准化，要求读者在学习其它章节以前必须仔细研究本章的内容。

§1. 引　言

本书叙事中所用的术语“图”与人们所熟悉的解析几何或函数理论中的那些图完全不同。我们即将讨论的图仅是由点(节点)或连接其中某些节点的线(边)所组成的简单的几何图形，它们有时被称为“线图”。这种图解形式的表示法对物理学(BUSACKER 和 SAATY [1965]以及 HARARY[1967]、工程学(SESHU 和 REED[1961]以及 ROBICHAUD 等人[1962])、社会学 (HARARY 和 NORMAN [1953]以及 FLAMENT[1963])和经济问题(AVONDO BODINO [1962] 以及 FORD 和 FULRERSON[1962]) 中系统的模拟特别有用。实际上包含有二元关系的任何一个系统都能用图来表示。

图论方面的第一篇文章是著名的瑞士数学家 Leonhard Euler (1707—1783)发表的。他从一个当时尚未解决的众所周知的问题开始，此问题名叫哥尼斯堡桥问题．东普鲁士的哥尼斯堡（现名叫加里宁格勒）座落在布列卡尔河岸和两座岛屿上。它的各个部份由七座桥连通，如图 1.1 所示。问题是能否走遍七座桥、但每一座桥都要经过一次且只能经过一次。看起来有很多无需“解”它就可以去尝试的办法。1736 年 EULER 解决了这一问题，证明这是不可能的，奠定了图论的基础。我们在这里仅仅提一下解这一问题的思路，不

谈细节。

用点代表这个城市的每一部分，并用连接这些点的线代表每座桥，结果得到如图1.2所示的图。Euler指出，无论从哪一点开始，要一笔画完整个图并回到开始点而不许重复，画不出任何一条这样的线。

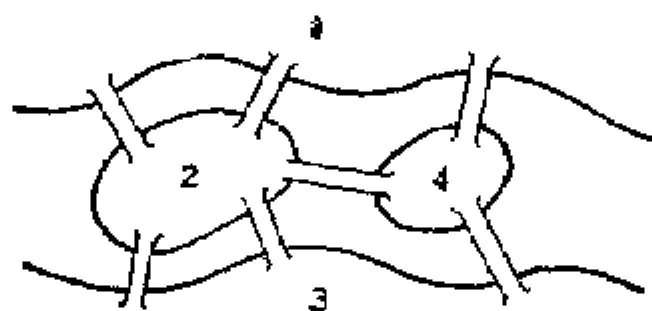


图 1.1　哥尼斯堡桥问题

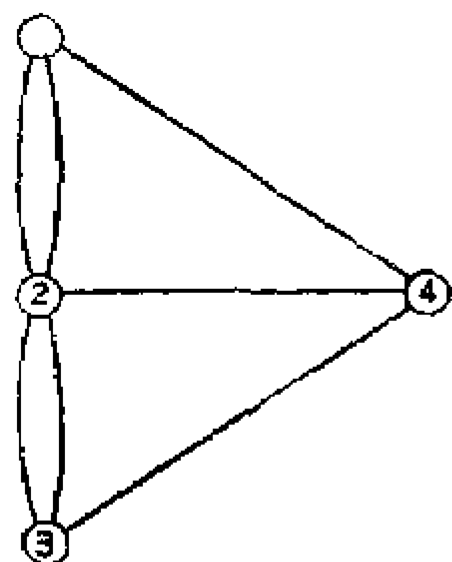


图 1.2　哥尼斯堡桥问题的图

图论中最著名的至今尚未解决的问题可能是著名的四色猜想⊖。许多世纪以前，地图的制作者们凭经验发现，要给一个被分成一些区域的国家地图着色，为了使两个相邻的区域必须有不相同的颜色，只需要四种不同的颜色就够了。起初这个问题似乎没有被数学家们认真地重视，直到它难住了一些世界上最有才华的数学家们才引起重视。1890年HEAWOOD证明了当用“5”代替“4”时，猜想就变为真实的。即使设想能找到一个反例，也必然是异常艰巨而复杂的，因为最近由ORE和STEMPLE[1970]对少于40个区域的所有地图都证明了这个猜想。

这个问题很容易变换成图论中的问题，因为每张地图构成这样一个图，其中的区域包括外部范围都用一些点表示，当且仅当两个区域具有公共边界时就用一条线连接其对应的两个点。

⊖ 四色问题已于1976年由计算机程序解决。

根据我们的观点，图论在物理学中最重要的应用是1847年KIRCHHOFF应用图论立式与求解电网络问题，对于KIRCHHOFF的贡献在本书中将详细地论述，第二章和第四章概括了他对电网络理论的最主要贡献。

虽然在应用中出现的许多图例均是几何图形，就图论来说，它本质上是一种组合。下一节我们将介绍抽象图的概念。除了从图的基本组合特性去掉有关的几何特征外，抽象图的概念将扩大应用的前景。

§ 2. 抽象图的基本概念

和一切数学理论一样，我们必须从一系列定义开始。由于我们必须使用一些术语，同时为了这些术语的精确性，必须对它们正规定义。幸好，我们将要定义的许多词在日常语言中几乎都有相同的直观意义，因此很少需要有意识地用心记住它们。为了减少这些必须的序言的千遍一律，我们将用图解法阐明我们的观点。

2.1 一般定义

定义 1.1：抽象图。

一个抽象图G(V，E)，或简称为图G，由称之为节点的元素的集合V和形式为(i，j)或(j，i)的非序偶的集合E组成，i，j为V中的元素。(i，j)或(j，i)称为G的边，节点i或j称为(i，j)的端点。

对于节点另一些通用的名称是顶点，点，结，0-单形，0胞及元等，而边的另一些通用名称是线，支路，弧，1-单形及元边。(i，j)表示它联接节点i和j，并称为边(i，j)与节点i和j相关联，或反过来说，节点i和j与边(i，j)相关联。在实用中，图通常是用几何图来等价表示的，其中节点用小圆圈或点表示，其中任何两点i和j当且仅当边(i，j)在E中时，由连续曲线或直线连接。图

的这个定义对于许多用图表示外观特性的问题是足够的。然而，为了达到我们的目的，需要扩大一些图的概念。

我们引伸图的概念，允许一对节点连接几条不同的边，用符号$(i, j)_1$，$(i, j)_2$，……$(i, j)_k$表示。如果$k \geq 2$，它们称为G的平行边，如果没有指定某一特定的边，(i, j)表示连接节点对i和j之间平行边中的任一条，否则便是确定的。我们还容许边的两个端点是同一个点，这样的边(i, j)称为自环。如果在图G的一个节点i存在两个或更多的自环，它们也可称为图G的平行边。在几何图形中平行边可以用连接同一对节点之间的连线表示，而自环(i, j)则可以用一从节点i出发，不经过其它的节点而又返回到i的圆弧表示。

举例说明，我们考虑图$G(V, E)$，其中

$$V = \{1,2,3,4,5,6,7\}$$

$$E = \{(1,1),\ (1,2),\ (1,4),\ (4,4)_1,\ (4,4)_2,\ (4,3),\ (2,3)_1,\ (2,3)_2,\ (6,7)_1,\ (6,7)_2,\ (6,7)_3\}$$

相应的几何图如图1.3所示。图中在节点1上有一个自环，在节点4上有二个自环，节点2和3之间有两条平行边连接，而节点6和7之间有三条平行边连接。我们强调，图中边(i, j)中的节点i和j的次序是无关紧要的。实际上，我们认为$(i, j) = (j, i)$，也就是说$(1,2) = (2,1)$和$(6,7)_2 = (7,6)_2$。

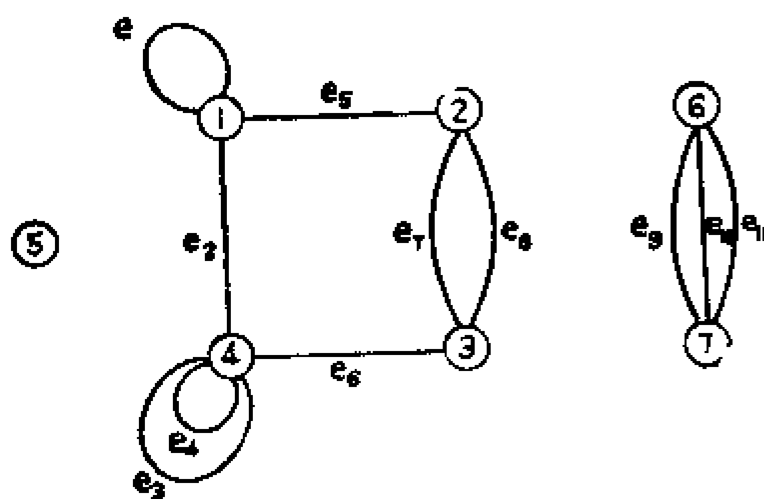


图 1.3　几何图

当V和E都是有限时，则称图G(V，E)为有限图。本书中，我们只考虑有限图。无限图具有一些很有趣的特性。有兴趣的读者可参阅KÖNIG[1950]和ORE[1962]的著作。

定义 1.2：子图。

图G(V，E)的子图是一个图$G_S(V_S，E_S)$，其中V_S和E_S分别是V和E的子集合。如果V_S或E_S是一真子集，则该子图称为G的真子图。如果$V_S=V$，则该子图称为G的生成子图。如果V_S或E_S是空集，则该子图称为空图。空图可视为每一个图的子图并用符号ϕ表示。

定义 1.3：孤立节点。

不和任何边相关联的节点称为孤立节点。

例如，在图1.3中，节点5是个孤立节点。图1.4中表示的是子图的一些例子。图1.4(a)因为包含原图所有的节点，所以是一生成子图。图1.4(b)和(c)是真子图的例子。一个图的本身也是它

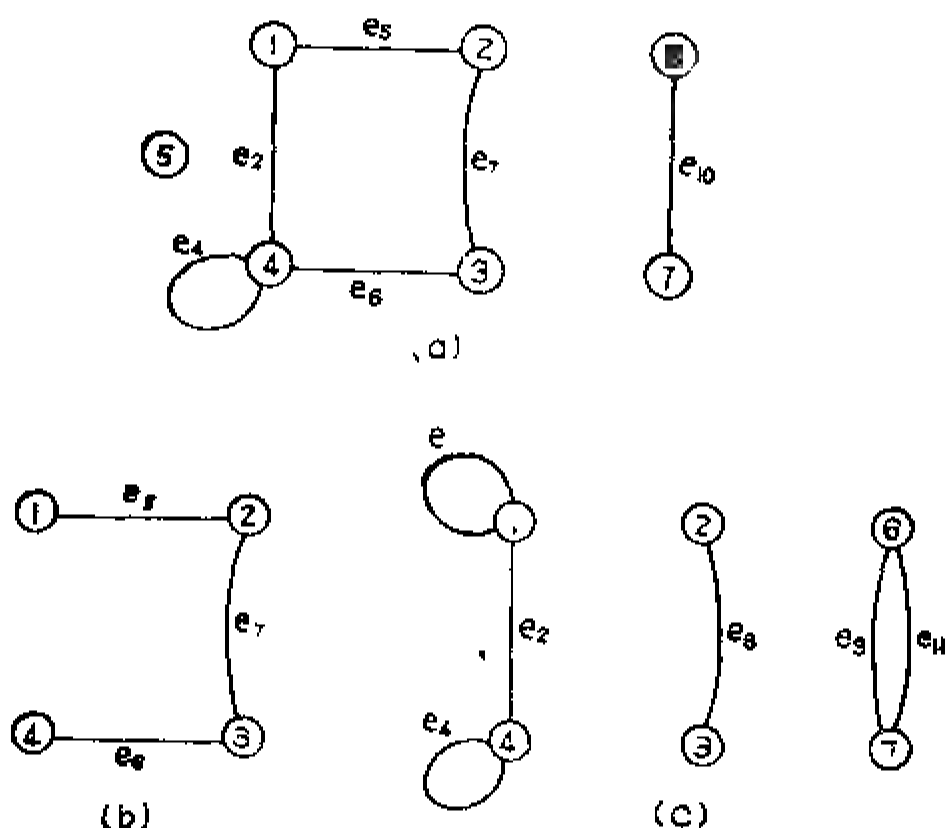


图 1.4 图1.3的一些子图

自己的子图。

如果两个子图没有公共边，则称此二子图为边-不相接。如果两个子图没有公共节点，则称之为节点-不相接。显然，当两个子图是节点-不相接时也一定是边-不相接。但是一般反过来并不成立。例如，图 1.3 中子图(1,2)和(3,4)是节点-不相接，因而它们也是边-不相接。另一方面，图 1.4(b)和(c)所示子图是边-不相接，但它们不是节点-不相接。

如果(i，j)是图 G 的一条边，则称节点 i 和 j 相邻接。如果 G_s 是 G 的一个子图，则 G_s 的补图 $\overline{G}_s$ 是由不属于 G_s 的所有边 $\overline{E}_s$ 和除了那些只在 G_s 中而不在 $\overline{E}_s$ 中的节点以外 G 的所有节点所组成的 G 的子图。显然，G_s 和 $\overline{G}_s$ 是边-不相接但未必是节点-不相接，它们的节点集可以不是互补的。因而 G 的空图的补图是图 G 本身，

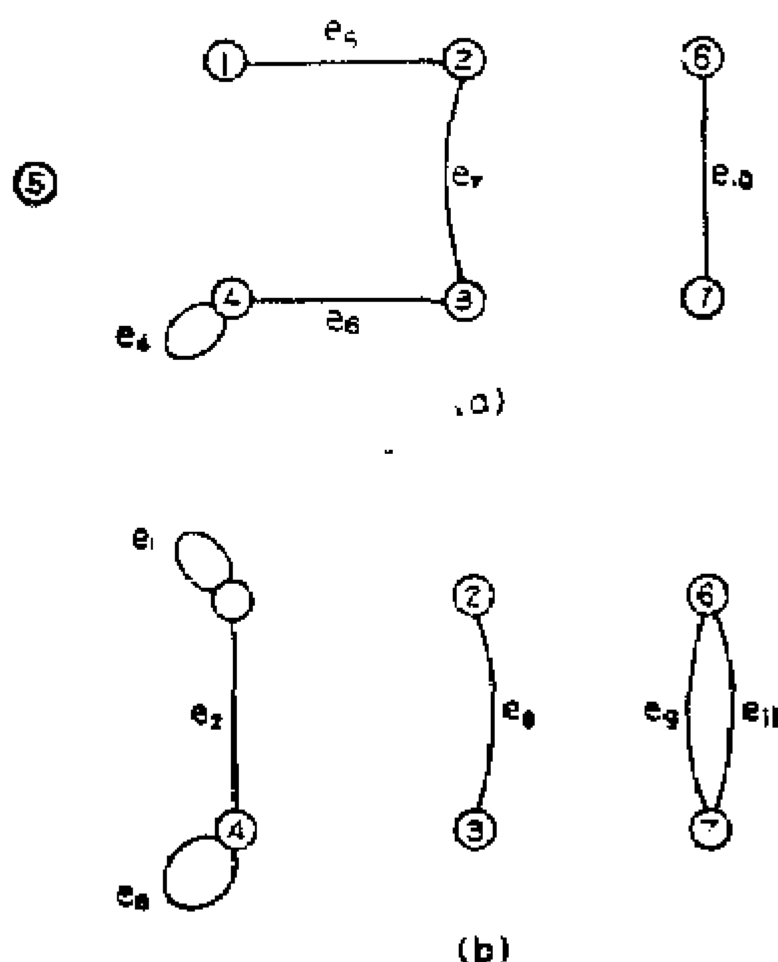


图 1.5 图 1.3 的一对互补子图

而图 G 的补图是空图，我们也称 G_5 和 $\bar{G}_5$ 是 G 的互补子图。例如，图 1.5(a)和(b)是图 1.3 的互补子图。

在实际应用中，有时用字母 e 表示图的边是方便的。用这种方法，一个不包含有孤立节点的子图可以用它们边的标号的"乘积"或并列来表示。例如，图 1.3 中图的边也可用字母 e_i 表示：$e_1=(1, 1)$、$e_2=(1, 4)=(4, 1)$，…，和 $e_{11}=(6, 7)_2=(7, 6)_2$。图 1.4(b)和(c)的子图可以分别用它们边的标号的乘积如 $e_5e_6e_7$ 和 $e_1e_2e_4e_8e_9e_{11}$ 来表示。当然，我们也可以应用这种方法表示含有孤立节点的子图。但是，当包含有空图时，其意义将不明确。

2.2 同构

前面一小节，我们已经指出在绘制图的几何线图时可以非常自由地选择节点的位置及其连线的形状。因此对相同的图可以得到看上去完全不同的线图。在这一情况下，我们需要有一种确切的方法来说明两个图虽然画法或标记不一样，但它们实际上是同一个图。下一个定义给出为此目的的术语。

定义 1.4：同构。

如果两个图 G_1 和 G_2，节点集合各元素之间，边集合各元素之间都存在着一一对应关系，同时对应的边与对应的节点相关联，则图 G_1 和 G_2 称为是同构的，用 $G_1=G_2$ 表示。

换言之，当且仅当一个图与另一图中相互对应的节点是由相同数目的边相连接时，就是两个同构的图。根据定义 1.4 的陈述，同构的两个图必须满足两个条件：第一，必须具有相同的节点数和边数。第二，必须保持关联关系。这后一条件通常难于用文字来表明。

举例说明，考虑如图 1.6 所示的图 $G_1(V_1, E_1)$ 和 $G_2(V_2, E_2)$ 两个图看上去完全不同，但它们是同构的。这两个图的同构性可由 V_1 的节点 i 与 V_2 的节点 i′(i=1, 2, 3, 4, 5, 6)作为它们节点集中的对应元素来建立，易于检验，这两个图中对应的边与对应的节

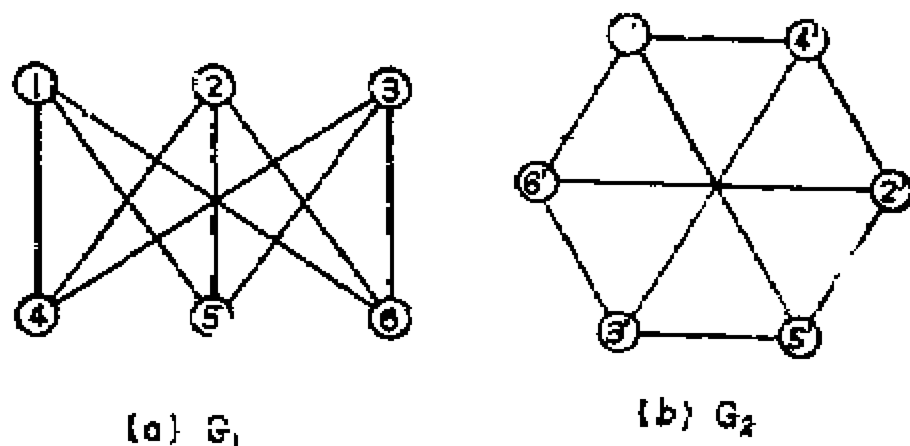


图 1.6 两个同构的图

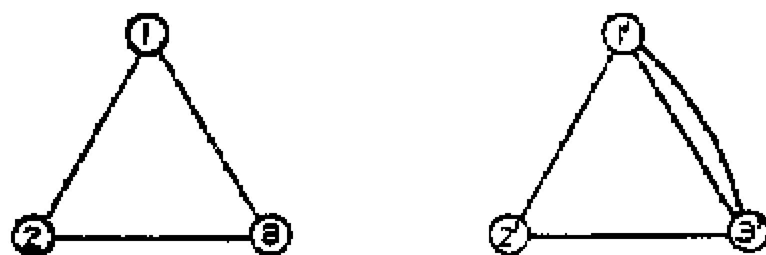


图 1.7 两个不同构的图

点相关联。换言之，关联关系是保持的。

另一个例子．图 1.7 给出的两个图，它们的节点集合之间虽然保持着一一对应的邻接关系，但它们不是同构，理由是它们包含的边数不相同。如果我们考虑节点 i 与 i′ (i＝1, 2, 3) 为节点集中的对应节点，连接节点 1′ 和 3′ 的有两条边，然而连接对应节点 1 和 3 的只有一条边。

如果图的节点或边是有确定标记的，则该图称为标识图。本书中，图和标识图二词作为同义词。到目前为止，我们看到的全部都是标识图，节点用整数 1, 2, …或 1′, 2′, …标记，边用 e_1, e_2, …标记。加权图是每条边赋给一个权的图。

2.3 连通性

由连续路线形成的边序列在图论中起着重要作用。在几何图中，

一个边序列能够想象为一个以连续方式连接的边的系列。以下是正式定义。

定义 1.5：边序列。

图G中长度为k-1的边序列是如下列形式的边的有限序列

$$(i_1,\ i_2),\ (i_2,\ i_3),\ \cdots,(i_{k-1},\ i_k) \qquad (1.1)$$

G中$k\geq 2$，如果$i_1=i_k$，该边序列称为闭边序列，否则称为开边序列。在一个开边序列中，节点i_1叫做边序列的起始节点，而节点i_k叫做终止节点。二者合起来叫做边序列的端点。

我们特别指出，在(1,1)中并不是所有的节点都必须是不重复的，同一节点在边序列中可以出现几次。例如，图 1.6(a)中的边序列

(1,6)，(6,3)，(3,5)，(5,3)，(3,4)，(4,1)，(1,6)，(6,2)(2,5)

是一长度为9的开边序列。节点1是边序列的起始节点，节点5是终止节点。类似地，边序列

(4,2)，(2,6)，(6,3)，(3,5)，(5,2)，(2,6)(6,3)，(3,5)，(5,2)，(2,4)

构成一长度为10的闭边序列。

我们也称(1,1)为连接起始节点和终止节点之间或连接节点i_1和i_k之间的边序列，当$k>2$时，$(i_{x-1},\ i_x)$和$(i_x,\ i_{x+1})$ $(1<x<k)$是边序列中的相邻边。有时为了方便，将一个孤立节点也定义为边序列。

定义 1.6：边列。

如果一个边序列中的所有边都不重复出现，则该边序列称之为边列。

可见，一个边列能经过一个节点不止一次，但是边不能重复经过，而在边序列中是能够重复经过的。在图 1.6(a)中，边列的一个例子是

(1,6)，(6,2)，(2,5)，(5,1)，(1,4)，(4,2)。

这个边列是一长度为6的开边列。显然，边序列或边列也包含在子图中。此外，如果我们还要求边列中除了起始节点和终止节点以外的所有节点都不重复出现，则得到通常的路径和回路的概念。

定义 1.7：路径。

如(1.1)中所表示的开边列，其中所有的节点 $i_1, i_2, \cdots, i_k$ 均不重复，则该开边列叫做长度为 k-1 的路径。一个孤立节点可认为是长度为零的路径。

定义 1.8：回路。

如(1,1)所表示的闭边列，所有节点 $i_1, i_2, \cdots, i_{k-1}$ 均不重复，而 $i_1=i_k$ 时，则该闭边列叫做长度为 k-1 的回路。

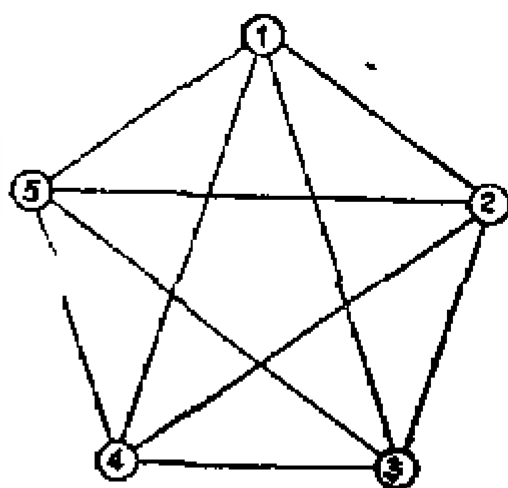


图 1.8 完备的五角形

因此，自环也是一长度为1的回路。在文献中，回路这个词通常称为圈或环。这里我们采用回路这个词是因为它在应用中更常用到。图 1.8 中的开边列

(1,2),(2,3),(3,4),(4,5)

是一长度为4的路径，而闭边列

(1,3), (3,2), (2,5), (5,4), (4,1)

是一长度为5的回路。

定义 1.9：连通图。

如果一个图中的每一对节点之间都有路径相连通，则该图称为连通图。

换言之，一个连通图直观地看只有一块。图 1.5(a)或(b)是非连通图的一例，而图 1.6 表示的是两个连通图。

定义 1.10：片。

图的片是包含最大边数的一个连通子图。一个孤立节点也算一个片。

因此，如果一个图是非连通图，它必定包含若干个片。其中一

个或几个片分别可以由一个孤立节点组成。例如图 1.5(a)中包含有三个片，其中之一是一个孤立节点。

假设我们给图G中某些节点对之间的二元关系R定义如下：当且仅当图G中节点 i 和 j 之间有路径连通时，存在关系 iRj，这里孤立节点可看作是长度为零的路径。于是R是一等值关系，它把G的节点集唯一地分解成互不包含的等值节点组，其中每一节点组连同与其相关联的边组成G的一个片。因此，一个图当且仅当由一个片组成时，它就是连通图。

我们将讨论回路和非回路边。图的回路边是指能够构成部分回路的边，否则叫做非回路边。显然，若从连通图中移去一条回路边，则剩下的是一连通子图(习题 1.3)。

定理 1.1：若从连通图中移去一条回路边，则剩下的是一生成连通子图。

若从图G中移去一条非回路边，结果使图G增加一个片，这也是很清楚的。例如在图 1.5(b)中，如果我们移去非回路边 e_2 或 e_8，结果图具有 4 个片，这比原图增加一个片。另一方面，在图 1.7 或 1.8 中，所有的边均是回路边，移去其中任何一条边后，结果形成一生成连通子图。

定理 1.2：设G是一无平行边和自环的图。如果G具有 n 个节点和 C 个片，则G的最大边数由下式决定

$$\frac{1}{2}(n-c)(n-c+1) \tag{1.2}$$

证明：设 $G_i(i=1,2,\cdots\cdots c)$ 为图G中的片，每个片具有 n_i 个节点。由于每个片 G_i 的最大边数是 $\frac{1}{2}n_i(n_i-1)$，所以图G的最大边数为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{c}n_i(n_i-1) \tag{1.3}$$

如果G含有 c−1 个孤立节点，则式(1.3)简化成式(1.2)，定理证毕

因此，我们假设有两个不同的片 G_i 和 G_j，G_i 和 G_j 具有一个以上的孤立节点，设 $n \geqslant n_j > 1$，若在 G 中当我们将 G_i 的节点数增加 1 并且同时将 G_j 的节点数减少 1 时，结果得到一个与 G 具有相同节点数和片数的新图 G^*。容易验证 G^* 的最大边数大于 G 的最大边数，继续这一过程，我们能够证明对于上述所有图，式(1.2)实际上是一上限值

推论1.1：设 G 是不包含有平行边和自环的具有 n 个节点的图。当 G 的边数大于 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 时，则 G 必定是连通图。

2.4 秩和零度

秩和零度是图论中经常遇到的两个数，在下一章中，我们将看到秩和零度表示了一个图中独立的割集数和独立的回路数。

定义 1.11：秩

具有 n 个节点和 c 个片的图，其秩 r 定义为 $r=n-c$。

定义 1.12：零度。

具有 b 条边，n 个节点和 c 个片的图，其零度 m 定义为 $m=b-n+c(=b-r)$

零度也可称为回路秩，圈数，环秩，连通度以及第一比特数。正如在下一章中我们将要看到的，我们之所以选择秩和零度这个名称是因为它们是有关图的"关联矩阵"的秩和零度。图 1.8 中图的秩为 4(=5−1)，零度为 6(=10−5+1)，在图 1.5(b)中，$r=6-3=3$，$m=6-6+3=3$。注意，所有这些数字均是非负，如我们能从下列定理见到（习题 1.5）确实是这样。

定理 1.3：对于一个给定的图，它的秩和零度二者都是非负。当且仅当图不包含回路时其零度为 0，当且仅当图包含一个单一回路时其零度为 1。

因此，一个零度为 1 的连通图也可用图的边数等于图的节点数这个特性来表示。对于一个非连通图，其秩和零度分别是它所包含

的片的秩和零度的和。

2.5 度

在图论中普遍应用的另一个术语叫做度。含有规定度数的图的实现这个问题将在第六章更深入地讨论。

定义 1.13： 度。

一个图的某节点 i 的度等于与节点 i 相关联的边数，用 d(i) 表示。

因此，一个孤立节点是一度数为零的节点。

因为每条边与两个节点相关联，它对节点度的总和的贡献为 2 。因此，我们得到

$$\sum_{i}^{n} d(i) = 2b \tag{1.4}$$

定理 1.4： 一个图的节点的度的总和是该图所含有边数的两倍。

如果 V_1 和 V_2 是图 G 中度数分别为奇数和偶数的节点集，则等式的左边

$$\sum_{i=1}^{n} d(i) = \sum_{j\in V_2} d(j) + \sum_{k\in V_1} d(k) \tag{1.5}$$

总是个偶数，这就得出下列结论。

推论 1.2： 一个图中度数为奇数的节点的数目总是偶数。

图 1.9 中节点 1，2，3 和 4 的度分别是 3，6，1 和 4 。其中有两个节点的度为奇数，即 d(1) = 3 和 d(3) = 1。图中边数为 7 ，所有度的总和是该图边数的两倍。

定义 1.14：正则图

如果图中各个节点 i 的度数均为 d(i) = k，则该图叫做度数为 k 的正则图

度数为零的正则图是由孤立节点的集合组成的图，度数为 1 的正则图是每片只包含一条边的图，而度数为 2 的正则图是每个片为

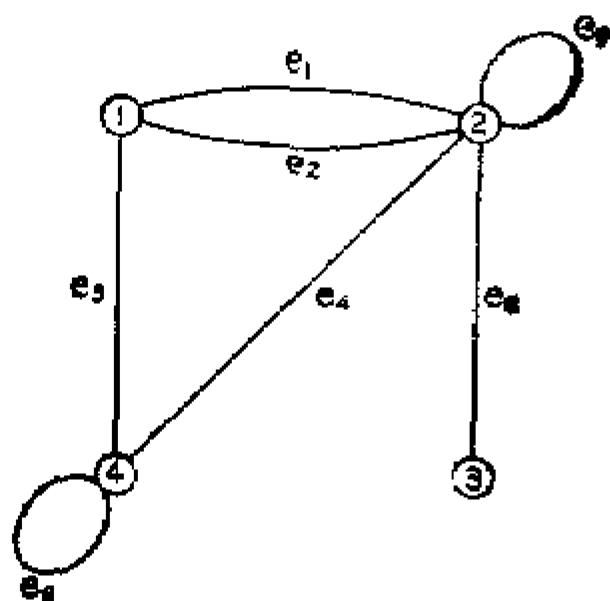


图 1.9 为了说明目的的图

一个回路的图，这些条件对它们的完备特性是必要并充分的。

例如，图 1.6 中，因为每个节点的度数为 3，所以是度数为 3 的正则图。而图 1.8 是度数为 4 的正则图。正则图的另一些例子是用 5 个规则的多面体：四面体，立方体，八面体，十二面体和二十面体的边和角来定义的图。

§ 3. 图的运算

图的运算对将图的结构用比较小的或比较简单的图来表示是有用的。同时对描述在分析中常见的图也是方便的。我们已经介绍过一个给定的图的补子图的概念

从图G中移去节点 i 的运算，表示这种运算结果形成由图G中除 i 以外的所有节点以及与 i 不相关联的边所组成的子图。换言之，它是包含与 i 不相关联的所有节点和边的子图。类似地，从图G中移去边(i, j)产生一个包含G中所有节点和除边(i, j)以外的所有边的子图。移去一个节点或边的集合用逐个移去序列中该集合的单个元素来定义。

下面将定义集合论中的并、交、差及环和四种二元运算，分别用符号$\cup$，$\cap$，－和$\oplus$表示。它们应用在两种略有不同的情况下。例如，如S_1和S_2是两个集合，则$S_1\cup S_2$表示由S_1中或S_2中或S_1和S_2中所有的元素组成的集合。如$G_1(V_1,E_1)$和$G_2(V_2,E_2)$是图G(V，E)的两个子图，则$G_1\cup G_2$表示由节点集合$V_1\cup V_2$和边集合$E_1\cup E_2$组成的图G的子图。集合$S_1\cup S_2$叫做集合S_1和S_2的并集。图$G_1\cup G_2$叫做子图G_1和G_2的和图。类似地，集合S_1和S_2的交集$S_1\cap S_2$是由既在S_1中又在S_2中的所有元素组成的集合。子图G_1和G_2的交图$G_1\cap G_2$是具有节点集合$V_1\cap V_2$和边集合$E_1\cap E_2$的图G的子图。显然，图的和及交的概念很容易推广到任意一种子图。

举例说明，考虑图 1.9 中的图G，G的两个子图G_1和G_2示于图 1.10。和图$G_1\cup G_2$是图G本身，即$G=G_1\cup G_2$，交图$G_1\cap G_2$是由边e_1和e_4组成的子图。作为另一个例子，我们注意到一个图是某个子图和它的补图的和图。

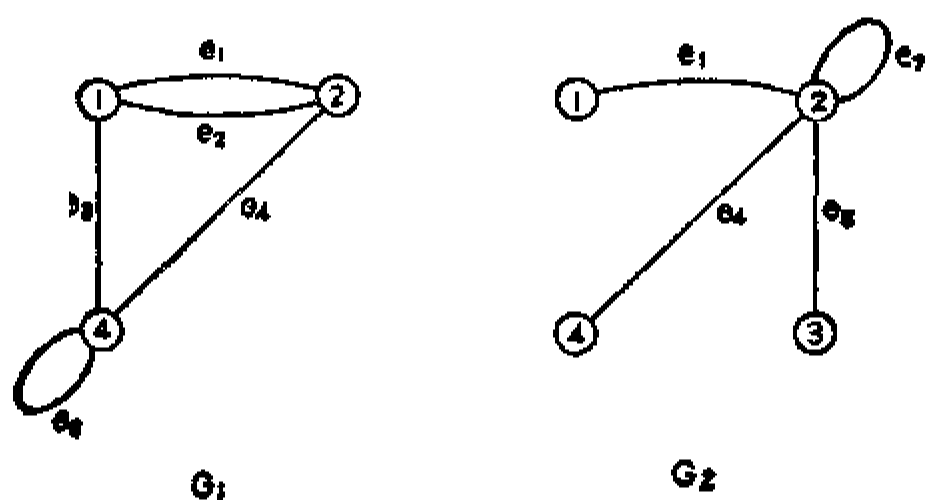


图 1.10 图1.9的两个子图说明图的运算

集合S_1-S_2是由在S_1中但不在S_2中的所有元素组成。而$S_1\oplus S_2$是由S_1中或S_2中但不是两者所公有的所有元素组成的集合。S_1-S_2，$S_1\oplus S_2$分别叫做集合S_1和S_2的差与环和。由于$S_1\oplus S_2$是集

合 S_1 和 S_2 的并和交二者之差，因此环和也称为对称差，

$$S_1 \oplus S_2 = (S_1 \cup S_2) - (S_1 \cap S_2) \tag{1.6}$$

例如，集合 $S_1 = \{a, b, c, d\}$ 和 $S_2 = \{a, c, e\}$ 的环和为

$$S_1 \oplus S_2 = \{b, d, e\}$$

而它们的差为

$$S_1 - S_2 = \{b, d\}$$

$$S_2 - S_1 = \{e\}$$

必须注意，在进行差的运算中按顺序是很重要的。

类似地，如果 G_1 和 G_2 是不含有任何孤立节点的图 G 的子图，则 $G_1 - G_2$ 是表示在 G_1 中但不在 G_2 中的所有边组成的子图。而 $G_1 \oplus G_2$ 是由在 G_1 中或在 G_2 中但不是两者公有的所有边组成的子图。在特殊的情况下，有 $G_1 \oplus \phi = \phi \oplus G_1 = G_1$。例如，对图 1.10 我们得到

$$G_1 - G_2 = e_1e_2e_3e_4e_6 - e_1e_4e_5e_7 = e_2e_3e_6$$

$$G_2 - G_1 = e_1e_4e_5e_7 - e_1e_2e_3e_4e_6 = e_5e_7$$

$$G_1 \oplus G_2 = G_2 \oplus G_1 = e_2e_3e_5e_6e_7$$

我们强调，对两个子图的差和环和的运算仅仅是对那些不含有孤立节点的子图定义的。根据差的运算，从图 G 中消除边 e_i 就相当于进行 $G - e_i$ 的运算，这将陷入有一个孤立节点的含混之中。

借助于环和运算的帮助，现在我们能够建立有关图的回路集的一些基本特性

定理 1.5：两个回路的环和是一个回路或是一个边不相接回路的并。

定理 1.6：一个图的回路集和边不相接回路的并是环和运算下的阿贝尔群。

这两个定理的证明是很容易的，详细证明留作练习（习题 1.8 和 1.11）。

设 (i, j) 是图 G 的一条边，短接边 (i, j) 意味着进行这样一种运算，首先从 G 中消除边 (i, j)，然后再将节点 i 与节点 j 合二为一。这种运算在所得的图中可能会产生附加自环。特别是从 G 中消除某

自环的运算就相当于短接该自环的运算。例如在图1.9中短接边 e_1 所得的结果如图1.11(a)所示，而短接边 e_5 所得结果如图1.11(b)所示。

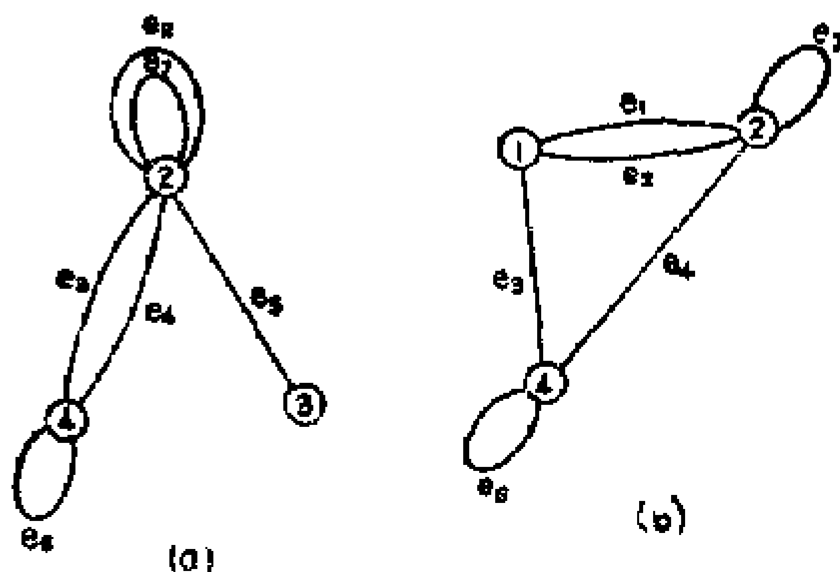


图 1.11　从图1.9中分别短接边 e_1 和 e_5 获得的图

在本书中经常出现的一种特别重要的子图叫做“局部子图”。其定义如下。

定义1.15：局部子图。

设 V_s 是图G中节点集V的一个子集。局部子图用 V_s 定义并用符号 $G[V_s]$ 表示，G的局部子图是节点集为 V_s、边集为G中所有连接 V_s 的两个节点的边组成的子图。

换言之，$G[V_s]$ 是从G中移去所有不在 V_s 中的节点后得到的子图。因此，当且仅当 V_s 中的两个节点在G中是相邻的，则它们在G $[V_s]$ 中也相邻。当 $V_s=V$ 时，局部子图就是G本身，即 $G[V]=G$。对于单个节点 $V_s=\{i\}$，$G[V_s]$ 或是空图或是由在节点 i 上所有自环组成的子图。

例如，考虑图1.9中所示的图G，其节点集合 $V_1=\{1,2,3\}$ 和 $V_2=\{2,3,4\}$ 定义的局部子图分别表示在图1.12(a)和(b)中，若用边标示符号的话，则我们得到

$$G[V_1]=e_1e_2e_5e_7$$

$$G[V_2]: e_4e_5e_6e_7$$

另一方面，图1.10的子图G_1不是由节点集合$V=\{1,2,4\}$定义的局部子图，因为它不是用这些节点定义的最大子图。

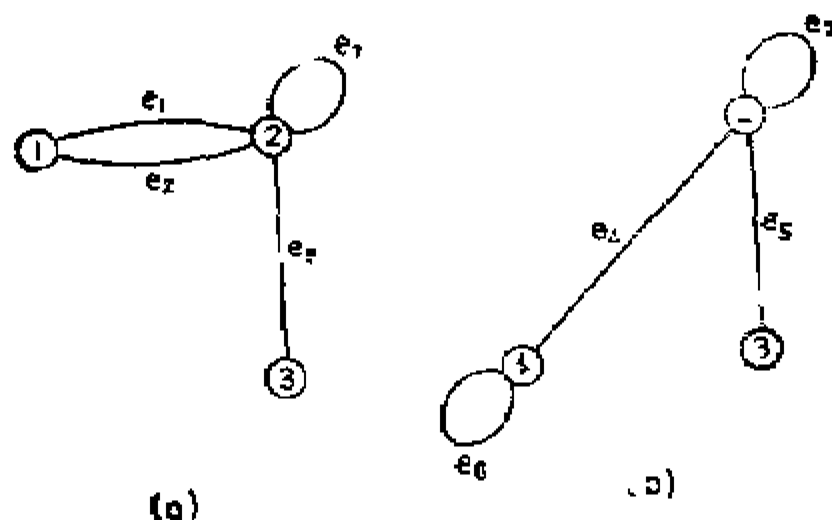


图1.12 图1.9的两个局部子图

§4. 重要的几类图

根据它们的结构特征能够把图分成许多不同的种类。这些结构特征作为分类的依据。例如，在图的连通性的基础上我们已经对图进行分类。在本节中，我们介绍一些其它的有用的分类法。

4.1 平面图

到目前为止，我们完全是根据抽象图来讨论的，抽象图的几何图形仅仅是为了用来作解释。相反地，平面图则是根据它们的几何图形来定的。

定义1.16： 平面图。

当一个图的几何图形能够画在一个平面上，且使其中任意两条边除了在节点处以外都不相交，则该图叫做平面图。

显然，当且仅当一个图的几何图形能够画在一个球面上互不相

交，则它也能画在一个平面上互不相交。实际上，利用球极平面射影，我们能够将这两张图之间建立一一对应关系如下：设球置于平面上使其接触点(南极)为平面坐标系的原点，又设Z是球和通过平面原点并垂直于平面的直线的交点(北极)。用一直线连接Z和球面上的任意一点P并将线延长与平面相交于P′点。这样平面上的点和球面上的点之间建立了一一对应关系。以上过程称为球面和平面之间的映射。因此，平面图的几何线图总是能够映射到球面上，反之，球面上的几何线图也总是能够映射到平面上，但Z点不能选在图上。

定义 1.17，区域(窗)。

一个平面图的几何线图当它画到一个平面上不相交时，该平面被划分成的一些区域，叫做平面图的区域(窗)。无限区域又叫做外部区域。

因此，区域用其边界表示特性。在电网络理论中，由区域的边界形成的回路，由于具有鱼网的网孔外观，所以也叫做网孔。我们注意到，对应于电网络的图通常是不含有任何自环的。因此，定义区域的网孔不含有含糊不清之处。

图 1.13 是一平面图，它具有 5 个区域，外部区域是用数字 5 表示的。这些区域分别用网孔 $e_1e_2e_3$，$e_2e_4e_5$，$e_4e_6e_7$，$e_7e_8e_9$ 和 $e_1e_6e_8e_9e_5e_3$所限定。图 1.6 和 1.8 是非平面图的例子。

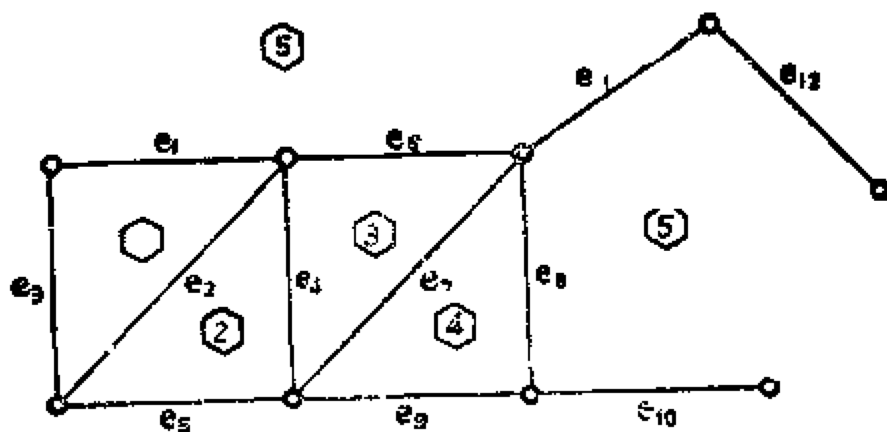


图 1.13　平面图

定理 1.7：平面图的任何一个区域总是可以成为该平面图的外部区域。

证明：设一平面图的几何图形画到一球面上使边互不相交，旋转该球使以上所讨论的Z点在给定区域的内部。然后将几何图再映射到平面上，我们就得到期望的结果

平面图具有很大的实用价值。例如在印刷电路中，一个电网络当且仅当它对应于一个平面图时，就能印刷到一个简单的平面上。平面图与电网络理论中的对偶性概念也是密切相关的。平面图的区域数与其边数和节点数之间的关系用下列公式相联系。

定理1.8：对于一个具有 n 个节点、b 条边和 q 个区域(包括外部区域)的连通平面图，有以下关系式：

$$n-b+q=2 \tag{1.7}$$

证明：设G是连通平面图。我们将对G的边数 b 用归纳法证明这个定理。当 $b=1$ 时，定理显然是成立的。当 $b\geq 2$ 时，假设定理对于任何 $b-1$ 条边是成立的。我们将证明对于任意 b 值此定理也是成立的。如果G不包含有回路，则G含有 $n-1$ 条边，同时(1.7)式满足。让我们假设G至少包含有一个回路，且 e 是G的外部区域的边界。设G'是从G中移去 e 后得到的图。显然，G'具有n 个节点 $b-1$ 条边和 $q-1$ 个区域。按归纳法假定，则有$n-(b-1)+(q-1)=2$。定理证毕。

上面的公式首先是Euler 对多面体给出的。事实上，平面图的问题在他对多面体进行研究中已被发现。欧拉公式的一个简易推论是对不含有平行边和自环的平面图的边数确立一个上限。

推论 1.3：如果G 是一具有 n 个节点和 b 条边$(n\geq 3)$，且无平行边和自环的平面图。则

$$b\leq 3n-6 \tag{1.8}$$

证明：在具有 n 个节点的平面图G_n中，当它的每条边至少包含在一个由 G_n的区域边界形成的回路中且每一回路的长度为3 时，则G_n会出现最大边数。当b'和q'分别是G_n的边数和区域数时，由于

G_n的每条边恰巧是包含在两个这样的回路中。因此，$2b'=3q'$。应用此式连同(1.7)式，我们得到$b'=3n-6$。由此确定任一G_n的上限边数。因此推论得证。

应用这个结论，现在我们能够进一步证实前面的论断。图 1.8 中的图，由于 $b=10>9=3n-6$，所以是非平面图。

如图 1.6 和 1.8 所示的两个非平面图以及它们的变形，对表示平面图的特性是必要而充分的，它是首先由KURATOWSKI[193]指出的。

4.2 可分图和不可分图

有些图当移去某一节点后就成为不连通的，而另一些图则不能分离。本节将讨论表示此概念的特性。

定义 1.18：割点。

在一连通图G中，若存在一个非零真子图G_s，同时G_s与其补图仅有一个公共节点 i，则节点 i 叫做G 的割点。当一非连通图的节点是它的任一片的一个割点时，则该节点是这一非连通图的割点。割点这个术语有时也叫做断点。

例如，图 1.14 中的节点 4,6,7 和 10 是割点，而节点 8 和 9 则不是。如果G 不含有自环，割点也可以定义为这样的一个节点，移去该节点后增加的片数至少为 1 。但是如果G 含有自环，以上陈述一般地说是不成立的，例如，设G＝(i,j)U(i,i)，节点 i 是一割点，但是移去它后并不增加片数。

定理1.9：不含有自环的图中，当且仅当存在不同于节点 j 的

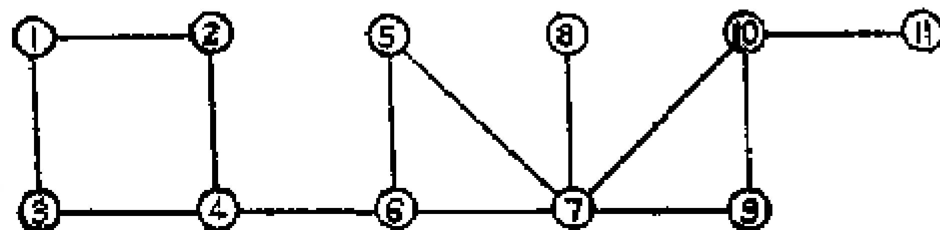


图 1.14 可分图

两个节点 i 和k，若连接节点 i 和 k 的每一路径都包含节点 j，则节点 j 为一割点。

该定理是容易证明的，留作练习(习题 1.15)。

定义1.19：不可分图。

一个非零连通图若不含有割点，则叫做不可分图。所有其它的非零图都认为是可分图。

因此，一个非零非连通图是可分图常见的一个例子。图 1.12—1.14 是可分图的另一些例子。不可分图的例子表示在图 1.8 和图 1.15中。从上述定义可以直接得出，一连通可分图必须包含一个割点，或者说必须至少包含一个与其补图只有一个公共节点的非零子图。换一种表示，我们得到以下结论。

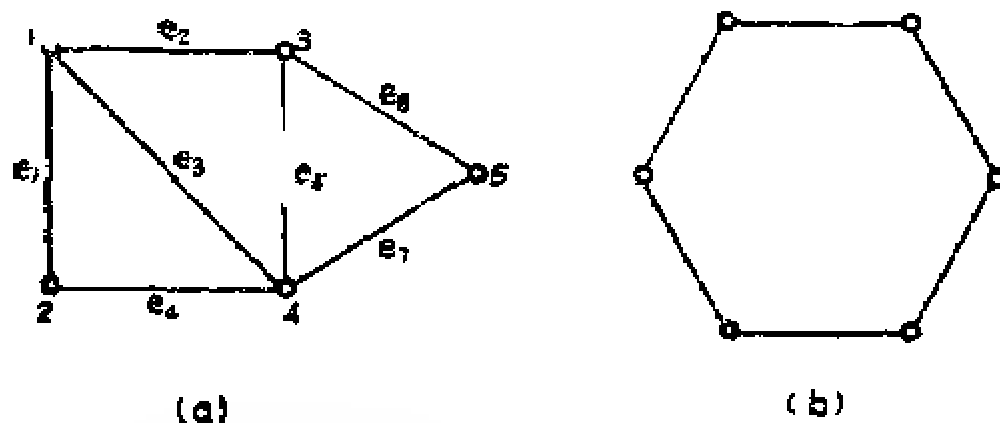


图 1.15 两个不可分图

定理1.10： 一个至少包含两条边的图不可分的必要与充分的条件是该图的每一个非零真子图与其补图至少具有两个公共节点。

举例说明，考虑图 1.14，由于图中存在两个节点比如说 1 和 11，凡是连接这两个节点的所有路径都包含有节点 6，所以节点 6 是一割点。在图 1.15(a)中，由于对每个非零真子图比如说 $e_1e_2e_3$ e_4 与它的补图 e_5e_6e 至少具有两个公共节点，所以该图是不可分图。

一个不可分图也可以用节点的连通情况来表征。

定义1.20：圈连通。

一个图若其中任何两个节点均包含在同一个回路中，则此图叫做圈连通。

例如，图 1.15 中的图是圈连通图，而图 1.14 中的图则不是。

定理1.11：一个至少包含两条边的无自环图，当且仅当它是圈连通图时是不可分的。

证明：设 G 是至少含有两条边的不可分图，又设 i 和 j 是 G 的任何两个相异节点。显然，在 G 的 i 和 j 之间有一路径 P 连通。我们将通过长度 P 用归纳法证明定理的必要部分。当 P 的长度为 1 或 2 时，则根据定理 1.9 和 G 不含有割点这一事实，而存在包含有 i 和 j 的一个回路。当 $k \geq 3$ 时，假设定理对于任何长度为 $k-1$ 或更少的路径 P 都是成立的。我们将证明对长度为 k 的任何 P，定理也是成立的。设(x,j)是 P中的最后一条边，则用归纳法假设存在一个包含 G 的节点 i 和 X 的回路 L_1，又设(y,x)是 L_1的一条边。从定理 1.9 得出，存在一包含边(y,x)和(x,j)的回路 L_2。不难看到在 $L_1 \cup L_2$ 中，我们能够获得另一个含有节点 i 和 j 的回路。因此，G 中的任何两个节点能够位于同一回路中。反过来说，若 G 的任何两个节点能够位于一个回路中，则 G 必须是连通的且不包含割点，所以是不可分图。定理证毕。

我们觉察到，一个至少包含有两条边的图，若其中的一条边是自环，则是可分图，仅有一条边的图是不可分图。

推论1.4：一个不可分图当且仅当它的零度为 1 时，则是一个回路。

推论1.5：一个至少包含两条边的不可分图其零度大于 0。

这个推论是直接从一个不可分图除了是由一条边和两个相异端点组成的以外，它的每个节点的度数至少是 2 这个事实得出的(习题 1.17 和 1.19)。

定义1.21：块。

一个图的块是包含边的数目最多的不可分子图。

若连通图 G 是可分的，我们分裂其割点能够将图分成一些块，此过程叫做可分图分解为块。例如，图 1.14 的分解如图 1.16 所示。显然，这个分解是唯一的(习题 1.20)。

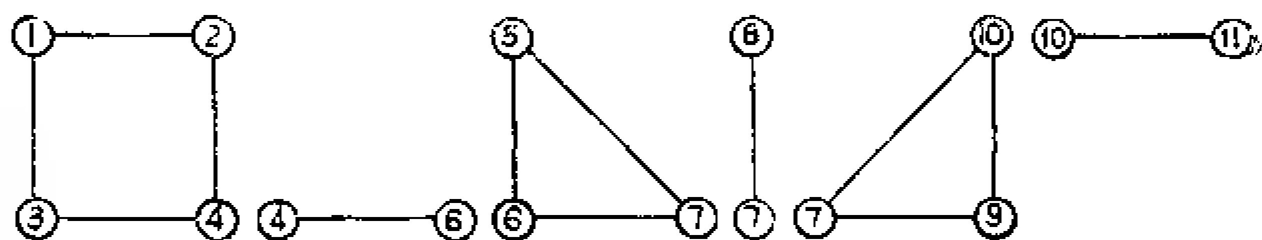


图 1.16.图 1.14 分解成块

4.3 二分图

二分图常常出现在匹配理论中，下面给出它的正式定义。

定义1.22：二分图。

某图 G(V,E)，若它的节点集 V 能够分成两个不相接的子集合 V_1 和 V_2，以致使 G 中每条边的一个端点在 V_1 中而另一端点在 V_2 中，则该图叫做二分图。

因此，一个二分图的非零子图也是二分图。连接 V_1 或 V_2 中任意两个节点之间的所有路径的长度均为偶数，而如果连接的两个节点其一在 V_1 中而另一在 V_2 中，则二节点之间所有路径的长度为奇数。例如，图 1.17 是具有节点集 $V_1=\{1,2,3,4\}$ 和 $V_2=\{5,6,7,8,9\}$ 的二分图。连接节点比如说 1 和 4 的所有路径的长度均为偶数。而连接节点 1 和 8 的所有路径的长度均为奇数。

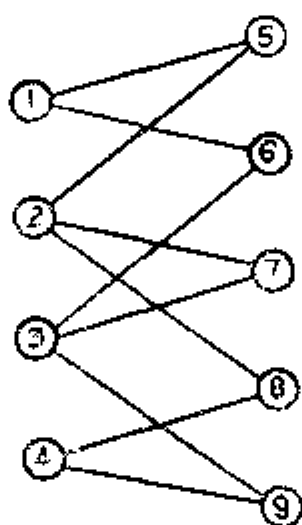


图 1.17 二分图

下面给出二分图的完备特性。但在证明这个结果以前，我们还需要增加一个术语。

定义1.23：距离。

对于一连通图 G，其中两个节点 i 和 j 之间的距离定义为连接这两点之间的最短路径的长度，用 $d(i,j)$ 表示。

例如图 1.17 中，我们得到 $d(1,4)=4$ 和 $d(1,6)=1$。

定理1.12：一个非零图当且仅当它或者不具有回路或者它的每一个回路的长度均为偶数时，则该图为二分图。

证明：该定理的必要性是显而易见的。现证明定理的充分性。让我们假设图 $G(V,E)$ 具有这样的特性。我们再进一步假设 G 是连通的，这并不丧失其普遍性，因为如果不是这样，我们可以对 G 的片分开考虑。我们还能假设 G 不含有自环。

设 i 是 G 的一个节点，V_2 是由 G 的从 i（节点 i 在 V_2 中）到 G 的各节点的距离是偶数的所有节点组成的集合。显然，当 $V_1 = V - V_2$ 时，从 G 中的 i 到 V_1 中的每个节点的距离都是奇数。证明 G 中的每条边 (u,v) 是连接 V_2 中的节点 u 和 V_1 中的节点 v 之间。我们首先假设 u 和 v 都在 V_2 中，又设 P_u 和 P^*_v 分别是从 i 到 u 和 v 的长度为偶数的最短路径。从节点 u 和 v 开始，设 j 是 P_u 和 P^*_v 中第一个公共节点，则距离 $d(j,u)$ 和 $d(j,v)$ 二者或均为偶数或均为奇数。这将表示由边 (u,v) 和从 j 到 u 及从 j 到 v 的最短路径形成的和图是长度为奇数的回路。这将与我们提出的 G 的每个回路长度为偶数的假设相矛盾。

同样，我们能够证明在 V_1 中没有两个节点是用一条边相连接的。因此 G 是二分图。定理证毕。

§ 5. 有向图

在许多应用中，对一个图的每条边需要给予有关的取向或方向。在有些情况下，边的取向在用图描述的系统显示一些单向特性的意义上是"真"的方向。例如，一个城市的单向通行道路的方向和描述通信网络单向特性的方向是物理系统的真实方向。在另一些情况下，用作为一个复杂参考系统的替代方向，边的取向是一"伪"方向。例如，在电网络理论中，图中边的取向是任意指定的代表支路电流和电压的参考方向。本节中，我们将介绍有关有向图的基本概念和术语。由于许多概念与无向图正好是相类似的。这部分内容我

们将仅作简要地介绍，而那些与无向图不相类似的术语，我们将详细地讨论。

5.1 基本概念

如同无向图一样，有向图将以抽象的形式正式表述如下。

定义1.24：抽象有向图。

一个抽象有向图 $G_d(V,E)$ 或简称为一有向图 G_d 由一个叫做节点元素的集合 V 和一个形式为(i,j)的叫做 G_d 的有向边（或简称为边）的集合 E 组成。其中 i 和 j 在 V 中，节点 i 叫做起始节点，节点 j 叫做终止节点，i，j 合在一起叫做(i,j)的端点。

因此，无向图和有向图之间的唯一区别是有向图的边是节点的有序偶，而无向图的边则不是。注意，对有向图和无向图二者我们都应用边这个术语，这不会产生任何混淆。

我们说边(i,j)的方向或取向是从 G_d 中的节点 i 到节点 j，同时(i,j)与节点 i 和 j 相关联，或者说边(i,j)的方向为离开 i 或从 i 出发指向 j 或终止于 j。一个有向图也能够用一几何图形等价地描述。图中节点用小圈或点表示，其中任意两点 i 和 j 当且仅当边(i,j)在 E 中时，用带有箭头的连续曲线或直线从 i 连接到 j。

我们引伸有向边的概念，允许几个不同的边具有相同的起始节点和终止节点，它们叫做 G_d 的平行边。这些平行边的方向是从节点 i 指向节点 j，用符号 $(i,j)_1$，$(i,j)_2$，……$(i,j)_k$，表示。其中 $k\geq 2$。如果没有特别指定，边(i,j)表示 G_d 中从 i 到 j 的平行边中的任意一条，否则便是确定的一条。我们也容许边具有相同的端点，它们叫做 G_d 的自环。

举例说明，考虑有向图 $G_d(V,E)$，其中

$V=\{1,2,3,4,5,6,7\}$

$E=\{(1,1),(1,2),(1,4),(4,4),(4,4)_2,(4,3),(2,3)_1,(2,3)_2,(6,7)_1,(6,7)_2,(7,6)\}$

相应的几何图形如图 1.18 所示。其中在节点 1 上具有一个自环、有两条平行边，其方向从节点 2 到节点 3 和从节点 6 到节点 7。我们强调在有向图中，(i,j)中的顺序是很重要的，实际上我们不认为(i,j)和(j,i)是同一条边。

术语子图，局部子图，秩，零度，子图的补图等等以及在 § 3 中略述的图的运算，都能够对G_d进行类似的定义。其中唯一的区别是用G_d代替G。例如图 1.18 中由节点集V_s {1, 2, 3, 6, 7}定义的局部子图$G_d[V_s]$表示在图 1.19 中。

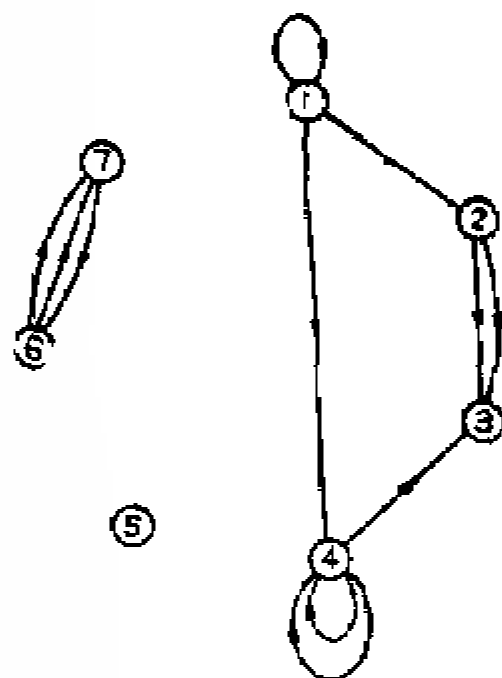


图 1.18 有向图的几何图形

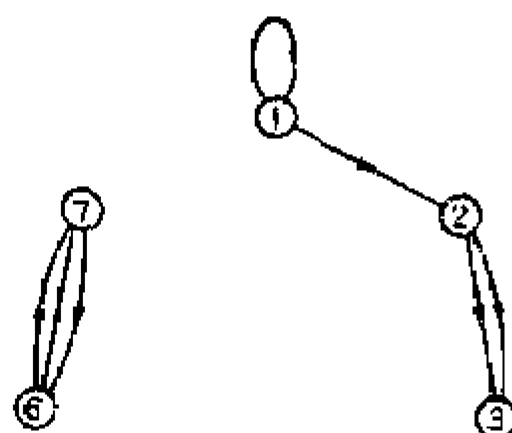


图 1.19 图1.18有向图的局部子图

定义 1.25：伴随无向图，

每一个有向图G_d具有一个伴随无向图G_u，其节点和边的集合除了G_d的边(有序对(i, j))的方向以外，其余均和G_d一样。

更直观地说，这意味着G_u是从G_d中去掉箭头后得到的图。例如，图 1.3 是图 1.18 的伴随无向图。由于同样原因，有时需要将一无向图变成一有向图。我们用具有相同端点但方向相反的一对边代替图的一条边，然后再对其它各条边重复以上过程。例如图1.20中G_d是按照刚才略述的步骤从G中得到的有向图。

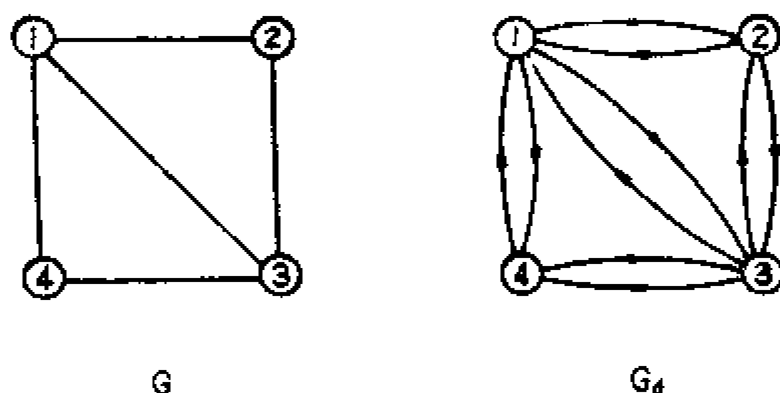


图 1.20 按照重复步骤将一无向图变换成有向图

定义 1.26：同构。

两个有向图，当(1)它们的伴随无向图是同构的，(2)它们对应边的方向保持(1)的对应关系，则此二有向图称为是同构的。

换言之，若G_d和G_d'是两个同构的具有n个节点的有向图，则它们的节点我们能够分别标记为 1，2，…，n和 1′，2′，…，n′。使对任何的 i 和 j，当且仅当边(i′，j′)在G_d'中时，则边(i，j)一定在G_d中，如果它们存在平行边的话也包括在内。作为一个实例，考虑如图 1.21 所示的有向图。容易证明G_d和G_d'是同构的，而G_d和G_d''虽然它们的伴随无向图是同构的，但它们并不同构。

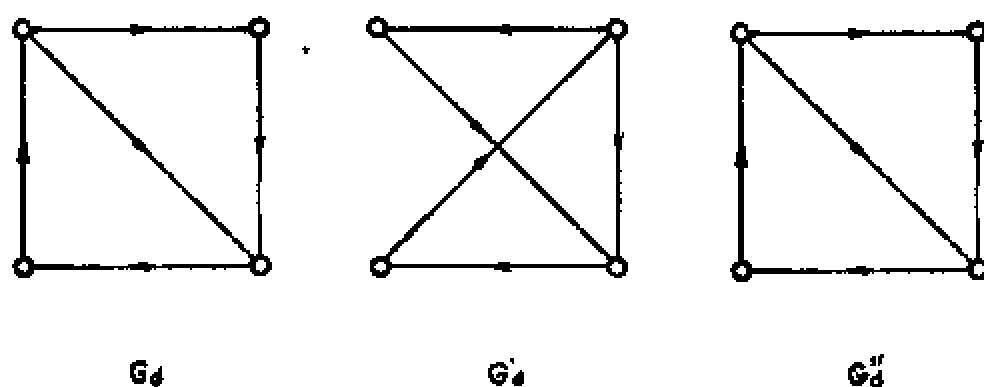


图 1.21 同构和不同构有向图的实例

当有向图G_d的伴随无向图G_u是连通图时，则G_d叫做连通图。对于G_d有关平面图，可分图，不可分图或圈连通图同样适用。当G_d的一个子图G_s的伴随无向图是G_u的一个边序列时，则G_s是G_d的一个边序列。类似地，在G_d中我们定义边列、路径、回路和片。在G_d中

我们还谈到回路边、非回路边、割点、块、边序列的长度和 G_d 中两个节点之间的距离，这些术语对G_d来说另有规定。

例如在图 1.22 中，边集合 $E_s = e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_4e_8e_2$ 是一个长度为10的边序列。如果我们从 E_s 中删除最后三条边，我们得到一个边列 $E = e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7$，从 E 中移去边$e_5$、$e_6$和$e_7$后，该边列成为一个路径P，即$P = e_1e_2e_3e_4$。$G_d$含有一个片，节点 3 和 6 是割点。$G_d$的块是$e_1e_2e_3e_4e_5e_6e_7e_8$，$e_9$ 和 e_{10}。节点 1 和 6 之间的距离为 2。最后，子图$e_1e_3e_4e_5e_6$是长度为 5 的回路。G_d的所有边除了e_9以外均是回路边，而e_9是唯一的非回路边。

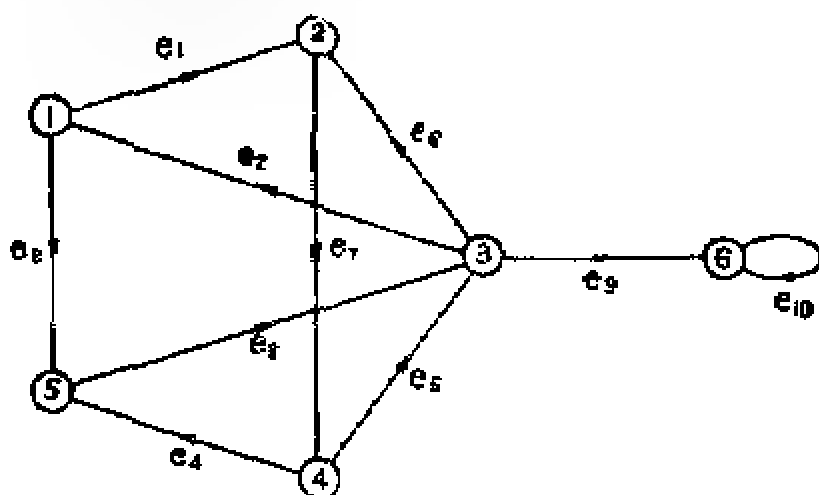


图 1.22 说明目的的有向图

5.2 有向边序列

对有向图G_d除了定义边序列、边列、路径和回路这些术语外，我们还需要定义G_d的子图的专用子集称为有向边序列、有向边列、有向路径和有向回路。

定义 1.27：有向边序列。

对于有向图 G_d，其中长度为$k-1$的有向边序列是这样一个边序列，其边沿着该边序列的形式为

$$(i_1, i_2), (i_2, i_3), \cdots\cdots(i_{k-1}, i_k), \qquad (1.9)$$

其中$k \geq 2$。当$i_1 = i_k$时，则该有向边序列叫做闭有向边序列，否则

叫做开有向边序列。在一开有向边序列中，节点i_1叫做该有向边序列的起始节点，而节点i_k叫做终止节点。

直观地说，一有向边序列只不过是所有边在相同方向取向的边序列。例如图1.22所示的边序列

(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 3),

(3, 2), (2, 4), (4, 3)

组成一个起始节点为1终止节点为3的开有向边序列。我们也称有向边序列(1.9)是从i_1指向i_k。在上述例子中，有向边序列方向是从节点1到节点3。

定义很清楚地说明，一有向边序列也是一边序列。但是，反过来说通常是不成立的。例如，在图1.22中边e_1，e_5和e_7的序列形成一闭边序列，但它因没有一致的方向而不能组成一闭有向边序列。

定义 1.28：有向边列。

若所有边在有向边序列中是不重复出现的，则该有向边序列叫做有向边列。

象路径和回路的概念一样，如果我们还要求有向边列中除了起始和终止节点以外，其它所有的节点是不重复的，我们得到有向路径和有向回路的概念。

定义 1.29：有向路径。

如式(1.9)所示的开有向边列，其中所有节点i_1、i_2，···，i_k均不重复，则叫做长度为k−1的有向路径。

定义 1.30：有向回路。

如式(1.9)所示的闭有向边列，在$i_1=i_k$的情况下，其它所有节点i_1，i_2，···，i_{k-1}均不重复，*则叫做长度为k−1的有向回路。*

因此，一有向图的自环也是长度为1的有向回路。如在定义1.7中一样，定义一孤立节点为一长度为零的有向路径是合适的。除非孤立节点另有明确陈述，我们将用这一假设。

作为一个例子，考虑如图1.22所示的有向图G_4，该边序列

(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 1), (1, 5), (5, 3),

(3, 6), (6, 6)

是一长度为 8 的开有向边列，其方向从节点 1 到节点 6。以下开有向边列：

(1, 2), (2, 4), (4, 3), (3, 6)

是长度为 4 的有向路径。而以下闭有向边列：

(1, 2), (2, 4), (4, 5), (5, 3), (3, 1)

是一长度为 5 的有向回路。显然，这些边列也是该有向图的子图。

5.3 出度和入度

有向图的局部结构用其节点的度数描绘。

定义 1.31：出度和入度。

对于一有向图G_d，以节点 i 为起始节点的G_d 的边数 $d^+(i)$叫做G_d中节点i的出度，而以节点i为终端节点的G_d 的边数 $d^-(i)$叫做G_d中节点 i 的入度。

因此，对G_d 的每个节点定义有两个数。此二数有时也叫做节点的正度和负度。若$d(i)$表示G_d 中与节点 i 相关联的边数，则

$$d(i) = d^+(i) + d^-(i) \tag{1.10}$$

由于每条边是从一个节点出发而终止于另一节点，显然G_d的边数 b 与其节点的度数有关，其关系用下列等式表示：

$$b = \sum_i d^+(i) = \sum_i d^-(i) \tag{1.11}$$

式中是对G_d中所有的 i 点求和。

例如，考虑图 1.22 的有向图G_d。其中我们有

$d^+(3) = 3$，$d^-(3) = 2$，$d^+(6) = 1$ 和 $d^-(6) = 2$。应用式(1.11)，我们得到

$b = 2+1+3+2+1+1 = 1+2+2+1+2+2 = 10$

定义 1.32：正则有向图。

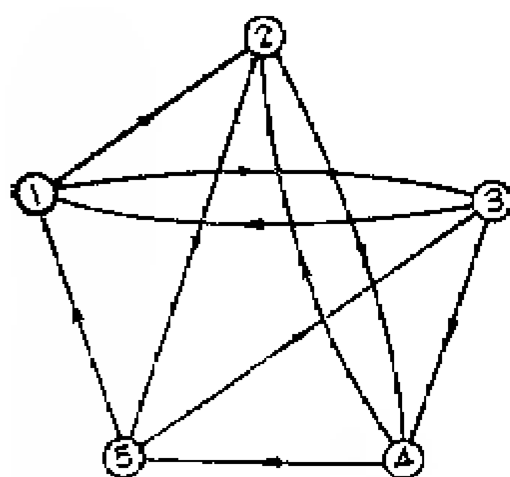


图 1.23 度数为 2 的正则有向图

对于一有向图中每个节点i，若 $d^+(i)=d^-(i)=k$，则该有向图叫做度数为k的正则有向图。

因此，一有向回路是度数为1的连通正则有向图。显然，若G_d是度数为k的正则有向图，则它的伴随无向图G_u必定是度数为2 k的正则无向图。度数为 2 的正则有向图的一个实例如图 1.23 所示。

5.4 强连通有向图

另一个术语强连通，对于描绘某些结构下有向图的特征是有用的。它没有相应的无向图，其定义如下所述。

定义 1.33：强连通。

一有向图，当任一对相异节点i和j之间不仅从i到j，而且从j到i都存在一有向路径时，则该有向图叫做强连通图。

显然，强连通有向图含有连通有向图的意思。但是，反过来说通常是不成立的。例如图 1.24 是一强连通有向图，而图 1.25 是一连通有向图但不是强连通有向图。从这两个例子，我们也可以断定：

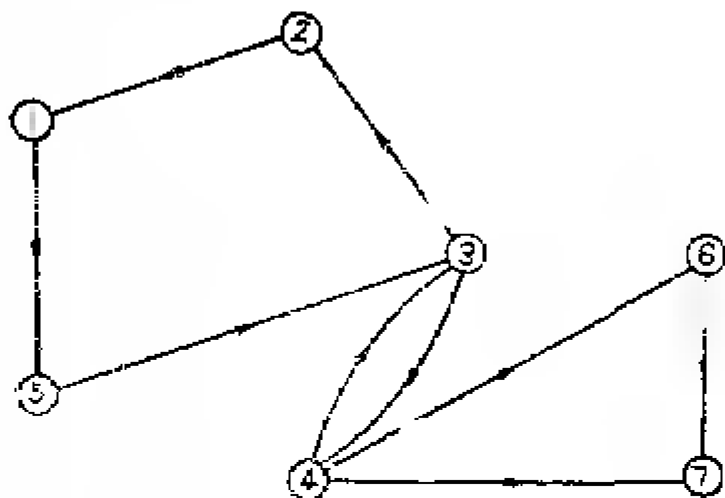


图 1.24 强连通有向图

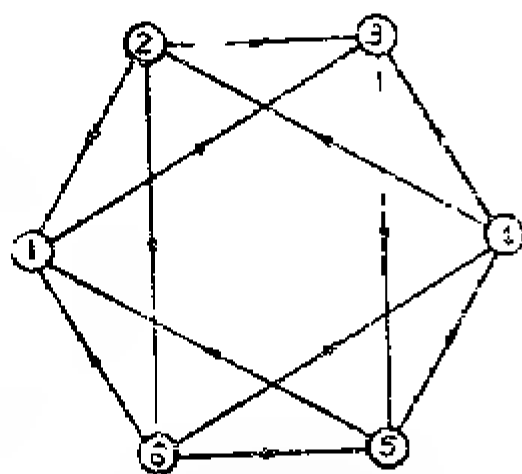


图 1.25 连通但不是强连通有向图

强连通不取决于有向图所具有的边数，而是取决于边的重要的位置。

定义 1.34：强片

一有向图的强片或强连通片是一包含最大边数的强连通子图。一个孤立节点也是一强片

在图 1.25 中，局部子图 $G_d[2,4,6]$ 和 $G_d[1,3,5]$ 是 G_d 的强片

定理 1.13： 对于一有向图成为强连通图的必要而充分的条件是存在一包含该图所有节点的闭有向边序列。

这个定理的证明留作练习（习题 1.25）在此定理中，如果我们用边代替节点，我们发现此定理还是有效的。它的证明留作为一个习题（习题 1.26）。

5.5 重要的几类有向图

以上我们已经看到，图和有向图的分类，以是否为平面图和是否为可分图为基础。下面我们将介绍其它两种有用的分类法。

定义1.35：对称有向图。

一有向图 G_d 如果它的任一条边 (i,j) 与边 (j,i) 成对，当存在平行边时每个方向的平行边数相同，则 G_d 叫做对称有向图。

这将意味着，在 G_d 中如果有 k 条从 i 到 j 的有向边，那么也有 k 条从 j 到 i 的有向边。我们注意到，在一个节点上的自环数不影响它的对称性。显然，若 G_d 是对称的，则某一节点的出度必定等于它的入度。然而，反过来通常是不成立的。例如图 1.23 是一正则有向图但它不是对称有向图。图 1.26 是对称有向图的一个例子。

定义1.36：无圈有向图。

一有向图若不包含有向回路，则该有向图叫做无圈有向图。

图 1.27 是无圈有向图的一个例子。显然，一无圈有向图不能包含有任何自环。

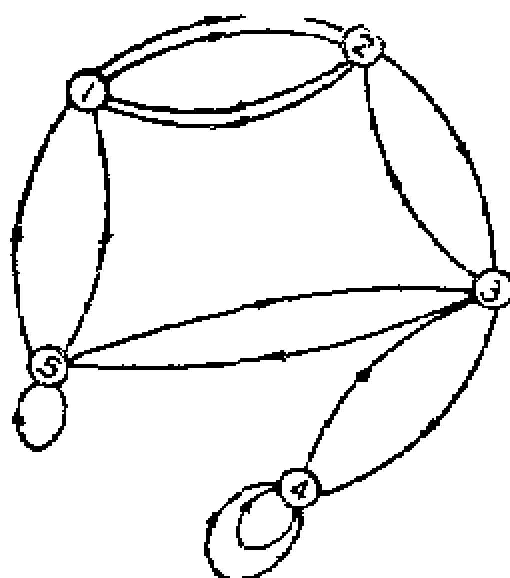


图 1.26 对称有向图

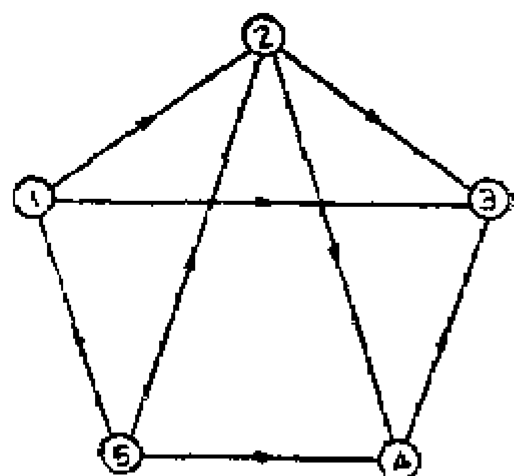


图 1.27 无圈有向图

定理1.4：一无圈有向图至少含有一个出度为零的节点和一个入度为零的节点。

证明：设G_d是一无圈有向图，又设P是从i到j之间具有最大长度的有向路径，显然，G_d中不能含有从j出发或终止于i的任何边，否则将有一有向回路或这一有向路径不是最大长度，于是必有$d^-(i)=0$和$d^+(j)=0$。因此，定理证毕。

§ 6. 混 合 图

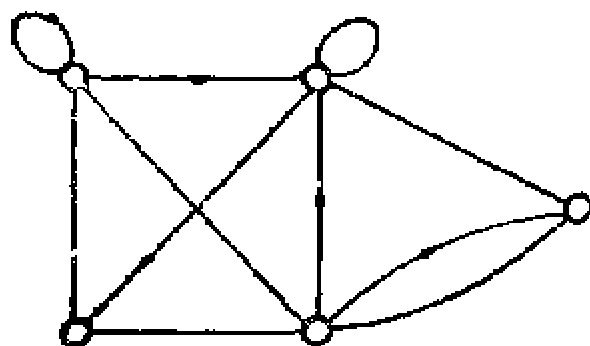


图 1.28 混合图

在许多情况下，很自然的要考虑既含有有向边又含有无向边的图，它们称为混合图。在第4章中将讨论线性系统的拓扑分析，在那里我们将广泛地应用这个概念。作为一个例子，具有单向和双向街道的城市地图，可以用混合图来描绘。

其中街道是边，街道的交叉点是节点。图 1.28 是混合图的一个例子。

§7. 结 束 语

本章介绍了有关无向图和有向图的基本定义和定理，并且讨论了这些基本术语和在后续分析中所必须的符号。因此，本章有了描述有向图和无向图的基本专业用语。但是我们必须从一系列的定义开始，而目前我们对此还无能为力。我们还要说几句，我们减少定义的数量是可能的，但是另一方面每个定理却变得复杂得多，因此几乎不能理解。

习 题

1.1 证明某图的子图 G_s 当且仅当它是度数为 2 的连通正则图时，G_s 是一回路。

1.2 设 G_s 是某连通图 G 的子图，证明子图 $\overline{G}_s$ 不可能具有比 G_s 中的节点数更多的连通片。

1.3 证明定理1.1。

1.4 设 P' 和 P'' 是连接节点 i 和 j 之间两条不同的路径。证明在 $P' \cup P''$ 中存在一回路。存在包含节点 i 或 j 或二者都在内的回路吗?

1.5 证明定理1.3。

1.6 证明具有 n 个节点，不包含有平行边和自环且边数大于 $\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ 的图总是一连通图。

1.7 证明§2.3 中定义的二元关系 R 是一等价关系。

1.8 证明定理1.5。

1.9 证明一路径的边数 b 和节点数 n 之间的关系为：$b=n-1$。

1.10 证明一个图若将其中一条边分成两条边串联或将两条串联边合并成一条边，其零度是不变量。

1.11 证明定理1.6。

1.12 设G是具有n个节点和b条边的平面图。证明如果它的每个区域的边界是一长度为k的回路时，则

$$b \leq k(n-2)/(k-2) \tag{1.12}$$

1.13 证明一个图当且仅当它的每个块是平面图时，则该图是一平面图。

1.14 证明每一个至少具有4个节点且不包含平行边和自环的平面图，至少具有4个节点的度数不超过5。

1.15 证明定理1.9。

1.16 证明至少含有两条边的不可分图的每个节点的度数至少为2。

1.17 证明推论1.4。

1.18 证明图G的每一个不可分子图必须完全包含在G的一个片中的陈述是正确的。

1.19 证明推论1.5。

1.20 证明一连通可分图分解成块是唯一的，你能将此结论推广到任意一个可分图吗？

1.21 设G是至少具有三个节点的连通图。证明当且仅当对G的每三个相异节点，总存在一条路径连接其中任意二点同时包含第三点时，G是一个块。

1.22 在习题1.21中，如果最后一句中"同时包含第三点"改成"不包含第三点"，陈述还正确吗？你能提出其它等价的陈述吗？如果能，给出大于4个节点的情况。

1.23 证明在一不含有自环的特定的连通图中至少存在两个不是割点的节点。这对任意一个连通图也正确吗？

1.24 证明一特定的不可分图至少含有一个回路。

1.25 证明定理1.13。

1.26 证明一有向图当且仅当存在一闭有向边序列且该边序列包含所有边至少一次，该图是强连通图。

1.27 设 E' 和 E'' 是两个至少含有一个公共节点的有向边序列。证明在 $E'\cup E''$ 中存在一包含 $E'\cup E''$ 的所有边的有向边序列。$E'\cup E''$是强连通吗？

1.28 证明图G的秩和零度分别等于组成它的所有片的秩和零度的和。

1.29 如果图G是可分图，证明当G分解成片时，其秩和零度值不变。

1.30 若一有向图的所有节点的入度和出度都是正值，则每一节点至少包含在一个有向回路中，这陈述成立吗？如果成立，证明之。

1.31 对一具有n个节点的连通图，证明它必须至少含有n 1条条。

1.32 证明一连通图的所有边能够包含在一个边序列中，给出一种算法构成这样一个边序列。

1.33 证明在图G中若确实只有两个节点i和j的度数为奇数，则连通图G中必存在一连接节点i和j的路径。

1.34 证明度数为3的所有正则图都具有偶数节点。

1.35 证明对图G(V,E)，当且仅当把V任意分割成两个子集 V_1和V_2，都存在一条边连接 V_1 中的一个节点和 V_2 中的一个节点时，图G是连通图。

1.36 在图1.29的三个端边的两个边中插入节点，验证一连通图的所有最长路径不必具有一个公共节点(WALTHER[1969])。

1.37 对比习题1.36，证明一连通图的任意两条最长路径具有一个公共节点。

1.38 证明一集合V到它自身上的一一对应是由在V上度数为1的正则有向图定义的。

1.39 你能将公式1.2引伸到具有自环的图吗？

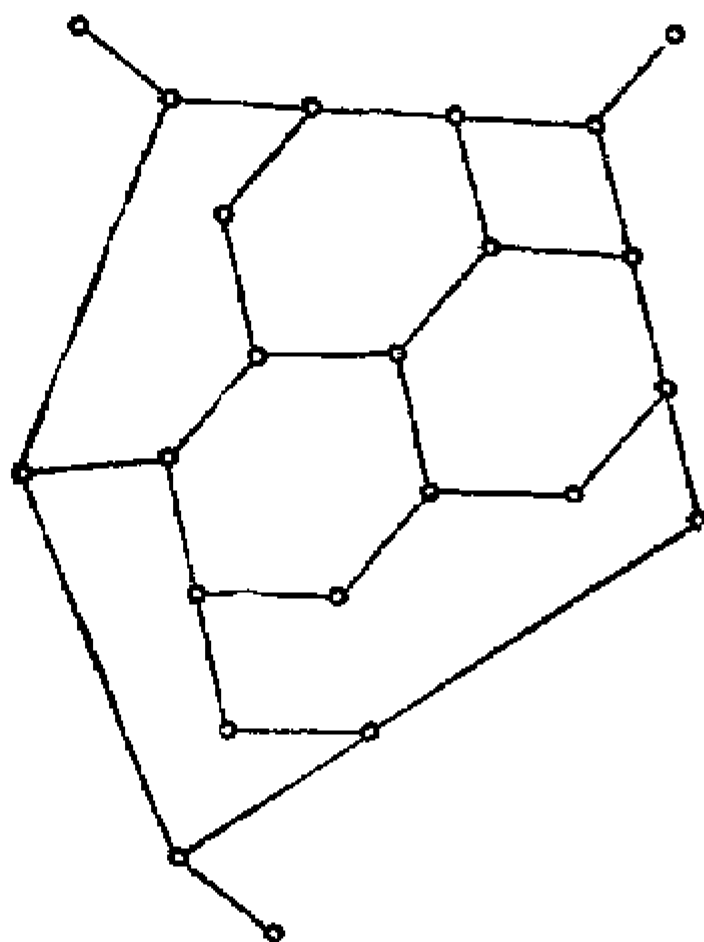


图 1.29 说明最长路径的图

1.40 图1.29中哪两个节点间具有最长距离？

1.41 应用图1.13构成一平面图，使边 e_4，e_5 和 e_7 是外部区域的边界。

1.42 证明一回路中的路径的补也是一路径。

1.43 对一给定的图G，G的块图 B(G)是这样一个图：它的节点对应于G的块，而当对应的块包含一个公共割点时，这两个节点由一条边相连接。证明当且仅当B的一个块中每一对节点都有一条边相连接即B的每个块是完全图时，则图B是某一图的块图(HARARY[1969])。

第二章　电网络理论基础

图论在物理学中最主要的应用之一是它在电网络理论中的应用。本章的主要目的是以图的理论为基础对电网络理论的研究提供一个严密的数学根据。除了电网络问题以外，大部分讨论可普遍地适用于一般的线性系统(例如，见TRENT[1955])。

从物理的观点来看，网络问题研究各个物理元素相互连接的一个系统，根据元素的特性以及这些元素在系统中相互联系的方式预测系统所发生的作用。一个网络的几何特征与它各支路的组成元素无关，因此在拓扑学的讨论中通常是用一个线段来代替每一支路。换言之，从抽象的观点来看，至少在某些范围，任何一个集总参数电网络能够用图来描绘，边表示电的组成部份，边的权描述该组成部分的要素，图被认为是物理网络的一个模型。由于我们讨论和分析的网络是由诸如电感线圈、电容器、电阻器和电源之类的理想化物理元件相互联系组成的模型，我们不能总是假设它们的解一定存在而且唯一；因此，研究一个电网络能够获得唯一解的条件是很重要的。

KIRCHHOFF[1847]首先对电网络问题进行了全面的研究，并对电阻性网络证明了解的存在。但MAXWELL[1892]指出基尔霍夫的系统阐述忽略了位的概念。他弥补了这一忽略并得出了两个对解决网络问题非常有效的方法，现在称为麦克斯韦的网孔和节点对解法。后者产生了众所周知的节点导纳矩阵，它将是第四章中讨论的拓扑分析的出发点。可是，在麦克斯韦的公式中，必须选择一个适当的回路集或节点对集作为独立变量，还要对网络中的每条支路指定一方向。因此，似乎在网络各支路中感生的支路电压和电流应该依赖于回路或节点对的选择以及支路方向的指定。这样一种依赖关系与电网络的状态客观存在相矛盾。因此有必要说明这些依赖实

际上并不存在。

在本章中我们将证明网络分析的那些许多熟悉的陈述与步骤，并对电网络理论的研究提供一个严密的数学依据。将表明电网络问题的很多不变量特性都能够从纯图论的考虑得到。因此这些性质不仅对电网络适用，而且对其它系统也适用。

§ 1. 矩阵和有向图

在某些应用场合，边的方向在用有向图描绘的系统中显示一些单向特性方面是"真"方向，如后继两章中介绍的Coates图、Mason图和伴随有向图中的方向。另一方面，在电网络理论中，这方向是用来代替复杂参考系统的"伪方向"。

在本章中，符号n，b和c将分别用来表示有向图G的节点数、边数和片数。我们还用r和m分别表示G的秩和零度，这里$r=n-c$和$m=b-n+c$。为了方便起见，假设G的节点编号为1，2，…，n，同时边用e_1，e_2，…，e_b表示。

1.1 节点-边关联矩阵

一个不含有自环的有向图完全以它的节点-边关联矩阵为特征。

定义2.1：节点-边关联矩阵(关联矩阵)。

一有向图G的节点-边关联矩阵或简称为关联矩阵是一n×b阶的矩阵，用符号A_a表示，如$A_a=[a_{ij}]$，则

$a_{ij}=1$，如果边e_j与节点i相关联且其方向是从节点i出发；

$a_{ij}=-1$，如果边e_j与节点i相关联且其方向是指向节点i；

$a_{ij}=0$，如果边e_j与节点i不相关联。

矩阵A_a是由KIRCHHOFF1847年首先应用的，它是基尔霍夫电流方程的系数矩阵。因而这个矩阵的特性相当重要。注意，在定

义A_a中我们没有考虑含有自环的有向图。含有自环的有向图能够考虑，但我们没有发现它的必要性。没有此需要，按上述规律，我们可以在A_a中定义一零列对应于自环，因为按这个规律在与自环相关联的对应节点的行中需要1和-1两项。

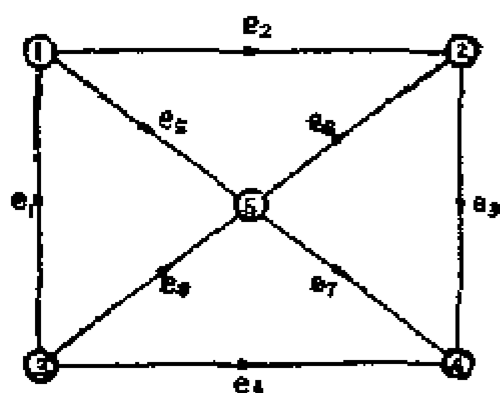


图 2.1 说明关联矩阵的有向图

举例说明，考虑如图2.1所示的有向图G。G的关联矩阵由下式给出

		e_1	e_2	e_3	e_4	e_5	e_6	e_7	e_8
	1	-1	1	0	0	1	0	0	0
	2	0	1	1	0	0	-1	0	0
A_a	3	1	0	0	1	0	0	0	1
	4	0	0	-1	-1	0	0	1	0
	5	0	0	0	0	1	1	1	1

(2.1)

很明显，A_a的每一列只含有两个非零元素，一个1和一个-1，因此A_a所有行的和是一全零行，换言之，A_a不是所有的行都是线性独立的。

引理2.1：对一连通有向图G，A_a的任意k行($k<n$)的和至少含有一个非零元素。

证明：在A_a的任意k行的集合中，至少有一列只含有一个非零元素。因为如果不然的话，就不存在将G的k个节点连接到其余的$(n-k)$个节点集合的边，这与G是连通的假设相矛盾。因此，A_a的任意k行的和至少含有一个非零元素。

定理2.1：一有向图G的关联矩阵的秩等于G的秩。

证明：我们仅将证明G是连通图即$c=1$这种情况，另一种情况留作练习(习题2.1)。设X是实数域上一n矢量。若A_a'是G的关联

矩阵的转置矩阵，则根据引理2.1，线性方程组(习题2.60)

$$A_a'X=O \tag{2.2}$$

具有一完备解βX，这里β是任意实常数，X仅由1组成。因此，根据矩阵代数A_a'的任意(n-1)列是线性独立的。因为如果不然的话，我们就能够找到一个非零解X，它在对应于A_a'的所有列中被选择的(n-1)列之外的那一列的行上含有一个零，而这是矛盾的。由于A_a'不是所有列都是线性独立的，于是A_a的秩是(n-1)。定理证毕。

这个特性是由KIRCHHOFF1847年首先提出的。为了方便起见，我们将用符号A表示删除A_a的任意一行后得到的一连通有向图的A_a的子矩阵。该矩阵A叫做连通有向图的基本关联矩阵。对应于A_a删除的那一行的节点，因为它对应于相应的电网络中参考点的电位，所以称为有向图的参考节点。

定义2.2：树。

有向(或无向)图的生成子图当且仅当它是连通的同时不包含有回路时叫做树。

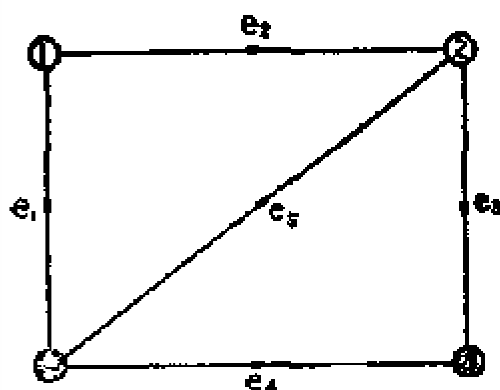


图 2.2 用来说明树的一有向图

此定义与常规的数学定义略有不同，其中“生成”这个词通常是省略的。作为概念我们还是需要选用生成树这个术语。然而，在绝大多数实际应用中，这个术语是依据定义2.2。

举例说明，考虑如图2.2所示的有向图G。G的树的集合在图2.3中给出。如果G_u是G的伴随无向图，那么图2.3中给出的树的集合去掉方向就是G_u的树的集合。很明显，一连通图的树具有r(n—1)条边。

树的概念是非常重要的，因为网络的一些特性与树有关。例如，基尔霍夫电压方程的独立个数，状态方程的数目，选择独立方程的

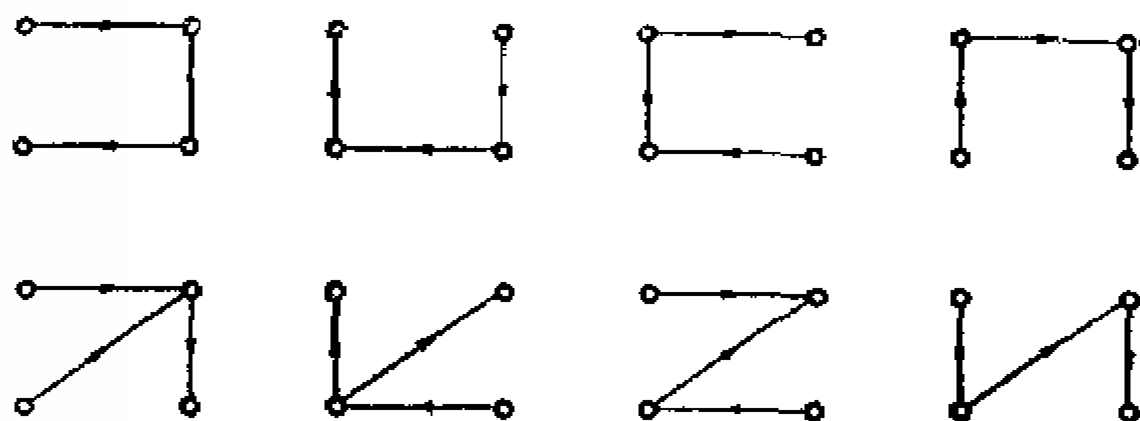


图 2.3 图2.2有向图的树

方法以及网络函数的拓扑公式，都可以用树来说明。

引理2.2：与G中某一回路的边相对应的 A 的列是线性不独立的。

证明：设L是G中长度为k的一个回路，并设M是对应于L的边的A的子矩阵。如果有必要，重新对G标号使M的列和前置行（对应L中的节点）分别按边和节点在L中出现的顺序排列。在M中不难看到，如果G的参考节点包含在L中，那么M中非零行的数目为(k－1)。因此M的列是线性不独立的。另一方面，如果参考节点不包含在L中，那么M中非零行的数目为k。在这种情况下，由于每一列包含 1 和－1 两个非零项，M的秩不超过k－1。换言之，M的列是线性不独立的。引理证毕。

定义2.3：树支。

树的一条边叫做一条树支。

定义2.4：大子矩阵。

对于一阶数为p×q，秩为p的任意矩阵F，其大子矩阵是一非奇异的p阶子矩阵。

定理2.2：一连通有向图的基本关联矩阵A的一方子矩阵，当且仅当该子矩阵的列对应于有向图中某树的树支时，则该子矩阵是

一大子矩阵。

证明：设M是所说的A的子矩阵。若M的列对应某树 t的树支，则根据定理 2.1，由于M是t的基本关联矩阵，所以M是非奇异的。反过来说，如果M是非奇异的，那么根据引理 2.2，与M 的列相对应的子图不能包含有任何回路，由于子图具有 n－1 条边同时不包含有回路，所以该子图必须是一棵树(习题 2.2)。

推论2.1： 一有向图G的树和G的某一基本关联矩阵的大子矩阵二者之间存在一一对应关系。

举例说明，考虑如图 2.2 所示的有向图G，以节点 4 为参考节点的基本关联矩阵A由下式给出

$$A=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.3}$$

容易检验只有A的大子矩阵是与图2.3中所给出的那些树相对应的。

1.2 回路-边关联矩阵

由于考虑的是有向图，对回路定向是很自然的。

定义2.5：有向回路。

按照节点沿回路循行的顺序定向的有向图的回路叫做有向回路。

例如，在图 2.1 中由边e_1，e_2，e_3 和 e_4 组成的回路能够定向为(1，2，4，3)或(1，3，4，2)。我们还可以用一箭头形象化地代表这方向。如果边的节点在该边的有序对描述中和回路的有序节点描述中具有相同的顺序，那么我们将说回路边的方向与回路的方向一致。否则它们方向相反。这从图上一看便知。例如，边(1，2)与回路(1，2，4，3)一致，而边(3，4)与回路相反。注意，一有向图的回路不一定必须是有向回路。

定义2.6：回路-边关联矩阵(回路矩阵)。

一有向图G的回路-边关联矩阵或简称为回路矩阵，用符号 B_a 表示，它是一p×b阶矩阵，这里p是G中的回路数。设 $B_a=[b_{ij}]$，则

$b_{ij}=1$，如果边e_j在回路i中同时回路的方向和边的方向一致；

$b_{ij}=-1$，如果边e_j在回路i中同时回路的方向和边的方向相反；

$b_{ij}=0$，如果边e_j不在回路i中

作为一例，考虑如图2.4所示有向图G中所有可能存在的回路集合。矩阵B_a由下式给出

$$B_a = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.4}$$

注意在 B_a 中不包括仅仅用改变方向得到的回路，其原因是改变方向仅仅改变 B_a 中某一行的符号。B_a 还是基尔霍夫电压方程的系数矩阵。

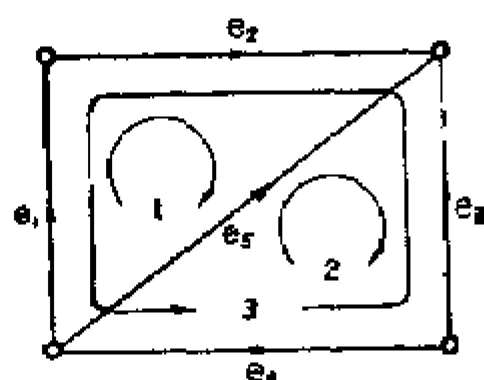


图 2.4 说明回路矩阵的有向图

定义 2.7：补树

一有向或无向图中某树的补叫做补树。

定义 2.8：弦(连支)。

补树中的边称为弦(连支)。

因此，一连通图的某一补树含有m(=b－n+1)条弦。

由于连接某一树中任意两个节点之间存在一条唯一的路径，对树增加一条弦在所得的图中形成唯一的回路。因此，补树中的每条

弦以唯一的方式在有向图中限定一个回路（对于所选择的树）。

定义 2.9：基本回路(f-回路)。

零度为m的一连通有向图对于某树 t 的基本回路或简称为f一回路是m个回路，每一个基本回路是由一条弦和连接 t 中弦的两个端点的唯一的树的路径形成。f 回路的方向选择为限定的弦的方向为宜。

与f 回路集合相对应的 B_a 的子矩阵 B_f 具有很特殊的形式。例如，如果f 回路任意编号如 1, 2, ···, m，同时出现在回路之中的弦编号为边 e_i，其中 i＝1, 2, ···, m，那么

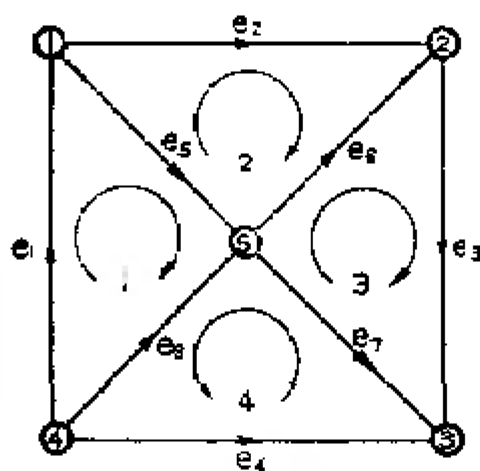


图 2.5 作为f 回路的一例

$$B_f = [U_m \quad B_{12}] \qquad (2.5)$$

式中 U_m 是m阶的单位矩阵。作为一例，考虑如图 2.1 所示的有向图。如果我们选择由边 e_5，e_6，e_7 和 e_8 组成的树，f 回路表示在图 2.5 中。这些f 回路的回路矩阵由下式给出

$$B_f = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\ \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \end{array} \qquad (2.6)$$

定义 2.10：基本回路矩阵(f-回路矩阵)。

对于一个零度为m的连通有向图G，与G中m个f-回路集合相对应的G的回路矩阵的子矩阵叫做G的基本回路矩阵或简称为G的f 回路矩阵。f 回路矩阵用符号 B_f 表示。

显然矩阵 B_f 的秩为 m。因此，回路矩阵 B_a 具有的秩至少为

m。证明m也是 B_a 秩的上界，我们需要下列定理。除了确定 B_a 的秩以外，这个结果从本章节其余部分可明显看出，它在网络理论中是非常重要的。这个结果是由 VEBEEN 在 1931 年首先得出的。

定理 2.3. 如果矩阵 A_a 的列和一有向图的 B_a 取相同的边的排列次序，则

$$A_a B_a' = 0 \text{ 和 } B_a A_a' = 0 \tag{2.7}$$

上式中撇号表示矩阵的转置。

证明：我们将只证明第一个恒等式，第二个恒等式可以方便地对第一个恒等式的两边进行转置变换直接取得。

考虑 A_a 的第 i 行和 B_a' 的第 j 列即 B_a 的第 j 行。当且仅当其对应边在节点 i 处是关联的，同时也包含在回路 j 中，则与 A_a 的第 i 行和 B_a 的第 j 行中位置相对应的这些项为非零。如果节点 i 不包含在回路 j 中，则不存在这样的边同时乘积为零，给出需要的结果。如果回路 j 包含节点 i，回路 j 中正好有两条边在节点 i 处相关联，即在 A_a 的第 i 行中只有两个非零项，则 A_a 具有这样的特性，与 B_a 的第 j 行相对应的项也是非零。如果两条边关联都是指向节点 i 或从节点 i 出发，则在 A_a 的第 i 行中的对应项将具有相同的符号，同时在 B_a 的第 j 行中的对应项具有相反的符号，因此 A_a 的第 i 行与 B_a 的第 j 行的乘积将是零。类似地，我们能够证明，如果其中一条边关联是指向节点 i 而另一条边是从节点 i 出发，则乘积也将为零。定理证毕。

作为定理的一个例子，考虑如图 2.2 所示的有向图，我们有

$$A_a B_a' = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.8}$$

在本章中，我们将假设 A_a 和 B_a 的列总是取相同的边的排列次

序，应用定理2.3，我们立即得到B_a的秩。

定理 2.4 一有向图G的回路矩阵的秩等于G的零度。

证明：我们已经得出，当$c=1$时，B_a的秩至少为m。不难看出，B_a的秩通常至少为$m=b-n+c$（习题2.3）。剩下的问题是证明m也是B_a秩的上限。由于$A_a B_a^T=0$，B_a^T的列必须在A_a的零空间中。又由于A_a的秩是$(n-c)$，所以A_a的零度即A_a的零-空间的维数是m。因此，B_a的线性独立行的最大数为m。该定理直接从这里得出。

由于B_a的秩是m，所以实际上不必要写出B_a的所有行，为此，我们将用符号B表示阶数为$m\times b$，秩为m的B_a的子矩阵。矩阵B称为G的基本回路矩阵，因为B含有包含在B_a中的所有信息。显然，f-回路矩阵是G的一个基本回路矩阵。

引理 2.3：存在一个由元素1，-1和0组成的非奇异的$m\times m$阶矩阵C，使$B=CB_f$。

定理 2.5：一连通有向图的基本回路矩阵B的一子方阵，当且仅当该子矩阵的列与有向图中某一补树的边相对应时，则该子矩阵是一大子矩阵。

证明：必要性。如果必要的话，交换B的列，我们可以假设B的前m列形成一大子矩阵。设B被分块为

$$B=[B_{11},\ B_{12}] \tag{2.9}$$

式中B_{11}是非奇异的，同时阶数为m。因为B_{12}中有r列，足于说明与这些列相对应的子图不包含任何回路。假设不是这样，设B_c是B_a中对应于这一回路的行。考虑到B_a的子矩阵是由B和B_c的行组成，则子矩阵能分块为

$$\begin{bmatrix}B\\B_c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12}\\0 & B_{22}\end{bmatrix} \tag{2.10}$$

显然，B_{22}中至少有一个非零元素。由于B_{11}是非奇异的，式(2.10)矩阵的秩为$(m+1)$。但该矩阵也是B_a的一个子矩阵，根据定理2.4，B_a具有的秩为m。因此这是不可能的。

充分性。假设B的子矩阵的列对应于一补树，令$\mathbf{B}_f$是由有向图G中该补树的弦形成的f回路矩阵，如果必须的话，交换B和$\mathbf{B}_f$的列，矩阵B和$\mathbf{B}_f$能分块为

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_{11}\quad \mathbf{B}_{12}] \tag{2.11 a}$$

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{U}_m\quad \mathbf{B}_{f12}] \tag{2.11 b}$$

由于B和$\mathbf{B}_f$的行是由$\mathbf{B}_a$的行生成的矢量空间的两个基底，于是存在一非奇异的m阶矩阵C，使(引理2.3)

$$\mathbf{B}=\mathbf{C}\mathbf{B}_f \tag{2.12}$$

因此，$\mathbf{B}_{11}=\mathbf{C}\mathbf{U}_m=\mathbf{C}$，所以$\mathbf{B}_{11}$是非奇异的。

推论 2.2： 一有向图G的补树和G的基本回路矩阵B的大子矩阵之间存在一一对应关系。

作为一例，考虑如图2.4所示的有向图G。我们有m＝5－4＋1＝2。因此，G的基本回路矩阵B必须是2×5阶的矩阵。容易检验，由G的三个回路中的任意两个形成的$\mathbf{B}_a$的子矩阵是G的一个基本回路矩阵。由回路1和2形成的基本回路矩阵B由下式给出

$$\mathbf{B}=\begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.13}$$

G的补树的集合T能够容易地得到，由下式给出为

$$T=\{e_1e_5, e_2e_5, e_3e_5, e_4e_5, e_1e_4, e_2e_3, e_1e_3, e_2e_4\} \tag{2.14}$$

T中的每一项是图2.3中给出的某一树的补树。与T中给出的每一补树相对应的列形成的子矩阵是B的一大子矩阵，B的大子矩阵只有这一些。

1.3 切割-边关联矩阵

在前面节讨论中，我们曾明确指出，由与某一节点相关联的边集所形成的子图是重要的，因为它与基尔霍夫电流定律有密切的关系。另一类叫做割集的子图，因为它使基尔霍夫电流定律得到推广，所以在电网络理论中也得到了重要的应用。割集的概念最初由

WHITNEY在1933年引入，并由SESHU和REED在1956年系统地发展。在这里我们的讨论是要证明割集和回路具有与关联关系相类似。从而我们将得到许多对回路已经证明过的定理等对偶定理。本节的目的还要证明割集含有如同有向图本身同样本质的信息。

定义 2.11：割集。

对于一有向(无向)图G，G的割集是由一个最小的边集组成的子图，若移去这些边，G的秩减少1。

由于G的秩为(n－c)，移去G中的一个割集，增加一个片，因此，如果G不止一个片，割集只能由其中一个片的边形成。否则该集合将不是最小。直观地看，如果我们"切割"割集的边，G的其中一个片将切割成两部分。这是割集这一名称的由来。注意，G的一个片可以由一个孤立节点组成。例如，考虑如图2.6所示的有向图G，子图$e_1e_5e_4$，$e_2e_5e_4$，e_6和$e_1e_5e_3$是割集的例子。图2.6中的虚线表示这些割集是怎样"切割"图的。可是，子图$e_1e_5e_3e_6$不是一个割集，因为如果我们从G中移去这些边，G的秩从4减少到2(＝5－3)，减少了2而不是需要的1。另一个例子，考虑子图e_3e_6，虽然从G中移去e_3和e_6，G的秩将减少1，但因为它不是最小的边集合，所以该集合不是一个割集。从G中移去e_6，G的秩也将减少1。因此，与某一节点相关联的边集通常并不就是一个割集。

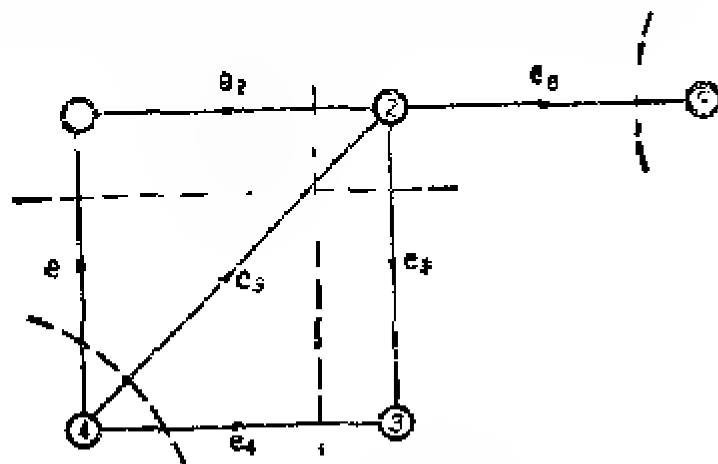


图 2.6 割集的一些例子

定义 2.12：关联切割。

对于一有向（无向）图G，由G中某一节点所关联的边形成的子图称为G的关联切割。

因此，一关联切割或是一割集或是一边不相接割集的并集。显然，关联矩阵 A 中每一行中的非零项对应图中的一个关联切割。

定义 2.13：切割。

一有向（无向）图的割集或边不相接割集的并集叫做切割。

REED 在 1961 年将切割这个术语又称为广义割集（分离）。由于回路和割集是对偶的概念，切割的对偶也可以考虑为边不相接回路的并集，但是我们还没有发现有这个必要，切割也可以理解为另一种有用的型式。设 V_1 是G的节点集合V的一个非空真子集，又设 $V_2=V-V_1$，那么与 V_1 中的一个端点和 V_2 中的另一端点相关联的每一个G的边集是G的一个切割。在特殊情况下，如果从G中移去这些边，G的片数增加 1，则该切割也是一割集。作为一个例子，考虑图 2.6 中的有向图G，设 $V_1=\{3, 4, 5\}$ 和 $V_2=\{1, 2\}$，则边 e_1、e_5、e_3 和 e_6 的集合组成G的一个切割。另一方面，如果我们设 $V_1=\{3, 4\}$ 和 $V_2=\{1, 2, 5\}$，边 e，e_4 和 e_3 的集合组成一割集。当然，割集和关联切割是切割的特殊类型。如同回路一样，在有向图中对切割定向更是自然。

定义 2.14：切割方向

对于一有向图G，设 V_1 和 V_2 是被G的切割C分开的节点集合。如果集合 V_1 和 V_2 排列成次序 (V_1, V_2) 或 (V_2, V_1)，则切割C就以此定向。

在大多数情况下，切割的方向可以用一箭号来表示。例如，我们在表示该切割的虚线附近放一箭号。图 2.7 中G的切割方向如图所示。可是，由边 e_1，e_2，e_3 和 e_4 组成的割集不能用这种方法描

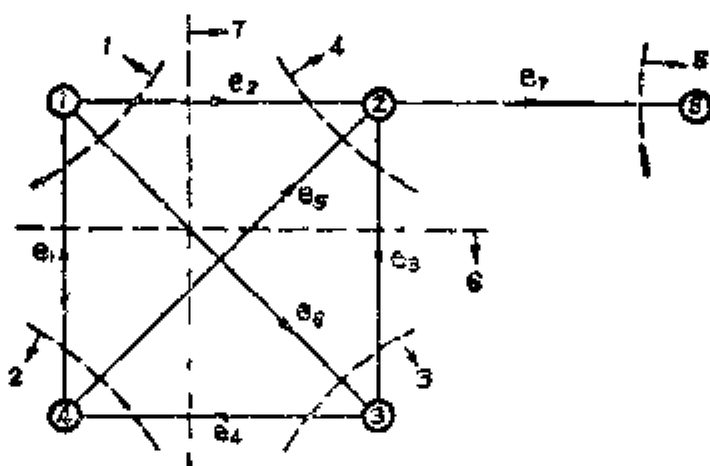


图 2.7 定向切割的一些例子

述，除非我们用交换节点3和节点4的位置这样一类办法重新画G。

设G的切割C次序为(V_1, V_2)。如果i在V_1中、j在V_2中，我们将说边(i，j)的方向与切割C一致。否则，就说它们是相反。这从图上一看便知。例如，图2.7中边e_2 (1，2)的方向和割集4和7的方向一致，而边e_2的方向和割集1相反。

引理 2.4：G中含有$(2^{r}-1)$个非空切割

引理 2.5：G的一个切割和一个回路具有偶数个公共边。

以上二个引理可直接从我们对切割的解释得出。其细节留作练习(习题2.4和2.5)。

我们用切割矩阵能够最方便地讨论切割。

定义 2.15：切割-边关联矩阵(切割矩阵)。

一有向图G的切割-边关联矩阵或简称为切割矩阵是一$q\times b$阶矩阵，用符号Q_a表示，这里q是G中非空切割数。设$Q_a=[q_{ij}]$，则

$q_{ij}=1$，如果边e_j在切割i中且其方向与切割的方向一致；

$q_{ij}=-1$，如果边e_j在切割i中但其方向与切割的方向相反；

$q_{ij}=0$，如果边e_j不在切割之中。

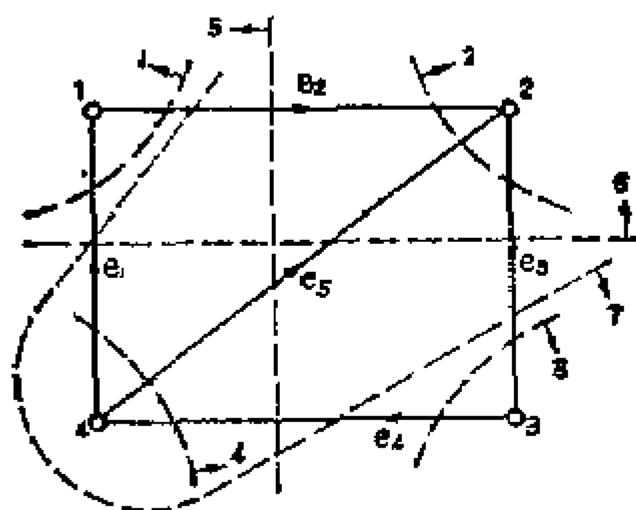


图 2.8 说明切割矩阵的有向图

应该注意，在$\mathbf{Q}_a$中不包含仅仅是用改变方向而获得的切割。对于图2.8中的有向图，具有7($=2^{4-1}-1$)个切割，其方向如图所示。切割矩阵表示为

$$
\mathbf{Q}_a=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\\5\\6\\7 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array}\\
\left[\begin{array}{ccccc}
1 & -1 & 0 & 0 & 0\\
0 & 1 & 1 & 0 & 1\\
0 & 0 & 1 & 1 & 0\\
1 & 0 & 0 & -1 & 1\\
0 & -1 & 0 & 1 & -1\\
1 & 0 & 1 & 0 & 1\\
1 & -1 & 1 & -1 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\qquad (2.15)
$$

显然，$\mathbf{Q}_a$不是所有的行都是线性独立的。很自然地要问，“$\mathbf{Q}_a$的秩是什么？”。由于$\mathbf{Q}_a$包含关联矩阵$\mathbf{A}_a$作为一子矩阵。我们立即知道，$\mathbf{Q}_a$的秩至少为r。例如，在式(2.15)中由$\mathbf{Q}_a$的前4行形成的子矩阵是G的关联矩阵，仅是有些行的符号不同。

为证明对于$\mathbf{Q}_a$的秩，r也是一个上限，我们再一次需要确定$\mathbf{B}_a$和$\mathbf{Q}_a$之间的关系，类似于在式(2.7)中已给出的$\mathbf{B}_a$和$\mathbf{A}_a$之间的关系。

从引理 2.5 我们知道，一个切割和一个回路的公共边数总是偶数。如果一切割与一回路具有 2k 条公共边，则不难看到其中 k 条边在切割中和在回路中具有相同的相关方向，而其它 k 条边在切割中具有一个方向而在回路中具有相反的方向(习题 2.6 和 2.7)。因此，我们有

定理 2.6：如果一有向图的矩阵 B_a 和 Q_a 的列是按相同的边的次序排列，则

$$Q_aB_a'=0 \text{ 和 } B_aQ_a'=0 \qquad (2.16)$$

上式中的撇号表示矩阵的转置。

由于 B_a 的秩是 m，又由于 $B_aQ_a'=0$，于是，Q_a' 中的线性独立列至多不超过 $r=b-m$。所以，我们有

定理 2.7：一有向图G的切割矩阵的秩等于G的秩。

由于 Q_a 的秩现已确定为 r，所以不必写出 Q_a 的所有行。我们将用符号 Q 表示 Q_a 的子矩阵，其阶数为 $r\times b$，秩为 r。矩阵 Q 叫做G的基本切割矩阵。象基本回路矩阵一样，基本切割矩阵含有 Q_a 中所含有的所有信息。

前已指出，G 的切割如何能用来分割它的节点集合。下面我们将说明用树来分割G的节点。这里我们已经无疑地假设G是连通图。对于非连通图G，这仍是简单的，即我们把这个方法应用到G的每个片(习题 2.13)。

设 t 是G的一个树，又设 e 是 t 的一个树支。由于 t 是连通的同时不包含回路，从 t 中移去 e，结果形成由两个片组成的子图。如果 V_1 和 V_2 是这两个片的节点集合，则 V_1 和 V_2 是互不包含的，而合在一起包含了G的所有节点。因此，t 的树支 e 以唯一的方式限定了G中节点的分割。当每条边关联的两个端点，其一在 V_1 中而另一在 V_2 中时，由这些边组成的子图是G的一个割集。该割集仅含有 t 的一个树支(即 e)和补树(对于 t)中的一些弦。显然，有 r 个这样的割集。

定义 2.16：基本割集(f-割集)

一连通有向图对于某树 t 的基本割集或简称为 f-割集是 r 个割集，其中每一割集仅含有 t 的一条树支。该 f-割集的方向与这一树支的方向取一致。

定义 2.17：基本割集矩阵(f-割集矩阵)。

对于一连通有向图G，与G中 r 个 f-割集集合相对应的切割矩阵的子矩阵叫做G的基本割集矩阵或简称为f-割集矩阵。该 f-割集矩阵用符号 Q_f 表示。

象 f-回路矩阵一样，如果G的边以这样一种方式编号，使 Q_f 的最后 r 列对应于 t 中的树支，同时如果 f-割集取相同编号（即按这一编号重新整理 Q_f 的行和列），该 f-割集矩阵 Q_f 能够分块为

$$Q_f=[Q_{f1}\quad U_r] \tag{2.17}$$

式中 U_r 是秩为 r 的单位矩阵。因此，f-割集矩阵也是G的一个基本切割矩阵。

举例说明，考虑图 2.9 中给出的有向图G，假设我们选择由边 e_4，e_5，e_6 和 e_7 组成的树 t。那么 f-割集是割集 1，2，3 和 4 如图 2.9 中所示。f-割集矩阵由下式给出

$$Q_f=\begin{array}{c|ccc|cccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\\
1 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0\\
2 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0\\
3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\
4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{array} \tag{2.18}$$

G中对于 t 的 f-回路矩阵由下式给出

$$B_f=\begin{array}{c|ccccccc|}
 & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7\\
1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0\\
2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0\\
3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{array} \tag{2.19}$$

因此，我们有 $Q_f B_f^T = 0$。

除非另外说明，在本章中，我们将始终假设一有向图的切割矩阵和回路矩阵的列总是按相同的边次序排列。在特殊情况下，我们假设 B_f 和 Q_f 分别以如式(2.5)和(2.17)中所表示的形式给出。

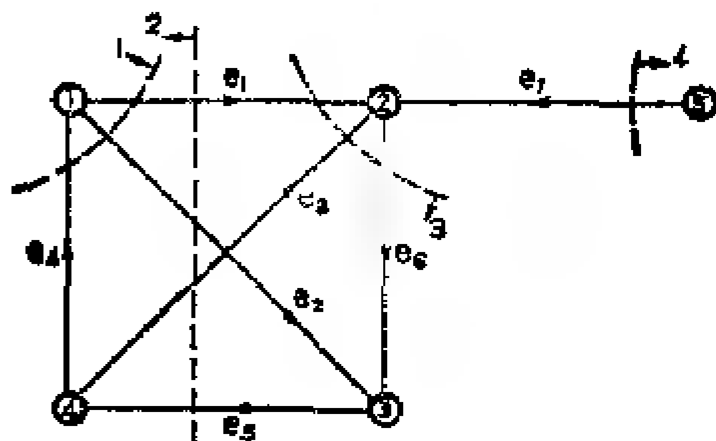


图 2.9 说明子割集矩阵的有向图

由于 Q 和 Q_f 的行是由 Q_a 的行生成的矢量空间的两个基底，于是它们能够从另一方面通过非奇异变换得到。

引理 2.6：存在一 r 阶的非奇异矩阵 D，其元素为 1，－1 和 0，使

$$Q = DQ_f \tag{2.20}$$

定理 2.8：一连通有向图的基本切割矩阵 Q 的子方阵，当且仅当它的列与该有向图的某树的树支相对应时，则该子矩阵是一大子矩阵。

证明：根据引理 2.6，可见存在一 r 阶的非奇异矩阵 D，使 Q = DA。因此，由定理 2.2 我们得到要求的结果。

推论 2.3：一连通有向图 G 的树和它的基本切割矩阵 Q 的大子矩阵二者之间存在一一对应关系。

作为一个例子，图 2.9 中的有向图 G 的树集 T 由下式给出

$$T = \{e_1e_3e_6e_7,\ e_1e_4e_5e_7,\ e_3e_4e_5e_7,\ e_1e_2e_3e_7,$$

$$e_4e_5e_6e_7,\ e_2e_3e_4e_7,\ e_4e_5e_6e_7,\ e_1e_5e_6e_7,$$

$e_2e_4e_5e_7$, $e_1e_5e_6e_7$, $e_1e_3e_4e_7$, $e_1e_2e_3e_7$,

$e_1e_3e_5e_7$, $e_1e_3e_6e_7$, $e_2e_3e_5e_7$, $e_1e_4e_6e_7\}$ (2.21)

G的f割集矩阵 Q_f 已在式(2.18)中给出，容易检验，Q_f 的每一个大子矩阵是由与式(2.21)中某一项相对应的列组成。

1.4 矩阵 A，B_f 和 Q_f 之间的相互关系

如§1.1中所述，一有向图的基本关联矩阵 A 完备地表示了该有向图的特性，换言之，如果 A 已知，该有向图即可直接绘制出来。因此，认为我们应该能够导出矩阵 A，B_f 和 Q_f 之间的关系式是符合逻辑的。

定理 2.9：如果一有向图G的 A，B_f 和 Q_f 的列是按弦和树支（定义f回路矩阵 B_f 和f割集矩阵 Q_f 时树 t 的）这样的次序排列，使

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{11}\quad \mathbf{A}_{12}] \tag{2.22a}$$

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{U}_m\quad \mathbf{B}_{f12}] \tag{2.22b}$$

$$\mathbf{Q}_f=[\mathbf{Q}_{f11}\quad \mathbf{U}_r] \tag{2.22c}$$

那么我们得到

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{U}_m\quad -\mathbf{A}'_{11}\mathbf{A}'^{-1}_{12}], \tag{2.23a}$$

$$\mathbf{Q}_f=\mathbf{A}^{-1}_{12}\mathbf{A}=[-\mathbf{B}'_{f12}\quad \mathbf{U}_r], \tag{2.23b}$$

上式中撇号表示矩阵的转置，$\mathbf{U}_m$ 和 $\mathbf{U}_r$ 分别是m阶和r阶的单位矩阵。

上述定理可直接从式(2.7)和(2.16)给出的恒等式得出。其细节留作练习(习题 2.8)。由于 $\mathbf{Q}_{f11}=-\mathbf{B}'_{f12}$，我们得到下列联系G的f割集和f回路的简单关系(习题 2.11)。

推论 2.4：设 t 是一连通有向图 G 的一个树，又设 e 是 t 的一条树支。那么由 e 决定的 f 割集的所有 G 的弦，在一个由这些弦所决定的 f 回路中都包含 e。

作为一个例子，在图 2.9 中，设 $t=e_4e_5e_6e_7$，又设 $e=e_4$。用弦 e_1,e_2 和 e_3 定义的 f 回路中包含树支 e_4 的回路是 $e_2e_5e_4$ 和 $e_1e_6e_5$

e。因此由支路 e_4 决定的 f-割集恰恰包含在 $c_2e_3e_4$ 和 $e_1e_6e_5e_4$ 中的这些弦，即 e_2 和 e_1，所以 f-割集由边 e_4、e_1 和 e_7 组成。

下面，让我们对如图 2.9 所示的有向图 G 验证式(2.23)中给出的公式，G 的基本关联矩阵 A 由下式给出

$$
A = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccc|cccc}
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & -1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0
\end{array}\right]
\end{array}
\tag{2.24}
$$

现在验证定理 2.9，我们有

$$
A_{12}^{-1}A_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

$$
= \left[\begin{array}{cccc|ccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1
\end{array}\right]
$$

$$
\begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\tag{2.25}
$$

因此

$$B_f=[U_3 \mid A'_{11}A'^{-1}_{12}]=\begin{bmatrix}1&0&0&1&1&1&1&0\\0&1&0&1&1&1&0&0\\0&0&1&1&0&1&1&0\end{bmatrix}\tag{2.26}$$

和

$$Q_f=[A_t^{-1}A_l \mid U_4]=\begin{bmatrix}-1&-1&0&1&0&0&0\\-1&-1&-1&0&1&0&0\\1&0&-1&0&0&1&0\\0&0&0&0&0&0&1\end{bmatrix}\tag{2.27}$$

上式的确就是式(2.18)和(2.19)中给出的矩阵。

从上面作出的这个例子，人们立刻感到求 A 的一个大子矩阵 A_{12} 的逆矩阵并不方便易为。为了克服这个困难，BRANIN 在 1962 年对 A_{12} 的逆矩阵提出了一个有趣的解释。

定义 2.18 节点对基准点路径矩阵

对于一个具有 n 个节点的树 t，节点对基准点的路径矩阵用符号 p 表示，是一个(n－1)阶的矩阵。设 $p=[p_{ij}]$，则

$p_{ij}=1$，如果 t 的树支 e 包含在连接节点 j 和 n 之间的唯一路径中，同时它在路程中的方向指向节点 n；

$p_{ij}=-1$，如果 t 的树支 e 包含在连接节点 j 和 n 之间的唯一路径中，而它的方向从节点 n 出发；

$p_{ij}=0$，如果 t 的树支 e_i 不包

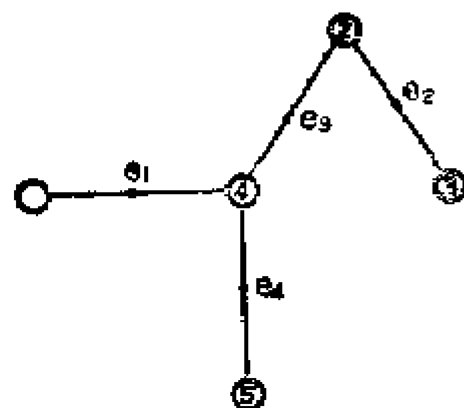


图 2.10 说明节点对基准点路径矩阵的树

含在连接节点j和n之间的唯一路径中。

举例说明，考虑如图2.10中所示的树t。t对于基准节点n的节点对基准点路径矩阵p由下式给出

$$
\mathbf{P}=\begin{array}{c} \\ e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}\\ \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right]\end{array} \tag{2.28}
$$

引理 2.7：一节点对基准点路径矩阵的任意行中的非零元素必定具有相同的符号。

证明：设 $\mathbf{P}$ 为某树t的节点对基准点n的路径矩阵。又设 e_k 是t的一条树支。由于 e_k 是t的一个割集，移去 e_k，t的节点分成两个集合 V_1 和 V_2。为了方便起见，设 V_2 包含节点n，同时 $p=[p_{ij}]$。当且仅当节点j在 V_1 中时，则 P_{kj} 为非零。由于从 V_1 中的一个节点开始的任何路径必须以相同的方向经过 e_k，于是在 $\mathbf{P}$ 的第k行中所有非零项必定具有相同的符号。引理证毕。

定理 2.10：一连通有向图关于基准节点n的基本关联矩阵 $\mathbf{A}$ 的一大子矩阵的逆矩阵等于与该大子矩阵的列相对应的树并以n作为树的基准节点时的节点对基准点路径矩阵。

证明：设 $\mathbf{A}_{12}$ 是与树t相对应的 $\mathbf{A}$ 的子矩阵。又设 $\mathbf{P}$ 是以节点n为基准的t的节点对基准点路径矩阵。我们将证明

$$
\mathbf{P}=\mathbf{A}_{12}^{-1} \tag{2.29}
$$

即

$$
\sum_{j=1}^{n-1} p_{ij} a_{jk}=\delta_{ik} \tag{2.30}
$$

其中 i、$k=1, 2, \cdots, n-1$，式中 $\mathbf{P}=[p_{ij}]$，$\mathbf{A}_{12}=[a_{ij}]$，δ_{ik} 是克罗内克符。如果节点x和y是支路 e_k 的两个端点，则式(2.30)能够变为

$$p_{ix}a_{xk}+p_{iy}a_{yk}=\delta_{ik} \tag{2.31}$$

象在引理2.7的证明中一样，树支e_k将t的节点分成两个集合V_1和V_2。由于支路e的两个端点都在V_1中或都在V_2中，如果$i\neq k$，则p_{ix}和p_{iy}都为非零或都为零。因为根据引理2.7，p_{ix}和p_{iy}必须具有相同的符号，又因为a_{xk}和a_{yk}具有相反的符号，于是

$$p_{ix}a_{xk}+p_{iy}a_{yk}=0 \tag{2.32}$$

其中$i\neq k$。如果$i=k$，考虑$p_{kx}=0$和$p_{kx}=\pm 1$两种情况。对于$p_{kx}=0$，我们有$p_{ky}=\pm 1$和$a_{yk}=\pm 1$。对于$p_{kx}=\pm 1$，我们有$p_{ky}=0$和$a_{xk}=\pm 1$。这样

$$p_{kx}a_{xk}+p_{ky}a_{yk}=1 \tag{2.33}$$

定理证毕。

作为一个例子，在图2.10中以节点5作为基准节点的基本关联矩阵A由下式给出

$$A=\begin{array}{c|cccc|} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ \hline 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \tag{2.34}$$

容易检验，式(2.28)中给出的矩阵P是A的逆矩阵。作为另一个例子，式(2.25)中给出的矩阵A_{12}是图2.9中给出的有向图以节点5为基准节点时，树$e_4e_5e_6e_7$的节点对基准点路径矩阵。

到目前为止，我们已经介绍了用A的子矩阵表示B_f和Q_f的公式。用B_f或Q_f的子矩阵来表示A的相反过程是困难的，这相当于用规定的f回路或f-割集矩阵来实现一有向图。这个问题是非常重要的，因为它密切关系到用代数方法来实现常规电网络和组合开关电路的综合。它的完整特性是由*TUTTE*在1958，1959年首先建立的。

1.5 与矩阵 Ba 和 Qa 相联系的矢量空间

在本节中最后介绍的主要代数概念是线性矢量空间的概念。线性矢量空间的抽象代数讨论可以在关于现代代数的任何课本中找到(例如见 MACLANE 和 BIRKHOFF[1967])。线性矢量空间应用到线性图已由 WHITNEY[1935]，DOYLE[1955]，GOULD[1958]和 CHEN[1970 b]考虑。在本节中，我们仅将讨论与电网络问题密切相关的线性矢量空间的这些方面。

定义 2.19：B 空间

对于一有向图 G，在实数域上用它的回路矩阵 B_a 的转置矩阵的列生成的线性矢量空间叫做 G 的 B 空间，用符号 $\mathscr{V}_B$ 表示。

定义 2.20：Q 空间

对于一有向图 G，在实数域上用它的割集矩阵 Q_a 的转置矩阵的列生成的线性矢量空间叫做 G 的 Q 空间，用符号 $\mathscr{V}_Q$ 表示。

显然，$\mathscr{V}_B$ 是 m 维空间，同时由 G 的任一 B 转置的列将用作 $\mathscr{V}_B$ 的一个基底。类似地，$\mathscr{V}_Q$ 是 r 维空间，同时由 G 的任一 Q 转置的列将用作 $\mathscr{V}_Q$ 的一个基底。

下列定理是式(2.16)的直接推论。

定理 2.11： 一有向图 G 的 B 空间和 Q 空间形成互相正交的一个 b 维空间的子空间。

这样，如果 $\mathscr{V}_G$ 是上述讨论的 b 维空间，则 $\mathscr{V}_G$ 中的任何矢量是 $\mathscr{V}_B$ 和 $\mathscr{V}_Q$ 的基本矢量的线性组合，由于 $\mathscr{V}_B$ 是 m 维的，$\mathscr{V}_Q$ 是 r 维的，同时 $b = m + r$。由此可见，$\mathscr{V}_B$ 的基本矢量连同 $\mathscr{V}_Q$ 的基本矢量一起组成 $\mathscr{V}_G$ 的一个基底。换言之，$\mathscr{V}_G$ 是子空间 $\mathscr{V}_B$ 和 $\mathscr{V}_Q$ 的有向和。

推论 2.5：子空间 $\mathscr{V}_B$ 和 $\mathscr{V}_Q$ 形成互相正交的空间 $\mathscr{V}_G$ 的补空间。

定理 2.12：$\mathscr{V}_G$ 中的任何矢量 X 能够唯一地分解为两个矢量 X_B 和 X_Q 的和，其中 X_B 在 $\mathscr{V}_B$ 中，X_Q 在 $\mathscr{V}_Q$ 中。

证明：根据推论 2.5，显然 X 能够表示为

$$X = B'C_1 + Q'C_2 \tag{2.35}$$

式中 C_1 是 m 维矢量，C_2 是 r 维矢量，撇号表示矩阵的转置，如果设

$$X_B = B'C_1 \tag{2.36 a}$$

$$X_Q = Q'C_2 \tag{2.36 b}$$

就得到这个分解，再证明这是唯一的，设

$$X = B'C_3 + Q'C_4 \tag{2.37}$$

式中 C_3 是 m 维矢量，C_4 是 r 维矢量。根据式(2.35)和(2.37)有

$$B'(C_1 - C_3) + Q'(C_2 - C_4) = 0 \tag{2.38}$$

由于 B′ 和 Q′ 的列是线性独立的，于是

$$C_1 = C_3 \text{ 和 } C_2 = C_4 \tag{2.39}$$

定理证毕。

推论 2.6：在 $\mathscr{V}_B$ 中有$(2^m - 1)$个具有组元 1，−1 和 0 的非零矢量，其中每一矢量对应 G 的一个回路或一个边不相接回路的并集；在 $\mathscr{V}_Q$ 中有$(2^r - 1)$个具有组元 1，−1 和 0 的非零矢量，其中每一矢量对应 G 的一个切割。

推论 2.7：$\mathscr{V}_G$ 中任一满足 $QX = 0$ 的矢量 X 都包含在 $\mathscr{V}_B$ 中，同时 $\mathscr{V}_G$ 中任一满足 $BY = 0$ 的矢量 Y 都包含在 $\mathscr{V}_Q$ 中。

我们强调，在推论 2.6 中仅仅是 $\mathscr{V}_B$($\mathscr{V}_Q$)中具有组元 1，−1 和 0 的这些矢量对应 G 的回路或边不相接回路(切割)的并集，其它的矢量并不对应。事实上，$\mathscr{V}_B$ 和 $\mathscr{V}_Q$ 二者都包含有无穷多的矢量。

§ 2. 电网络问题

电网络理论是用与称为(网络)支路的每一网络元件相联系的电流$i(t)$和电压$v(t)$两个变量来系统地阐述的。电流和电压变量是时间t的实函数。电压$v(t)$由于它们跨接在支路节两端可看作"跨接变量",而电流由于它们是从支路的一端流入而从另一端流出，可看作是"通过变量",因此电压$v(t)$和电流$i(t)$都是有向变量,我们用有向图边方向的箭头规定电压和电流的正方向。这些方向通常叫做电压和电流的参考方向。这里采用的习惯如下：如果边$e_k=(i, j)$，当与边e_k有关的电压$v_k(t)$和电流$i_k(t)$是从节点i到节点j时，则$v_k(t)$和$i_k(t)$取作正，当它们是从节点j到节点i时，则取作负。换言之，电压的"+"参考极性设在电流参考箭头的尾部。

一个(理想)电压源是电压规定为时间的作用函数形式的支路，一个(理想)电流源是电流规定为时间的作用函数形式的支路。二者都称为电源。对于其他支路，每一个电元件约束它的电流和电压变量之间的关系，这种支路的确切性质取决于电元件的类型。

在本章中，我们将仅考虑时不变和线性电元件。为了方便起见，我们对所有时间变量取拉普拉斯变换，这样就只存在线性代数方程组，有了这些规定，现在可以给出电网络问题的正式陈述。

定义 2.21：电网络。

一个电网络是一有向图G，它以复变量s的两个函数$v(s)$和$i(s)$联系G的每条边，G满足以下三个公设：

1．基尔霍夫电流定律(KIRCHHOFF[1847])：

$$A_a I(s)=0 \qquad (2.40)$$

式中$I(s)$是表示各边电流的b矢量，叫做G的支路电流矢量。

2．基尔霍夫电压定律(KIRCHHOFF[1847])：

$$B_a V(s)=0 \qquad (2.41)$$

式中V(s)是表示各边电压的b矢量，叫做G的支路电压矢量。

3．元件特性方程或广义欧姆定律(OHM[1827])：

$$V(s)=E(s)+Z(s)I(s) \tag{2.42a}$$

或

$$I(s)=J(s)+Y(s)V(s) \tag{2.42b}$$

式中Z(s)和Y(s)是给定的b阶矩阵，它们分别叫做支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵；E(s)和J(s)是给定的表示源和起始条件的b矢量，它们分别叫做G的支路电压源矢量和支路电流源矢量。

这里我们无疑地已假设，如果应用的是式(2.42a)，则G不含有电流源，如果应用的是式(2.42b)，则G不含有电压源。由于一个电压源能够容易地转换成一个等效的电流源，反之亦然(例如，见SESHU和BALABANIAN[1959])，所以这不是一个重要的限制。我们还假设A_a和B_f的列以及I(s)和V(s)的行是按相同的边的次序排列的。

举例说明，考虑如图2.11所示电网络的电路图N，N的有关有向图G在图2.12中给出，支路电流矢量I(s)需要满足基尔霍夫电流定律：

$$A_a I(s)=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & 1 & \end{matrix}\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ i_3(s) \\ i_4(s) \\ i_5(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

支路电压矢量V(s)需要满足基尔霍夫电压定律：

$$B_f V(s)=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 & 0 & 1 & 1 \end{matrix}\begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \\ v_4(s) \\ v_5(s) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

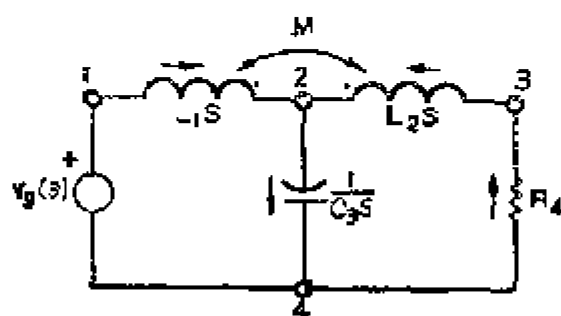


图 2.11 网络的电路图

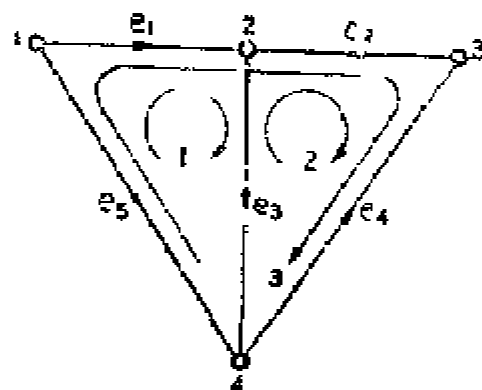


图 2.12 对应的有向图

支路电压和支路电流矢量 V(s) 和 I(s) 由支路阻抗矩阵 Z(s) 和支路电压源矢量 E(s) 相联系：

$$
\begin{bmatrix} v_1(s) \\ v_2(s) \\ v_3(s) \\ v_4(s) \\ v_5(s) \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} L_1s & Ms & 0 & 0 & 0 \\ Ms & L_2s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_3s} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_1(s) \\ i_2(s) \\ i_3(s) \\ i_4(s) \\ i_5(s) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ v_g(s) \end{bmatrix}
\quad (2.45)
$$

我们注意到，在 Z(s) 中与电压源支路相对应的行和列仅由零组成。因此，Z(s) 通常可能是奇异的。这对 Y(s) 也一样。

对于一个给定的电网络，问题转为找到使式(2.40)—(2.42)成立的矢量 V(s) 和 I(s)。理论上这个过程是简单的，它相当于解一个联立代数方程组。实际上，我们很少通过常规过程获得此解，因为包含的方程数相当多。例如图 2.11 中的简单网络，我们需要解十二个联立方程式。根据我们以前的经验，我们知道，式(2.40)和(2.41)中给出的方程不是所有都是线性独立的。因此，我们第一步是试着去掉凡是可能多余的方程，然后设法进一步减少方程数。

由于关联矩阵和回路矩阵的特性是已知的，从我们前面的讨论（定理 2.1 和 2.4）中立即可以得出，仅有 $r(=n-c)$ 个线性独立的基尔霍夫电流方程和 $m(=b-n+c)$ 个线性独立的基尔霍夫电压方程。

由于基本关联矩阵 $\mathbf{A}$ 和基本切割矩阵 $\mathbf{Q}$ 仅相差一非奇异变换，推广的基尔霍夫电流定律现在可以用切割矩阵的行来表示（习题2.14）。

推论 2.8：当且仅当

$$\mathbf{Q}_a\mathbf{I}(s)=\mathbf{0} \tag{2.46}$$

时，$\mathbf{A}_a\mathbf{I}(s)=\mathbf{0}$。

应用§1.3中给出的对切割的解释，式(2.46)的物理意义是不难得到的。由于有向图G的切割对应于实际网络中的一组导线，割断这些导线将网络至少分开成为两个连通部分。众所周知，这些导线中的电流，根据参考方向可以知道，它们的和是零。

推论 2.9：如果一连通电网络的 $\mathbf{Q}$ 和 $\mathbf{B}$ 的列是按树 t 的弦和树支的顺序排列的，并设

$$\mathbf{Q}=[\mathbf{Q}_{11}\quad \mathbf{Q}_{12}] \tag{2.47}$$

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_{11}\quad \mathbf{B}_{12}] \tag{2.48}$$

$$\mathbf{I}_2(s)=-\mathbf{Q}_{12}^{-1}\mathbf{Q}_{11}\mathbf{I}_1(s) \tag{2.49}$$

$$\mathbf{V}_1(s)=-\mathbf{B}_{11}^{-1}\mathbf{B}_{12}\mathbf{V}_2(s) \tag{2.50}$$

式中 $\mathbf{I}_1(s)$ 和 $\mathbf{I}_2(s)$ 是支路电流矢量 $\mathbf{I}(s)$ 中分别对应于由 t 规定的弦和树支电流的子矢量，同时 $\mathbf{V}_1(s)$ 和 $\mathbf{V}_2(s)$ 是支路电压矢量 $\mathbf{V}(s)$ 中分别对应于由 t 规定的弦和树支电压的子矢量。

该推论直接从定理2.5和2.8得出，它的证明留作练习（习题2.15）。

推论2.9的含义可以理解为，是如果弦的电流函数是任选的，而树支的电流函数是从式(2.49)求得的，那么这一电流函数集将总是满足基尔霍夫电流定律。类似地，如果树支的电压函数是任选的，而弦的电压函数是根据式(2.50)求得的，则电压函数集将总是满足基尔霍夫电压定律。因此，如果电流、电压仅仅是必须满足基尔霍夫的两个定律，那么我们选择电流时只有 m 个自由度，同时选择电压时只有 r 个自由度。然而，我们还有 b(=m+r)个由式(2.2)规定的约束。换言之，在 $\mathbf{I}(s)$ 和 $\mathbf{V}(s)$ 中我们有 2b 个未知量，并有

2b个方程式(在式(2.40)和(2.41)中删去多余的方程以后)。如果这些方程是相容的，我们确信有一个解。此外，如果方程是线性独立的，则此解将是唯一的。然而对大多数实际网络这个数还是太大。在下一节中，我们将介绍如何组织这些变量，以致使包含的方程数将大大地减少。

为了方便起见，从现在起在书写变量和矢量时将省略复变量s，明确它们表示的是实变量和矢量的拉普拉斯变换。

§ 3．电网络问题的解

概括上一节我们已经讨论的内容，式(2.40)—(2.42)给出的三个基本方程组相当于下列三个方程组的联合

$$\mathbf{QI} = \mathbf{0} \tag{2.51}$$

$$\mathbf{BV} = \mathbf{0} \tag{2.52}$$

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_s \\ \mathbf{E}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Z}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} = \mathbf{E} + \mathbf{ZI} \tag{2.53 a}$$

或

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_s \\ \mathbf{I}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_s \\ \mathbf{J}_p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{Y}_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_s \\ \mathbf{V}_p \end{bmatrix} = \mathbf{J} + \mathbf{YV} \tag{2.53 b}$$

式中下标s是用来表示对应于电源的那些边的电压或电流，而下标p表示所有其它边的电压或电流。

3.1 支路电流和支路电压方程组

如果我们用式(2.53 a)代入式(2.52)，然后再结合式(2.51)，我们得到支路电流方程组

$$\begin{bmatrix} \mathbf{BZ} \\ \mathbf{A} \end{bmatrix} \mathbf{I} = \begin{bmatrix} -\mathbf{BE} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \tag{2.54}$$

在这里介绍这个方程组是因为它的历史价值。早期的工作者们，包括基尔霍夫本人，在他们的工作中应用过这方程组。该方程组是

包含 b 个未知支路电流的 b 个方程的集合，这些电流能用通常的方法求解。

类似地，如果我们将式(2.53 b)代入式(2.51)，然后再结合式(2.52)，我们得到支路电压方程组

$$\begin{bmatrix} AY \\ B \end{bmatrix} V = \begin{bmatrix} AJ \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.55}$$

该方程组是含有 b 个未知支路电压的 b 个方程的集合。这些方程组没有多少实际应用价值，因为它们包含的方程数还是太多，另有其它较简单的方法可用。

3.2 回路方程组

回路和节点方程组最早是由 MAXWELL 在 1892 年为了有效地解决电网络问题而建立的。它们相当于变量的一个系统组合，这样就使必要的方程数能够减少。本节我们将讨论回路方程组的表示式，节点方程组的表示式将在下节介绍。

由于满足式(2.51)的任何 I 必须包含在 B-空间中，又由于 B′ 的列是 B-空间的一个基底，于是存在着一个 m 矢量 I_m，使

$$I = B'I_m \tag{2.56}$$

矢量 I_m 叫做回路电流矢量，这些方程被认为是回路变换。用回路电流这个名称的理由是因为 I_m 的元素实际上可以理解为沿着用 B 的行定义的回路集环流的电流集。网孔电流这个术语也常作为回路电流用于文献中。本书中，对于具有鱼网网孔外观的平面网络我们将保留网孔电流这个术语。

在数学中，B′ 的列也叫做 B 空间的参考系，I_m 中的元素是 I 关于这个参考系的坐标，因此，我们的问题是获得 I 的坐标，以致使它同时满足式(2.52)和(2.53 a)。在此之前，让我们首先概括以上结果为

推论 2.10： 当且仅当存在一个 m 矢量 $\mathbf{I}_m$，使

$$\mathbf{I} \quad \mathbf{B}'\mathbf{I}_m \tag{2.57}$$

时，有 $\mathbf{QI} \quad \mathbf{0}$.

如果我们应用式(2.57)连同式(2.52)和(2.53 a)，我们得到回路方程组

$$\mathbf{Z}_m\mathbf{I}_m \quad \mathbf{E}_m \tag{2.58}$$

式中

$$\mathbf{Z}_m \quad \mathbf{BZB}' \tag{2.59 a}$$

$$\mathbf{E}_m \quad -\mathbf{BE} \tag{2.59 b}$$

系数矩阵 $\mathbf{Z}_m$ 称为网络的回路阻抗矩阵，矢量 $\mathbf{E}_m$ 叫做回路电压源矢量。式(2.58)描写的是含有 m 个回路电流的 m 个方程的系统。已知这些回路电流，我们就能够从式（2.57）求得支路电流和从式(2.53 a) 求得支路电压。其时间函数由拉普拉斯反变换求得。

在这个公式中除了将方程数从 2 b 减少到 m 以外，指出在大多数情况下，矩阵 $\mathbf{Z}_m$ 和$\mathbf{E}_m$ 能够根据网络通过观察直接写出是有意义的。这个规则通常是简单的（习题 2.17），在有关现代网络理论的许多课本中都能够找到(例如，见 CARLIN 和 GIORDANO[1964])。任何一个电气工程师几乎都会不通过式(2.59)的矩阵乘法来获得回路方程组。

我们将通过下面的例子说明上述情况。

例题 2.1：考虑如图 2.13 所示的梯型网络。它对应的有向图 G在图 2.14 中给出。因而我们有 m 3，三个回路的选择如图 2.14 所示，需要满足的条件是 B 为一个基本回路矩阵。

$$\mathbf{B} \quad \begin{array}{c} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.60}$$

$$
\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & L_2 s & Ms & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & Ms & L_2 s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & \dfrac{1}{C_4 s} & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & g_m & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & R_7 & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8
\end{bmatrix} \tag{2.61}
$$

以及 E 的转置由下式给出

$$
\mathbf{E}' = [v_g\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0\ 0] \tag{2.62}
$$

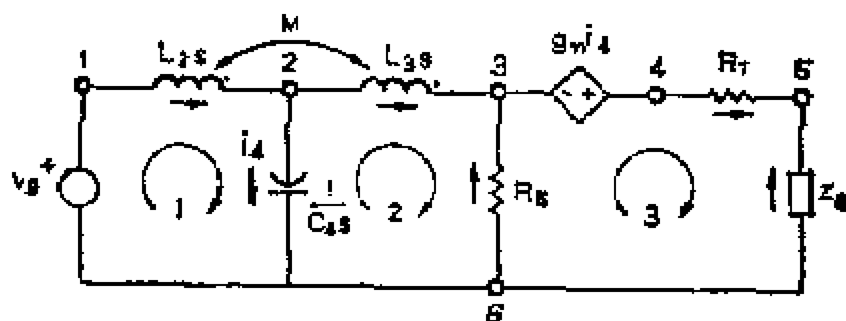


图 2.13 梯型网络简图

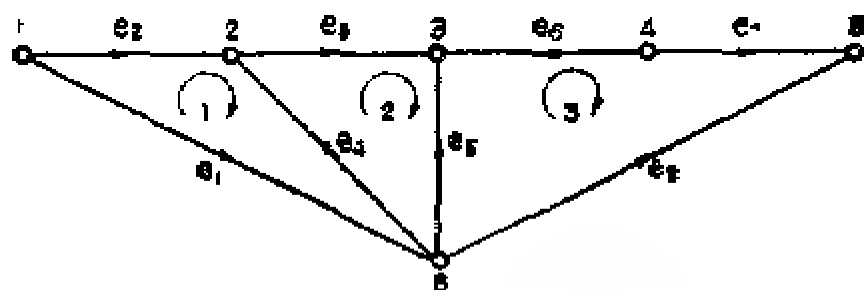


图 2.14 图 2.13 网络和对应的有向图

进行式(2.59)所表示的矩阵乘法运算，我们得到所要求的回路方程组

$$
\begin{bmatrix}
L_2 s + \frac{1}{C_4 s} & Ms - \frac{1}{C_4 s} & 0 \\
Ms - \frac{1}{C_4 s} & L_3 s + R_5 + \frac{1}{C_4 s} & -R_5 \\
-g_m & g_m - R_5 & R_5 + R_7 + Z_8
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m3} \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} v_g \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{2.63}
$$

考察一下矩阵 Z_m 的结构及如图 2.13 中所示的三个回路，回路阻抗矩阵 Z_m 也能根据网络通过观察获得。如果 Z_m 是非奇异的，回路电流矢量 I_m 就能够通过矩阵 Z_m 的逆来计算。支路电流和电压由下式给出

$$
\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m1} \\ i_{m2} \\ i_{m1} - i_{m2} \\ i_{m3} - i_{m2} \\ -i_{m3} \\ i_{m3} \\ i_{m3} \end{bmatrix}
\text{和}
\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix} v_g \\ L_2 s i_{m1} + M s i_{m2} \\ M s i_{m1} + L_3 s i_{m2} \\ (i_{m1} - i_{m2})/C_4 s \\ (i_{m3} - i_{m2}) R_5 \\ (i_{m1} - i_{m2}) g_m \\ i_{m3} R_7 \\ -i_{m3} Z_8 \end{bmatrix}
\tag{2.64}
$$

如果回路电流解释为环绕由 B 定义的回路的环流电流，那么支路电流也能够直观地从网络求得。例如在图 2.13 中，$i_4 = i_{m1} - i_{m2}$ 和 $i_6 = -i_{m3}$。

应该注意到，在这推导过程中用于式(2.52)中的基本回路矩阵也用于式(2.57)中作为回路变换，尽管根据推论 2.10 没有必要这么做。任何一个基本回路矩阵都可被用来进行回路变换。然而，如果两个不同的基本回路矩阵，一个用于式(2.52)，而另一个用于式(2.57)，回路方程组的系数矩阵甚至对互易网络也将是不对称的，

同时列写系数矩阵的规律通常也太复杂以致没有什么用处。由于用后面这样的方法没有普遍性，所以假如使用同一基本回路矩阵将是很方便的。

让我们用下面简单的例子来说明这个观点。

例题 2.2：考虑如图2.15所示的网络及其相应的有向图G。易于找出G的两个基本回路矩阵B和B*，它们由下式给出

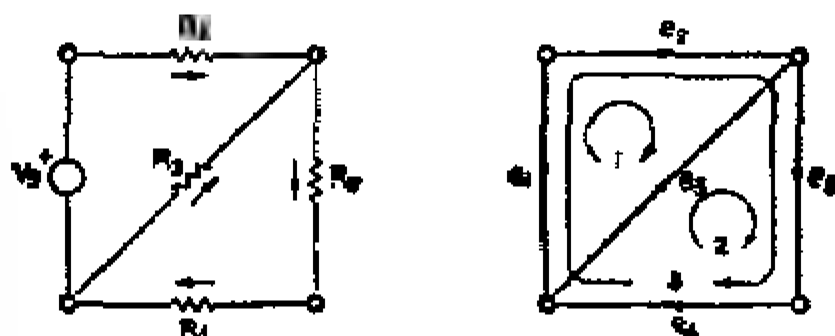


图 2.15　网络及其相应的有向图

$$
\mathbf{B}=\begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \end{array} \\ \begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \tag{2.65}
$$

$$
\mathbf{B}^*=\begin{array}{c} 1 \\ 3 \end{array}\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.66}
$$

支路电压源矢量E的转置E′由下式给出

$$
\mathbf{E}'=[v_g \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{2.67}
$$

网络的支路阻抗矩阵Z求得如下：

$$
\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & R_5 \end{bmatrix} \tag{2.68}
$$

如果将式(2.65)中给出的基本回路矩阵 B 应用到(2.52)和(2.57)二式中，则回路方程组由下式给出

$$\begin{bmatrix} R_2+R_3 & R_3 \\ R_3 & R_3+R_4+R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.69}$$

回路电流即能通过系数矩阵的逆求得

$$i_{m1}=(R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \tag{2.70a}$$

$$i_{m2}=R_3v_g/\Delta \tag{2.70b}$$

式中

$$\Delta=R_2(R_3+R_4+R_5)+R_3(R_4+R_5) \tag{2.70c}$$

从式(2.57)和(2.53a)，我们有

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} (R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \\ (R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \\ -(R_4+R_5)v_g/\Delta \\ R_3v_g/\Delta \\ R_3v_g/\Delta \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_g \\ R_2i_2 \\ R_3i_3 \\ R_4i_4 \\ R_5i_5 \end{bmatrix} \tag{2.71}$$

如果将 B 应用于式(2.52)，同时将 B^* 的转置 $B^{*\prime}$ 应用于式(2.57)，回路方程组变为

$$BZB^{*\prime}I_m=BE \tag{2.72}$$

进行必要的矩阵乘法运算，我们得到

$$\begin{bmatrix} R_2+R_3 & R_2 \\ R_3 & R_4+R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m3} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} v_g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.73}$$

回路电流由下式给出

$$i_{m1}=(R_4+R_5)v_g/\Delta \tag{2.74a}$$

$$i_{m3}=R_3v_g/\Delta \tag{2.74b}$$

式中

$$\Delta=(R_2+R_3)(R_4+R_5)+R_2R_3 \tag{2.74c}$$

支路电流即能由下式计算得出

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{m1} \\ i_{m3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \\ (R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \\ -(R_4+R_5)v_g/\Delta \\ R_3 v_g/\Delta \\ R_3 v_g/\Delta \end{bmatrix} \tag{2.75}$$

上式与(2.71)中给出的相同。支路电压能够从式(2.53a)求得，与式(2.71)中给出的相同。注意式(2.73)中给出的系数矩阵是不对称的，而式(2.69)中给出的系数矩阵是对称的。由于对称性更加方便，所以对回路方程组我们很少选择两个不相同的基本回路矩阵。

另一有趣的值得提起的一点是式(2.63)、(2.69)和(2.73)的系数矩阵全部与电源无关，这是预计到的，因为所有的电源都已经移到方程的右边。换言之，我们能够在网络中所有的电压源均被短接的简化网络中求得回路阻抗矩阵。

由于在有向或无向图中短接一条边并不改变它的零度，所以我们有

推论 2.11：令 G^* 是从一电网络 G 中短接所有对应于独立电压源的边后而获得的有向图，而它所对应的回路数保持不变。如果 B 和 B^* 分别是 G 和 G^* 由对应于回路或边不相接回路的并集形成的基本回路矩阵，又如果在 G 中不存在仅仅由电压源组成的回路，则

$$BZB' = B^* Z_{pp} B^{*\prime} \tag{2.76}$$

式中 Z_{pp} 是式(2.53a)中所定义的。

此推论可直接从式(2.53)中给出的矩阵的分块得出，其证明是简单的，留作练习(习题 2.18)。然而，正如在§2 中提到的，我们无疑地已假设 G 不包含有电流源，即在式(2.53a)中的 E 是一给定的电源矢量。

例如，考察例题 2.1 中给出的问题。G 的简化有向图 G^* 表示在图 2.16 中。应用对应于图中表明的回路集，我们有

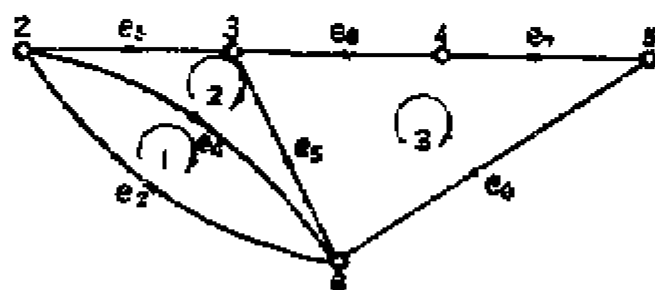


图 2.16　图2.14C的简化有向图G^*

$$
B^* = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array}
\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \end{array}
\tag{2.77}
$$

Z_{pp}是根据式(2.61)从Z中删去第一行和第一列后得到的矩阵。容易检验，在进行必要的乘法运算以后矩阵的积$B^*Z_{pp}B^{*\prime}$给出式(2.63)的系数矩阵。

在结束本节以前，让我们总结这个结果为

定理 2.13：对于一个电网络G，如果回路阻抗矩阵是非奇异的，则G的解由以下两式给出

$$I = B'(BZB')^{-1}BE \tag{2.78}$$

$$V = ZB'(BZB')^{-1}BE - E \tag{2.79}$$

注意，在I和V(电压源支路除外)的解中，E的支路电压源仅表示为乘积 $BE(=E_m)$。这意味着电压源在实际支路上的分配是无关重要的，只有它的回路分配E_m起作用。

3.3 切割方程组

图的割集的概念最早是由WHITNEY 1933年引入的。对于它的特性的研究及其在电网络理论中的应用是由SESHU和REED在1955年和1956年进行的。他们工作的总结是由BRYANT 1961年给出的。本节主要是基于他们的工作进行论述。

切割方程组完全对偶于回路方程组，因此，我们有可能使本节的讨论比前一节进行得快一些。因为任何满足式(2.52)的V必须包含在Q-空间中，又因为Q′的列是Q空间的一个基底，我们有(习题2.23)

推论 2.12：当且仅当存在一个r-矢量V_c，使

$$V=Q'V_c \qquad (2.80)$$

时，有$BV=0$。

矢量V_c叫做切割电压矢量，方程(2.80)称为切割变换。至于切割电压这个名称的由来是因为V_c中的元素能够等同于或者理解为与用Q的行定义的切割有关的电压集。对于某些切割的选择，该切割电压成为网络中某些节点对之间的电压，并称为节点对电压(KRON[1939])。如果Q为Q_f，则V_c中的变量就是定义Q_f的树的树支电压。如果Q为A，则变量称为节点对基准点电压。在可能理解为节点对电压的情况下，切割变换也称为节点对变换。

因此，和回路方程组的表示式一样，我们接下去的问题是获得对应于用Q′的列定义的参考系统的V的坐标，使式(2.51)和(2.53b)也得到满足。这容易通过简单的代换获得，结果由下式给出

$$Y_cV_c=J_c \qquad (2.81)$$

式中

$$Y_c=QYQ' \qquad (2.82a)$$

$$J_c=QJ \qquad (2.82b)$$

式(2.81)中给出的方程组称为切割方程组。系数矩阵Y_c叫做网络的切割导纳矩阵，J_c叫做切割电流源矢量。式(2.81)描述的是含有r个切割电压的r个方程组。已知这些切割电压，我们就能够从式(2.80)求得支路电压和从式(2.53b)求得支路电流。其时间函数通过拉普拉斯反变换求得。

和回路情况一样，在(2.51)和(2.80)二式中没有必要采用相同的基本切割矩阵Q。然而，如果对式(2.51)和式(2.80)采用的是两个不同的基本切割矩阵，则切割方程组的系数矩阵甚至对互易网络

也将是不对称的。由于用这样的方法不具有普遍性，可以规定采用同一基本切割矩阵比较方便。

如果 Q 是 A，切割方程组也称为节点方程组，这首先是由 MAXWELL 1892 年发现的。节点方程组的系数矩阵是众所周知的节点导纳矩阵，用符号 $Y_n = AYA'$ 表示，矢量 $J_n = -AJ$ 叫做节点电流源矢量。因为矩阵 Y_n（见第四章§2）的特殊形式，又因为矩阵 Y_n 和 J_n 的元素通过观察能够容易得出（习题 2.21），而且 V_n 中的元素能够等同于网络中的节点对参考点的电压，所以节点法在电网络的实际分析中已得到广泛应用。

定理 2.14，对于一电网络 G，如果切割导纳矩阵是非奇异的，则 G 的解由以下两式给出

$$V = Q'(QYQ')^{-1}QJ \tag{2.83}$$

$$I = YQ'(QYQ')^{-1}QJ + J \tag{2.84}$$

值得注意，在 V 和 I（电流源支路除外）的解中，J 中的支路电流源仅表示为乘积 $QJ(=J_c)$。这意味着电流源在实际支路中的分配是无关重要的，只有切割分配 J_c 起作用。

我们将用下列例题说明上述过程。

例题 2.3，考虑如图 2.17 所示的网络及其对应的有向图 G。G 的两个基本关联矩阵 A 和 A^* 由下式给出

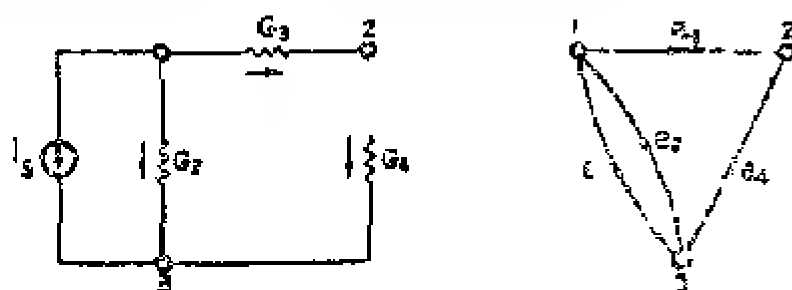


图 2.17 网络及其对应的有向图

$$A = \begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 \\ 1 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{matrix} \tag{2.85}$$

$$A^* = \begin{matrix} 2 \\ 3 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.86}$$

支路电流源矢量J的转置J^T由下式给出

$$J^T = [i_g \quad 0 \quad 0 \quad 0] \tag{2.87}$$

网络的支路导纳矩阵Y求得如下：

$$Y = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_4 \end{bmatrix} \tag{2.88}$$

如果将式(2.86)的基本关联矩阵A应用到式(2.51)和(2.80)，节点方程组能通过进行必要的矩阵乘法运算求得，并由下式给出

$$\begin{bmatrix} G_2+G_3 & -G_3 \\ -G_3 & G_3+G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{n1} \\ v_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.89}$$

节点对基准点电压 v_{n1} 和 v_{n2} 能通过对节点导纳矩阵求逆得到，并由下式给出

$$v_{n1} = (G_3+G_4)i_g/\Delta \tag{2.90 a}$$

$$v_{n2} = G_3 i_g/\Delta \tag{2.90 b}$$

式中

$$\Delta = G_2(G_3+G_4)+G_3G_4 \tag{2.90 c}$$

从式(2.80)和(2.53 b)，有

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (G_3+G_4)i_g/\Delta \\ (G_3+G_4)i_g/\Delta \\ G_4 i_g/\Delta \\ G_3 i_g/\Delta \end{bmatrix} \text{和} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ G_2 v_2 \\ G_3 v_3 \\ G_4 v_4 \end{bmatrix} \tag{2.91}$$

如果变量 v_{n1} 和 v_{n2} 分别解释为从节点1和2到基准节点3的电位差，即节点对基准点的电压，支路电压也能够直观地根据网络获得。例如在图2.17中，支路电压 v_3 等于从节点1到节点2的电位差，即 $v_3 = v_{n1}-v_{n2}$。类似地，支路电压 v_2 与节点对基准点电压 v_{n1} 是相同的。

现在，如果将 A 应用到式(2.51)，又如果将 $\mathbf{A}^*$ 的转置 $\mathbf{A}^{*\prime}$ 应用到式(2.80)，则节点方程组变为

$$\mathbf{AYA}^{*\prime}\mathbf{V}_n = -\mathbf{AJ} \tag{2.92}$$

进行矩阵乘法运算，我们有

$$\begin{bmatrix} G_3 & -G_2 \\ G_3+G_4 & G_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_{n2} \\ v_{n3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.93}$$

节点对基准点电压 v_{n2} 和 v_{n3} 由下式给出

$$v_{n2} = G_4 i_g/\Delta \tag{2.94a}$$

$$v_{n3} = -(G_3+G_4)i_g/\Delta \tag{2.94b}$$

式中

$$\Delta = G_3G_4 + G_2(G_3+G_4) \tag{2.94c}$$

支路电压能够从式(2.80)通过 $\mathbf{V} = \mathbf{A}^{*\prime}\mathbf{V}_n$ 来计算，支路电流从式(2.53b)来得，它们与式(2.91)中给出的相同。如果变量 v_{n2} 和 v_{n3} 分别解释为从节点 2 和 3 到基准节点 1 的电位差，支路电压也能直观地从图 2.17 中给出的网络得到，例如支路电压 v_3 是从节点 2 到节点 1 的电位差的负值，即 $v_3 = -v_{n2}$。类似地，支路电压 v_4 等于从节点 2 到节点 3 的电位差，即 $v_4 = v_{n2} - v_{n3}$。显然，$\mathbf{V}_n$ 中变量的物理解释为节点对基准点的电压仅仅是对关联矩阵适用。以前我们已经提到过，如果 A 是从 $\mathbf{A}_a$ 删去第 i 行后得到的矩阵，则对应于第 i 行的节点叫做基准节点。用这个名称的原因现在是显而易见的，因为它对应于节点对基准点电压的参考点。

另外值得指出的是式(2.93)中的系数矩阵是不对称的，而式(2.89)中给出的系数矩阵是对称的。由于对称性更方便，所以我们对于切割方程组很少选择两个不同的基本切割矩阵。

为了说明意图，让我们对一个更复杂的含有一个单向导电网络元件的网络用公式表示切割方程组。

例题 2.4：考虑如图 2.18 所示的网络，它相当于例题 2.1 中

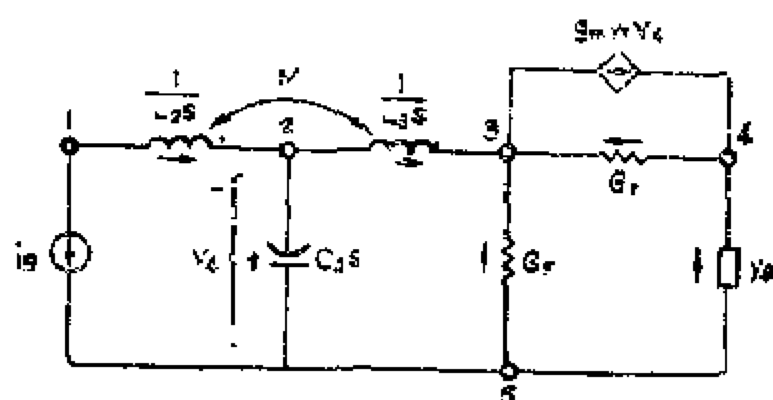


图 2.18 网络的电路图

所考虑的网络。网络对应的有向图G在图 2.19 中给出。

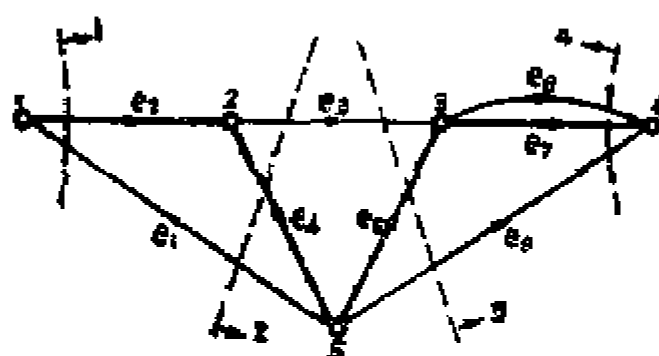


图 2.19 图 2.18 网络对应的有向图

因此，我们有 $r=4$，考虑G的关于树 $t=e_2e_4e_5e_7$（在图 2.19 中用粗线表示）的f-割集矩阵 Q_f，则

$$
Q_f=\begin{matrix} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \\ 4 \end{matrix}
\begin{matrix} e_2 & e_4 & e_5 & e_7 & e_1 & e_3 & e_6 & e_8 \\ \end{matrix}
\left[\begin{matrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & -1
\end{matrix}\right] \qquad (2.95)
$$

网络的支路导纳矩阵Y求得如下

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}
L_3/YS & 0 & 0 & 0 & 0 & -M/YS & 0 & 0 \\
0 & C_4S & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & G_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & G_7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
-M/YS & 0 & 0 & 0 & 0 & L_2/YS & 0 & 0 \\
0 & g_mY_7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Y_8
\end{bmatrix} \tag{2.96}
$$

式中 $Y=L_2L_3-M^2(Y\neq 0)$，$Y_7=G_7C_4S$. 支路电流源矢量的转置 $\mathbf{J}'$ 由下式给出

$$
\mathbf{J}'=[\,0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ i_s\ \ 0\ \ 0\ \ 0\,] \tag{2.97}
$$

进行式(2.82)所表示的矩阵乘法运算，我们得到所需要的切割方程组

$$
\begin{bmatrix}
L_3/YS & -M/YS & -M/YS & 0 \\
-M/YS & C_4S+L_2/YS & L_2/YS & 0 \\
-M/YS & L_2/YS & G_5+L_2/YS+Y_8 & Y_8 \\
0 & g_mY_7 & Y_8 & G_7+Y_8
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_{c2} \\ v_{c4} \\ v_{c5} \\ v_{c7} \end{bmatrix}
=\begin{bmatrix} i_s \\ i_s \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.98}
$$

注意 $\mathbf{V}_c$ 中变量的下标对应于t的树支，由于这个缘故它们可以等同于树支电压。例如支路电压 v_x 与切割电压 v_{cx} 相同，即 $v_x=v_{cx}$，其中 $x=2，4，5，7$。现在如果系数矩阵 $\mathbf{Y}_c$ 是非奇异的，则切割电压能够计算。但计算矩阵 $\mathbf{Y}_c$ 的逆是相当冗长的，一种称为拓扑分析的简捷方法将在第4章中介绍。

与上一节中讨论的回路情况一样，切割导纳矩阵也能从将所有独立电流源移去后的简化网络求得。重提一下，我们假设在原来的

网络中不存在电压源。

推论 2.13：设 G^* 是从一电网络G中移去所有对应于独立电流源的那些边后获得的有向图，而保持对应的切割数不变。如果Q和 Q^* 分别是由对应节切割集合形成的G和 G^* 的基本切割矩阵，又如果G中不存在仅由电流源组成的节切割，则

$$QYQ' = Q^*Y_{pp}Q^{*\prime} \tag{2.99}$$

式中 Y_{pp} 是在式(2.53b)中定义的。

该推论的证明是简单的，留作练习(习题2.24)。

3.4 附加考虑

在前面两节中，我们已经介绍了关于求解网络问题的两种有用的方法。不过，这些规范化的步骤并不是对所有问题总是最简单的方法。在许多一般性的问题中，凭观察和采用简捷方法比求解回路和切割方程组提供的解答要容易得多。这些公式的真正价值在于它们的普遍性，这样它们就能为数字计算机编制程序。尽管这些方法中的任何一种都可以用来解决一般的网络问题，但是其中包含的方程数是不同的。因而系统的选择取决于所探讨网络的类型。

讨论进行到这里，已经涉及到与网络元件有关的支路电流和支路电压。由于这些量在能直接可测的意义上更加基本，它们通常被认为是基本的变量。前面介绍的回路电流和切割电压是用来计算基本变量的辅助变量例子。辅助变量的另一种类型定义为电流和电压的乘积。作为参考常规，这里我们采用乘积

$$P_k(t) = i_k(t)v_k(t) \tag{2.100}$$

定义为功率函数，它对应于支路k中吸收的功率，如果我们对式(2.100)在任何两个界限 t_0 和t之间求积分

$$w_k(t) = \int_{t_0}^{t} P_k(x)dx \tag{2.101}$$

我们还引入另一个辅助变量叫做能量函数。在下面我们将证明，如果能量函数是常规的，基尔霍夫两个定律意味着能量守恒的意思。

换言之，对于电网络理论的研究能量守恒不必作为一个公理再加进去(习题 2.61 和 2.62)。

定理 2.15(特勒根定理[1952])：如果网络G中的电流和电压分别满足基尔霍夫电流定律和电压定律，则

$$\sum_{k=1}^{b} P_k(t)=0 \tag{2.102}$$

证明：由于

$$\sum_{k=1}^{b} P_k(t)=I'(t)V(t) \tag{2.103}$$

该定理是从 I(t) 和 V(t) 是互相正交的事实得出的(推论 2.5 和 2.7)。

定理 2.16：如果能量函数是绝对连续函数，以致式(2.101)及其导数都存在，则基尔霍夫定律意味着能量守恒：

$$\sum_{k=1}^{b} w_k(t)=\text{常数} \tag{2.104}$$

§ 4. 网络行列式及其广义代数余子式的不变性和相互关系

一个网络的回路阻抗矩阵或切割导纳矩阵的行列式的零点叫做网络的自然频率。众所周知，这些频率表示网络的自然响应特性。因此，看来网络的自然响应似乎也依赖于回路或切割的选择。这样一种依赖关系是与电网络的状态客观存在矛盾的。因此，有必要说明情况并非如此。

本节的主要目的是说明网络函数对于网络参考结构的一般变换是不变量。我们还要指出不少网络的不变量性质取决于它的拓扑结构而不是网络元件特性。因此，这些特性不仅对电网络适用而且对其它的系统也适用。

4.1 简史

关于节点导纳矩阵行列式的不变量特性与参考节点的选择无关首先是由 JEANS 在 1925 年提出，而后由 PERCIVAL 和 SHEKEL 在 1954 年重新发现。关于回路阻抗矩阵的行列式也常有同一陈述（例如，见 TSANG[1954]）。由 SESHU 1955 年指出在一般情况下回路阻抗矩阵的行列式在回路变换下不是不变量。然而，它们是通过仅取决于两种回路集选择的一实常数相联系的。OKADA 在 1955 年指出用 f 回路形成的回路阻抗矩阵的行列式是不变量，但是通常当应用的是切割变量时，切割导纳矩阵的行列式不再保持是不变量。CEDERBAUM 1956 年考虑具有更普遍性的问题，同时指出对于一般的回路系统或一般的割集描述虽然这些行列式不是不变量，但是对于大多数通用系统和象 f 回路、f 割集，以及由平面网络的网孔形成的回路这样一类的网络描述的主要类型都是不变量。他还指出回路阻抗矩阵行列式与割集导纳矩阵行列式在不变量的条件下，其比率等于网络的支路阻抗矩阵的行列式。这是对 TSANG 1954 年比较早期工作的推广。网络行列式不变量特性引伸到代数余子式的不变量特性最近由 CHEN[1970 年]给出，他还指出许多不变量特性能够从纯图论的观点导出。因此，不变量特性取决于网络拓扑而不是网络元件特性。本节主要是建立在 Cederbaum 和 Chen 工作的基础上。

4.2 初步考虑

令 $S_x=\{1, 2, \cdots, x\}$。对于一 $p\times b$ 阶的给定矩阵 F，设 $F(I_u, J_v)$ 分别是由对应于集合 I_u 和 J_v 中整数的行和列所组成的 F 的子矩阵，其中 $I_u=\{i_1, i_2, \cdots, i_u\}$ 和 $J_v=\{j_1, j_2, \cdots, j_v\}$ 分别是 S_p 和 S_b 的子集。如果 $p\leqq b$，我们用 $F(J_p)$ 表示 $F(I_p, J_p)$。det $F(J_p)$ 称为 F 的主行列式。显然，如果 $F(J_p)$ 是非奇异的，则它是 F 的大子矩阵（见定义 2.4）。除非有相反的规定，在本章中我们用

$\bar{J}_v$ 表示在 S_b 中子集 J_v 的补集。

众所周知，方矩阵乘积的行列式等于它们各自行列式的乘积，但对于非方矩阵的乘积，它的行列式也许不那么熟悉。为此，我们将陈述矩阵理论中的一个定理叫做比耐-柯西定理。该定理对于许多推导应用相当广泛。

定理 2.17(比耐-柯西定理)：如果 C、D 和 F 分别是 $p\times q$、$q\times s$ 和 $s\times p$ 的矩阵，在域($p\leq q$，s)上，则

$$\det CDF = \sum_{(I_p)}\sum_{(J_p)} \det C(I_p)\det D(I_p,\ J_p)\det F(J_p,\ I_p) \tag{2.105}$$

式中 I_p 和 J_p 分别是集合 S_q 和 S_s 的子集，同时和式是对所有可能存在的这样的子集 I_p 和 J_p 求和。

该定理在网络理论中具有很大的重要性，它在拓扑和网络矩阵之间起桥梁作用。网络理论中的许多拓扑公式是通过应用这个定理得到的。

另一个我们需要的定理称为雅各比定理，它可以陈述如下：

定理 2.18(雅各比定理)：对于一个 b 阶的非奇异矩阵 D，如果 C 是 D 的逆矩阵，则

$$\det D \det C(I_u,J_u) = (-1)^{\sum i+\sum j}\det D(\bar{J}_u,\bar{I}_u) \tag{2.106}$$

式中 $\sum i$ 和 $\sum j$ 分别表示包含在 I_u 和 J_u 中整数的和，I_u 和 J_u 是 S_b 的子集。

上述两个定理的证明可以从矩阵理论的教科书中找到(例如，见 AITKEN[1962])，因此这里不再给出。

作为雅各比定理的一个例子，让我们考虑矩阵

$$D = \begin{bmatrix} 8 & 2 & 1 \\ 4 & 8 & 2 \\ 2 & 4 & 8 \end{bmatrix} \tag{2.107}$$

D 的逆矩阵由下式给出

$$C=D^{-1}=\frac{1}{392}\begin{bmatrix}56 & -12 & -4\\ -28 & 62 & -12\\ 0 & -28 & 56\end{bmatrix} \tag{2.108}$$

式中 $\det D=392$，因此有

$$\det D\det C(\{1,2\},\{2,3\})=\frac{1}{392}\begin{vmatrix}-12 & -4\\ 62 & -12\end{vmatrix}=1$$

和

$$(-1)^{1+2+2+3}\det D(\{1\},\{3\})=1$$

证实了雅各比定理。

在插进矩阵理论中的两个定理的讨论以后，让我们回到有向图的回路矩阵和切割矩阵。由于 B' 和 B'_f 以及 Q' 和 Q'_f 的列分别是 B-空间和 Q 空间的两个基底，显然，存在阶数分别为 m 和 r 的非奇异矩阵 C 和 D，使(引理 2.3 和 2.6)

$$B=CB_f \text{ 和 } Q=DQ_f \tag{2.109}$$

由于 Q 和 B 的大子矩阵与有向图 G 的树和补树具有一一对应关系(定理 2.5 和 2.8)，于是

$$B(I_m)=CB_f(I_m) \tag{2.110}$$

$$Q(J_r)=DQ_f(J_r) \tag{2.111}$$

特别是，如果 M 和 N 分别是 B 和 Q 的大子矩阵对应于定义 B_f 和 Q_f 的单位矩阵 U_m 和 U_r 的补树 $\bar{t}$ 和树 t，则

$$C=M \quad \text{和} \quad D=N \tag{2.112}$$

定义 2.22：全单位模矩阵。

一个矩阵具有这样的特性，它的每一个子方阵的行列式都是1，-1 或 0，则该矩阵叫做全单位模矩阵。

这个定义和雅各比定理的直接推断如下：

推论 2.14： 如果一个非奇异方矩阵是全单位模矩阵，则它的逆矩阵也是全单位模矩阵。

定理 2.19： 一连通有向图 G 的关联矩阵 A_a，f 回路矩阵 B_f

和 f 割集矩阵 Q_f 都是全单位模矩阵。

证明：第一部分。A_a 是全单位模矩阵。考虑 A_a 的任一非奇异子矩阵。由于该子矩阵的每一列至多具有两个非零项 1 和 −1，又由于不是每一列都同时具有 1 和 −1，由此可见，至少必须存在一列只具有一个非零项，否则该子矩阵将是奇异的。用这一列展开该子矩阵的行列式，通过归纳法我们得到需要的结果。

第二部分。B_f 是全单位模矩阵。令 A 按照式(2.22a)分块，其中 A_{12} 是对应于定义 B_f 的树 t 的树支的子矩阵。考虑非奇异矩阵

$$F = \begin{bmatrix} U_n & 0 \\ A_{11} & A_{12} \end{bmatrix} \tag{2.113}$$

由于在第一部分中我们已经证明 A 是全单位模矩阵，对 F 通过应用拉普拉斯展开式，易于证明 F 也是全单位模矩阵。现在将 F 的逆给出如下：

$$F^{-1} = \begin{bmatrix} U_m & 0 \\ -A_{12}^{-1}A_{11} & A_{12}^{-1} \end{bmatrix} \tag{2.114}$$

根据推论 2.14，F^{-1} 也是全单位模矩阵。由于一个全单位模矩阵的子矩阵也是全单位模矩阵，根据式(2.23a)，子矩阵

$$\begin{bmatrix} U_m \\ -A_{12}^{-1}A_{11} \end{bmatrix} \tag{2.115}$$

是 B_f 的转置，它是全单位模矩阵。

第三部分，Q_f 是全单位模矩阵。从式(2.23b)我们有

$$Q_f = [A_{12}^{-1}A_{11} \quad U_r] \tag{2.116}$$

根据式(2.114)，$A_{12}^{-1}A_{11}$ 是全单位模矩阵，所以易于证明 Q_f 也是全单位模矩阵。定理证华。

这个定理的第一部分首先是由 VEBLEN 和 FRANKLIN 在 1921 年建立的。对于 B_f 和 Q_f 由于它们是用 G 的树来定义的，所以有必要假设 G 是连通图。但对于 A_a 没有这个必要。显然，这些结论容易引伸到非连通有向图用来考虑每一个片的 f 回路和 f 割

集，

应用定理2.19连同式(2.110)和(2.111)，我们有

推论2.15： 一有向图的 B 或 Q 的所有大子矩阵的行列式具有相同的量值。

因此，如果 $B(I_m)$ 和 $Q(J_r)$ 分别是 B 和 Q 的大子矩阵，设

$$K(B)=[\det B(I_m)]^2 \tag{2.117}$$

和

$$k(Q)=[\det Q(J_r)]^2 \tag{2.118}$$

由于 $B(I_m)$ 和 $Q(J_r)$ 的元素是 1，-1 或 0，则 $k(B)$ 和 $k(Q)$ 的值必须是奇数的平方

作为一个例子，在图2.1的有向图G中，由子图 $e_1e_5e_6e_3e_4$，$e_1e_2e_6e_7e_4$，$e_1e_2e_3e_7e_8$ 和 $e_5e_2e_3e_4e_8$ 形成的回路所定义的基本回路矩阵 B 为

$$B=\begin{matrix} \\ (e_1e_5e_6e_3e_4) \\ (e_1e_2e_6e_7e_4) \\ (e_1e_2e_3e_7e_8) \\ (e_5e_2e_3e_4e_8) \end{matrix}\begin{matrix} \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 & e_8 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \tag{2.119}$$

容易检验，B 的所有大子矩阵的行列式的值均为 3。因此，$k(B)=9$。

OKADA在1955年指出，如果与 B 的行相对应的回路连同假设由每个回路的边界所形成的 m 个面，构成所谓非定向簇的拓扑结构，则 B 的每一大子矩阵的行列式由 $\pm 2^i$ 给出，这里 i 是由给定的 B 确定的非负整数。换言之，对于这种类型的回路，我们有 $k(B)=2^{2i}$。显然，不是所有的基本回路矩阵都具有这样的特性，上面给出的就是相反的一例。

从以上讨论，显然 $k(A)=1$，$k(B_f)=1$ 和 $k(Q_f)=1$。这是对

G的任一B和Q可能获得的最小值。然而，它们不仅仅是对以上的大子矩阵的行列式具有这个最小值。事实上，当且仅当存在大子矩阵$B(I_m)$和$Q(J_r)$，分别使$\det B(I_m)=\pm 1$和$\det Q(J_r)=\pm 1$，则$k(B)$和$k(Q)$都具有这个最小值。对于另一种情况，见习题2.26。

由于$k(B)$和$k(Q)$对于大子矩阵$B(I_m)$和$Q(J_r)$的选择是不变量，选择合适的子矩阵可以大大地简化它们值的计算。完成这种计算的一种方法如下(习题2.25)。

推论 2.16：如果B和Q只含有一个非零项的列，又如果B_1和Q_1分别是从B和Q中删除这一列和包含这一列中非零项的行后得到的矩阵，则

$$k(B)=k(B_1)\text{和}k(Q)=k(Q_1) \qquad (2.120)$$

显然，可以在B_1和Q_1中重复以上过程直到没有这样的列为止。它可以作如下解释：如果e_1是只包含在G中一个回路比如说L_1中的一条边，则B有一个列其组成是对应于回路L_1的行的元素为1或-1，同时所有其它元素为零。这样，我们可以从G中移去e_1，同时在建立回路矩阵B_1时不管L_1。显然，B_1能够从B中删去对应于L_1的行和对应于e_1的列后得到，换言之，B_1是有向图G_1的一个基本回路矩阵，而G_1是从G中移去边e_1同时不考虑G中的回路L_1得到的。如果在这过程以后，另一个回路比如说L_2，有G_1的一条边单独出现在L_2中或相当于矩阵B_1具有一个仅由一个非零项和0组成的列。我们可以从G_1中移去此边或者也可以从B_1中删除对应的行和列，这个过程可以继续到所有这样的边和回路都已移去为止。假设最后的有向图和它对应的基本回路矩阵用符号G_s和B_s表示。如果G_s或B_s是空的，则$k(B)=1$，不然的话，则$k(B)=k(B_s)$。这个过程对G的切割或由这些切割形成的切割矩阵也同样适用。唯一的区别是每次我们短接G中的一条边而不是从G中移去一条边。如果我们将这个过程应用到A，B_f和Q_f，我们得到G_s是空的。因此，$k(A)=k(B_f)=k(Q_f)=1$。

直到现在讨论是在任意有向图G的基础上进行的。如果G是平

面图，则将采用称为网孔的一组重要回路。回忆一下对于一平面图规定的区域定义(定义 1.17)，区域的网孔是用区域的边界形成的回路。为了方便起见，对平面图 G，我们将用符号 B_p 表示由对应于 G 的网孔集的行所组成的回路矩阵 B_a 的子矩阵。

例如在图 2.16 中，由子图 e_2e_1、$e_3e_4e_5$ 和 $e_5e_6e_7e_8$ 形成的回路是有向图的网孔，对应于这些网孔的矩阵 B_p 由下式给出

$$B_p=\begin{matrix}1\\2\\3\end{matrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\0 & 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0\\0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & -1\end{bmatrix} \tag{2.121}$$

现在，如果对式 (2.121) 的 B_p 应用上述的简化步骤，我们得到 $k(B_p)=1$。根据网孔的定义，不难看到在一般的情况下都是适用的(习题 2.25)。因此，我们可以陈述

推论 2.17 如果一有向图 G 是平面图，则 B_p 是 G 的基本回路矩阵，而且 $k(B_p)=1$。

4.3 回路和切割变换

在许多场合中，网络变量的线性变换对于简化网络计算或显示网络特性是有用的。最简单的一种变换是从一给定的 m 个回路电流或 r 个切割电压的集合改变到另一组 m 个回路电流或 r 个切割电压。

设

$$Z_mI_m=E_m \tag{2.122}$$

式中 $Z_m=BZB'$ 和 $E_m=BE$，同时

$$Z_m^*I_m^*=E_m^* \tag{2.123}$$

式中 $Z_m^*=B^*ZB^{*'}$ 和 $E_m^*=B^*E$。上两式是给定网络 G 的两个回路方程组，它分别与所选择的两个不同的基本回路矩阵 B 和 B^* 相对应。由于 B 和 B^* 是由一非奇异变换 C 相联系，

$$B=CB^* \tag{2.124}$$

经过一简单的代换后，有

$$Z_m = CZ_m^*C' \tag{2.125a}$$

$$E_m = CE_m^* \tag{2.125b}$$

$$I_m = C'^{-1}I_m^* \tag{2.125c}$$

这最后一个方程是根据以下论据获得的，由于

$$I = B'I_m = B^{*\prime}C'I_m = B^{*\prime}I_m^* \tag{2.126}$$

又由于 B^* 是基本回路矩阵，我们有 $C'I_m = I_m^*$。另一种可能性是在§3.2中提及的，我们可以把 I_m^* 和 I_m 的元素理解为在B空间中支路电流矢量I对于分别由 $B^{*\prime}$ 和 B' 的列形成的两个不同的参考系统的坐标集合。由于 $B' = B^{*\prime}C'$，于是 $I_m^* = C'I_m$。这是众所周知的矩阵理论中的坐标变换。

举例说明，考虑式(2.65)和(2.66)中对如图2.15中所示的有向图G给出的两个基本回路矩阵。由于B也是关于树 $t = e_1e_3e_5$ 的f-回路矩阵，从式(2.112)有

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.127}$$

和 $B = CB^*$。因此，从式(2.125)我们得到

$$Z_m = CZ_m^*C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} R_2+R_3 & R_2 \\ R_2 & R_2+R_4+R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_2+R_3 & -R_3 \\ -R_3 & R_3+R_4+R_5 \end{bmatrix} \tag{2.128a}$$

$$E_m = CE_m^* = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_g \\ -v_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_g \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.128b}$$

此结果和式(2.69)中给出的一样，同时

$$I_m = C'^{-1}I_m^* = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (R_4+R_5)v_g/\Delta \\ R_3v_g/\Delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (R_3+R_4+R_5)v_g/\Delta \\ R_3v_g/\Delta \end{bmatrix} \tag{2.128c}$$

式中Δ是式(2.70c)中所定义的。此结果和式(2.70)中给出的一样。

类似地，如果

$$Y_cV_c = J_c \tag{2.129}$$

式中$Y_c = QYQ'$和$J_c = -QJ$，同时

$$Y_c^*V_c^* = J_c^* \tag{2.130}$$

式中$Y_c^* = Q^*YQ^{*\prime}$和$J_c^* = -Q^*J$，是网络G分别与所选择的两个不同的基本切割矩阵Q和Q^*相对应的两个切割方程组，那么存在一个r阶的非奇异矩阵D，使

$$Q = DQ^* \tag{2.131}$$

因此，有

$$Y_c = DY_c^*D' \tag{2.132a}$$

$$J_c = DJ_c^* \tag{2.132b}$$

$$V_c = D'^{-1}V_c^* \tag{2.132c}$$

4.4 网络矩阵

在上一节中，我们已经讨论过从一个回路方程组或切割方程组变换到另外一个的问题。由于一个网络G的回路阻抗矩阵或切割导纳矩阵的行列式的零点也是G的自然频率，可以预计，对于回路或切割的不同选择，其自然频率将是不变量。本节中我们将讨论在怎样的条件下，对于从一个这样的方程组变换到另一个时，这些行列式的值是不变量以及它们相互间的关系。

定义2.23：网络矩阵。

对于一有向图G，三部分矩阵的乘积BZB'和QYQ'叫做G的网络矩阵，这里Z和Y是给定的b阶矩阵。

定理2.20： 设B_1和B_2是G的两个基本回路矩阵，又设Q_1和Q_2是G的两个基本切割矩阵，则

$$k(B_2)\det B_1ZB_1' = k(B_1)\det B_2ZB_2' \tag{2.133}$$

和

$$k(Q_2)\det Q_1YQ_1' = k(Q_1)\det Q_2YQ_2' \tag{2.134}$$

证明：我们仅将证明回路部分，因为切割部分能够用完全类似的方法证明。设M_1和M_2分别为对应于B_1和B_2的大子矩阵。则从式(2.112)我们有

$$B_f = M_1^{-1}B_1 = M_2^{-1}B_2 \tag{2.135}$$

式中B_f是由与M_1或M_2的列相对应的树定义的。因此我们得到

$$\begin{aligned}\det B_1ZB_1' &= \det[(M_1M_2^{-1}B_2)Z(M_1M_2^{-1}B_2)'] \\ &= \det[(M_1M_2^{-1})(B_2ZB_2')(M_1M_2^{-1})'] \\ &= (\det M_1/\det M_2)^2\det B_2ZB_2' \\ &= [k(B_1)/k(B_2)]^2\det B_2ZB_2'\end{aligned} \tag{2.136}$$

定理证毕。

推论2.18：当且仅当$k(B_1)=k(B_2)$和$k(Q_1)=k(Q_2)$时，则分别有$\det B_1ZB_1'=\det B_2ZB_2'(\neq 0)$和$\det Q_1YQ_1'=\det Q_2YQ_2'(\neq 0)$。

推论2.19：与f-回路或f-割集方程组相联系的网络矩阵的行列式对于从一个这样的方程组变换到另一个时是不变量

显然，对于一给定的Z或Y，网络矩阵行列式的值依赖于给定的G中回路或切割的选择。为了方便起见，我们将用与f-回路或f-割集方程组相联系的值作为我们比较的标准，因为此值对于这些变换是不变量。我们将用网络行列式称谓网络矩阵的行列式。

定义2.24：基本值。

与一个网络的f-回路或f-割集的集合相联系的网络矩阵行列式的值叫做该网络矩阵的基本值。

注意，对于一个网络存在两个基本值，其一是对应于回路公式的，而另一是对应于切割公式的。

推论2.20：对于给定的矩阵Z和Y，网络矩阵BZB'和QYQ'的行列式如果不恒等于零，当且仅当$k(B)=1$和$k(Q)=1$时，具有它们的最小绝对值。

推论2.21：网络行列式等于它的基本值与一个整数的平方相乘。基本值的绝对值是它的最小绝对值。

"绝对"这个词是必要的，因为在Z和Y中的元素可以是复数。这个平方整数实际上是k(B)或k(Q)。

推论2.22：网络矩阵 AYA' 或 B_pZB_p' 的行列式具有它的基本值。

因此，我们可以推断，任何两个回路阻抗矩阵或切割导纳矩阵的行列式是通过一实常数联系的。与f-回路或f-割集方程组相联系的回路阻抗矩阵或切割导纳矩阵的行列式对于从一个这样的方程组变换到另一个时是不变量。

推论2.23：节点导纳矩阵的行列式是一不变量，它与网络中参考节点的选择无关。

证明：设A是以节点i为基准点的网络的基本关联矩阵，因为根据推论2.22detAYA'对于任何i是不变量，这个推论是从节点导纳矩阵AYA'是以节点i作为基准节点得出的。

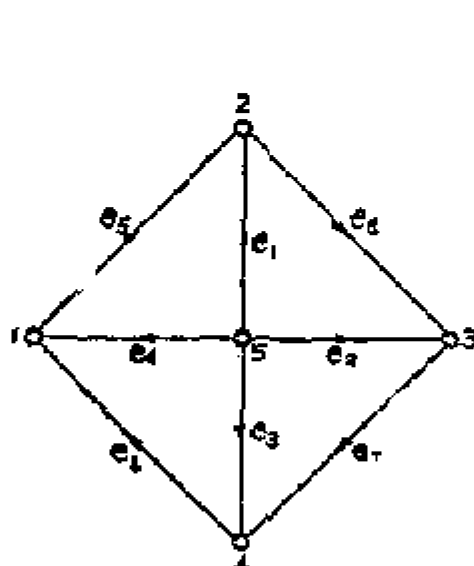


图 2.20　有向图

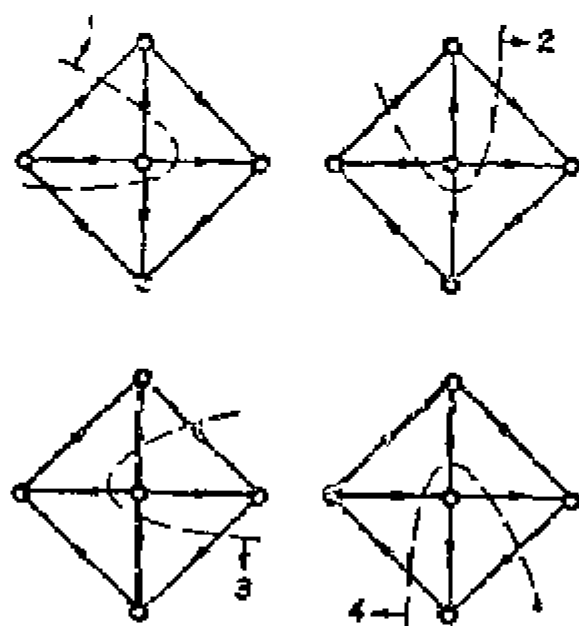


图 2.21　四个选择的割集

例题2.5：考虑如图 2.20 所示的有向图G。对应于如图2.21 中指定的四个割集的基本割集矩阵Q由下式给出

$$
Q=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.137a}
$$

简单一点，设Y是 8 阶的单位矩阵。割集导纳矩阵Y_c由下式给出

$$
Y_c=QYQ'=\begin{bmatrix} 5 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \tag{2.137b}
$$

因此，我们有$k(Q)=3^2$和$\det Y_c=405$。如果A是以节点 5 为基准点的G的基本关联矩阵，则G的节点导纳矩阵Y_n由下式给出

$$
Y_n=AYA'=\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \tag{2.138}
$$

和$\det Y_n=45$，这也是切割导纳矩阵的基本值。因此

$$
\det Y_c=k(Q)\det Y_n \tag{2.139}
$$

以上验证了定理2.20。

现在我们将建立一个重要的结论，它关系到以上讨论的两种类型的网络行列式。然而在做这以前我们需要以下结论。

定理2.21：对于一连通有向图G，G 中树的数目由$\det AA'$给出。

证明：根据式(2.105)给出的比耐一柯西定理，我们得到

$$
\begin{aligned}
\det AA' &= \sum_{(I_r)} \det A(I_r)\det A'(I_r, I_r) \\
&= \sum_{(I_r)} \det A(I_r)\det A(I_r) \\
&= \sum_{(I_r)} 1
\end{aligned}
\tag{2.140}
$$

这第三行是从定理2.19得出的。因为当且仅当$A(I_r)$的列对应于G中某树的树支时，$A(I_r)$是非奇异的(定理2.2)。定理证毕。

推论2.24：G中树的数目由$(\det BB')/k(B)$或$(\det QQ')/k(Q)$给出。

证明：设N是与G中某树t相对应的Q的大子矩阵，又设Q_f是对于树t定义的f割集矩阵。则从式(2.112)我们有$Q=NQ_f$，于是

$$
\begin{aligned}
\det QQ' &= \det NQ_fQ_f'N' = (\det NN')\det Q_fQ_f' \\
&= k(Q)\det AA'
\end{aligned}
\tag{2.141}
$$

第二行是从推论2.18得出的。因此，从定理2.21我们对割集情况得到希望的结果。类似地，我们能够证明回路情况(习题2.29)。注意式(2.141)也可直接从式(2.134)得出。

引理2.8：

$$
(-1)^{\sum i}\det Q(I_r)\det B(I_r) = (-1)^{\sum j}\det Q(J_r)\det B(J_r)
\tag{2.142}
$$

式中$\sum i$和$\sum j$分别表示包含在集合I_r和J_r中整数的和，$Q(I_r)$和$Q(J_r)$是Q的大子矩阵。

证明：设

$$
H' = [Q'B'] \tag{2.143}
$$

则$\det HH' = (\det QQ')(\det BB')$。如果q表示G中树的数目，则根据推论2.24我们有

$$
\det HH' = (\det H)^2 = q^2k(Q)k(B) \tag{2.144a}
$$

即

$$
\det H = \pm q[k(Q)k(B)]^{1/2} \tag{2.144b}
$$

根据前r行的子行列式用拉普拉斯展开式展开$\det H$，我们得到

$$\sum_{(I_r)}(-1)^{\Sigma_r}\det Q(I_r)\det B(I_r)=\sum_{(I_r)}(-1)^{\Sigma_r}(\pm 1)[k(Q)k(B)]^{1/2}$$

$$=[k(Q)k(B)]^{1/2}\sum_{(I_r)}(-1)^{\Sigma_r}(\pm 1)$$

$$=\pm q[k(Q)k(B)]^{1/2}\text{(根据(2.144b))} \quad (2.145)$$

因为在和式中恰恰存在q项，为了使最后一个等式适用，需要在求和符号内的所有项有一致的代数符号。引理证毕。

推论2.25：

$$(-1)^{\Sigma_r+\Sigma}\det Q(I_r)\det Q(J_r)=[k(Q)/k(B)]\det B(I_r)\det B(J_r) \quad (2.146)$$

应用这些结果，现在我们能够阐述并证明显示两类网络行列式关系的一个恒等式。

定理2.22：如果Z是b阶非奇异矩阵，则

$$k(Q)\det BZB'=k(B)(\det Z)\det QZ^{-1}Q' \quad (2.147)$$

证明：设$Y=Z^{-1}$，对$\det BZB'$和$\det QYQ'$的展开式应用比耐—柯西定理，我们得到

$$\det BZB'=\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det B(I_r)\det Z(I_r,J_r)\det B(J_r)$$

$$=\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det B(I_r)\det B(J_r)\det Z(I_r,J_r) \quad (2.148)$$

和

$$\det QYQ'=\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det Q(I_r)\det Q(J_r)\det Y(I_r,J_r)$$

$$=[k(Q)/k(B)]\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}(-1)^{\Sigma_r+\Sigma}\det B(I_r)\det B(J_r)\det Y(I_r,J_r)$$

$$= [k(Q)/k(B)]\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det\mathbf{B}(I_r)\det\mathbf{B}(J_r)\det\mathbf{Z}(J_r,I_r)/(\det\mathbf{Z})$$

$$= \frac{k(Q)}{k(B)\det\mathbf{Z}}\sum_{(I_r)}\sum_{(J_r)}\det\mathbf{B}(I_r)\det\mathbf{B}(J_r)\det\mathbf{Z}(I_r,J_r)$$

$$= k(Q)(\det\mathbf{BZB}')/[k(B)\det\mathbf{Z}] \qquad (2.149)$$

式(2.149)的第三行是根据式(2.106)中给出的雅各比定理得到的。定理证毕。

推论2.26：如果Z是非奇异的，则

$$\det\mathbf{B}_f\mathbf{Z}\mathbf{B}_f' = (\det\mathbf{Z})(\det\mathbf{Q}_f\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{Q}_f') = (\det\mathbf{Z})(\det\mathbf{A}\mathbf{Z}^{-1}\mathbf{A}') \qquad (2.150)$$

注意Z和Y是任意给出的矩阵，它们不必是式(2.42)中给出的那些矩阵。

下面我们将以上结果应用到回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵，并说明它们的行列式具有怎样的关系。

正如前面说起的，一个网络G的回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵仅决定于该网络的参数，与激励源无关。因此，我们可以假设G中不存在独立源，这并不失一般性。如果Z是G的支路阻抗矩阵，又如果它是非奇异的，则根据式(2.42) Z的逆必定是G的支路导纳矩阵Y，即$\mathbf{Y}=\mathbf{Z}^{-1}$。从式(2.150)我们有

推论2.27：一个网络的回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵行列式的基本值的比率，如果存在的话，它等于支路阻抗矩阵的行列式。

在存在不形成任何闭合回路的单向转移导抗⊖的情况下，显然我们能对网络支路重新编号，使存在一个从较低标号支路到较高标号支路(但不能相反)的耦合。结果得到一个三角形的支路阻抗矩阵，其中主对角线以上的所有项均为零(习题2.30)。因此我们得到

推论2.28：如果一个网络的转移导抗不形成任何闭合回路，又如果该网络的回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵行列式的基本值的比率存在，则此比率等于所有支路策动点阻抗的乘积。该比率与转移导

⊖ 互导这个词一般包含互导倒数，互导纳等等。

抗无关。

就这两种类型网络行列式的极点和零点来说，在它们不恒等于零的情况下，结果由下列推论给出，

推论2.29：回路阻抗矩阵行列式的极、零点与切割导纳矩阵行列式的极、零点仅相差包含在支路阻抗矩阵行列式中的那些极、零点。

定义2.25：RLC网络。

仅由电阻器、电容器和自感线圈组成的网络叫做RLC网络。

由于RLC网络，Z和Y成为对角线矩阵并且是非奇异的。这样我们有

推论2.30：对于一个RLC网络，除了在原点和无穷远点以外，回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵的行列式具有相同的零点。

我们将用下面的例子说明以上结果，

例题2.6：考虑如图2.22所示的有向图G。

设

$$Z=\begin{bmatrix} Z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_2 & Z_0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_0 & Z_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & Z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & Z_5 \end{bmatrix} \tag{2.151}$$

图 2.22　例题2.6的有向图

则 Z 的逆 Y 由下式给出

$$Y=Z^{-1}=\begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & Z_3/Z & -Z_0/Z & 0 & 0 \\ 0 & Z_0/Z & Z_2/Z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & y_5 \end{bmatrix} \tag{2.152}$$

式中 $z \quad z_2z_3 \quad z^2_0$ 和 $y_i - 1 \quad z_i$，其中 $i \quad 1,4,5$。与如图2.22所示G的网孔集合相联系的回路阻抗矩阵的行列式由下式给出

$$\det Z_m \quad \det\begin{bmatrix} z_1 + z_2 & z & & z_0 & z_4 \\ -z_0 - z_4 & & z_3 & z_1 & z_5 \end{bmatrix}$$

$$= (z_1 + z_2)(z_3 + z_4 \quad z_5) - z_4(z_3 + z_5) \quad 2z_0z_4 \quad z^2_0 \tag{2.153}$$

以节点4为基准节点的G的节点导纳矩阵的行列式为

$$\det \mathbf{Y}_n \quad \det \mathbf{AYA'} \quad \det\left(\frac{1}{z}\begin{vmatrix} y_1z + z_3 & & z_0 \quad z_3 & -z_0 \\ z_0 \quad z_3 & z_2 & z_3 + y_4z & 2z_0 & z_0 \quad z_2 \\ z_0 & & z_0 \quad z_2 & z_2 + y \; z \end{vmatrix}\right)$$

$$= [y_4 + z_3)(y_4 + y_1z_2y_4 \quad y_5 + y_1$$

$$+ y_1y_5(z_3 \quad z_2 \quad 2z_0) \quad y_1y_4y_5z]/z \tag{2.154}$$

现在容易验证

$$\det \mathbf{Z}_m = (\det \mathbf{Z})(\det \mathbf{Y}_n) \tag{2.155}$$

式中 $\det \mathbf{Z} \quad z_1z_4z_5z$。

应强调，一个网络的回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵的行列式二者之间的关系是在当所有独立源已经去掉后的那部分网络中给定的。为证明这些行列式的确是由式(2.147)联系的，有必要精确地定义应用在这两个公式中的对应网络。如前面已提到的，在回路分析中，我们坚持要求所有源都是电压源，而在切割分析中所有源都是电流源。这并不是一个严格的约束，因为一个电压源能够容易地变换成一个等效的电流源，反之也一样。

设G是一给定的不含有独立源的网络，在回路公式中，设每个电压源已与G的一个无源元件（电阻器、电容器或自感线圈）串联相接。为了方便起见，设电源 e_x 与无源元件 e_{s+x} 串联连接，其中 $x = 1, 2, \cdots, s$，式中 s 是插入的独立电压源的数目，又设如此获

得的网络用 G_v 表示。在切割公式中，设 G_i 是从 G 中将 s 个独立电流源中的每一个与 G 的一个无源元件 e_{s+s} 并联连接后获得的网络。如果恰当地选择相应的电压源和电流源的强度和极性，容易证明网络 G_v 和 G_i 是完全等效的，因为这能够通过应用众所周知的电网络理论中的代文宁定理和诺顿定理从其中一个得到另一个（例如，见 SESHU 和 BAL—ABANIAN[1959]）。

在 G_v 或 G_i 中，设支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵 Z 和 Y 分块如下：

$$\mathbf{Z}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{Z}_{pp}\end{bmatrix}\text{和}\ \mathbf{Y}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & \mathbf{Y}_{pp}\end{bmatrix}\tag{2.156}$$

式中 $\mathbf{Z}_{pp}$ 和 $\mathbf{Y}_{pp}$ 分别是 G 的支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵。如果 B 和 Q 分别是 G_v 和 G_i 的基本回路矩阵和基本切割矩阵，又如果它们采用与 Z 或 Y 相同的边顺序，同时按照下式分块成

$$\mathbf{B}=[\mathbf{B}_{11}\mathbf{B}_{12}]\text{和}\ \mathbf{Q}=[\mathbf{Q}_{11}\mathbf{Q}_{12}]\tag{2.157}$$

则我们有

推论 2.31：如果 $\mathbf{Y}_{pp}$ 是 $\mathbf{Z}_{pp}$ 的逆，则

$$k(\mathbf{Q})\det\mathbf{BZB}'=k(\mathbf{B})(\det\mathbf{Z}_{pp})(\det\mathbf{QYQ}')\tag{2.158 a}$$

和

$$\mathbf{BZB}'=\mathbf{B}_{12}\mathbf{Z}_{pp}\mathbf{B}'_{12}\ \text{和}\ \mathbf{QYQ}'=\mathbf{Q}_{12}\mathbf{Y}_{pp}\mathbf{Q}_{12}'\tag{2.158 b}$$

该推论是显而易见的，因为 B_{12} 和 Q_{12} 通常是 G 的基本回路矩阵和基本切割矩阵。换言之，B_{12} 和 Q_{12} 分别是在推论 2.11 和 2.13 中定义的简化网络 G^* 的基本回路矩阵和基本切割矩阵 B^* 和 Q^*。这简化网络 G^* 可以从不论是 G_v 还是 G_i 中去掉所有的独立源后得到。注意，去掉所有的独立源意指短接所有的电压源和断开(去掉)所有的电流源。

在图 2.22 中，设边 e_1 表示一电压源而不是一无源元件，即在式(2.151)中 $z_1=0$。对应的 G_i 表示在图 2.23 中。G_i 的支路导纳矩阵 Y 是在式(2.152)中让 $y_1=0$ 给出的，注意 Y 不再是 Z 的逆，

因为 **Z** 现在是奇异的。与图 2.22 中所表示的网孔集合相对应的回路阻抗矩阵 $\mathbf{Z}_m$ 的行列式和如图 2.23 所示的网络当以节点 4 为基准点时的节点导纳矩阵 $\mathbf{Y}_n$ 的行列式由以下二式给出

$$
\begin{aligned}
\det\mathbf{Z}_m &= \det\begin{bmatrix} z_2+z_4 & -z_0-z_4 \\ -z_0-z_4 & z_3+z_4+z_5 \end{bmatrix} \\
&= z_2(z_3+z_4+z_5)+z_4(z_3+z_5)-z_0^2-2z_0z_4
\end{aligned}
\tag{2.159}
$$

$$
\begin{aligned}
\det\mathbf{Y}_n &= \det\left(\frac{1}{z}\begin{bmatrix} z_4+z_3+y_4z-2z_0 & z_0-z_2 \\ z_0-z_2 & z_2+y_5z \end{bmatrix}\right) \\
&= (1+z_2y_4+y_5z_3+y_5z_2+y_5y_4z-2z_0y_5)/z
\end{aligned}
\tag{2.160}
$$

易于检验

$$\det\mathbf{Z}_m=(\det\mathbf{Z}_{pp})(\det\mathbf{Y}_n) \tag{2.161}$$

式中 $\det\mathbf{Z}_{pp}=z_4z_5z$，$z=z_2z_3-z_0^2$ 和 $z_4=1/y_4$，$z_5=1/y_5$。等效地，$\mathbf{Z}_m$ 和 $\mathbf{Y}_n$ 是或从 G_s 中短接边 e_1 或从 G_s 中去掉边 e_1 后获得的如图 2.24 所示的简化网络 G^* 的回路阻抗矩阵和节点导纳矩阵。

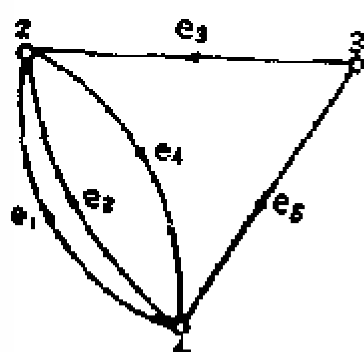


图 2.23 对应的 G_s

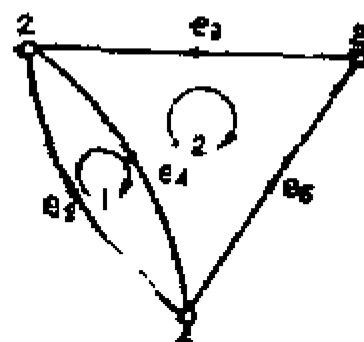


图2.24 简化网络 G^*

4.5 网络矩阵元素的广义代数余子式

在本节中，我们将探讨对一些精确定义为网络矩阵元素的“广义代数余子式”的量是不变量的条件，这些条件可用来证明对于任选的回路或切割，其网络函数是不变量。

对于一个给定矩阵 F，设符号 F_{-i} 用来表示从 F 中删除行 i 后获得的子矩阵。通常由于或是 B_{-i} 或是 Q_{-i} 的大子矩阵行列式没有相同的量值，因此网络矩阵元素的代数余子式对于回路或切割的选择不是不变量。例如考虑式(2.119)中给出的回路矩阵 B。如果我们从 B 中删除第 4 行，则得到

$$B_{-4}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.162}$$

容易检验，由 B_{-4} 的第1、2和3列组成的大子矩阵行列式的值为1，而对应于第2、3和4列组成的大子矩阵行列式的值为 2。因此它们不具有相同的量值。作为代数余子式的一个例子，对图2.15的有向图 G 分别对应于式(2.65)和(2.66)的基本回路矩阵 B 和 B^* 的回路阻抗矩阵 Z_m 和 Z^*_m 求得如下：

$$Z_m=\begin{bmatrix} R_2 \quad R_3 & R_3 \\ R \quad R_3 & R \quad R \end{bmatrix} \tag{2.163}$$

$$Z^*_m=\begin{bmatrix} R_2 \quad R_3 & R_2 \\ R_2 & R_2 \quad R + R \end{bmatrix} \tag{2.164}$$

Z_m 和 Z^*_m 的(1，2) 元素**的代数余子式分别是 R_3 和 $-R_2$。由于 Z_m 和 Z^*_m 也是 G 分别对应于由树 $e_1e_3e_5$ 和 $e_1e_2e_4$ 形成的 f 回路集合的回路阻抗矩阵(除了 f 回路的取向，它将影响 Z^*_m 的非对角线元素的符号)，可以断定，对于从一个 f 回路方程组变换到另一个时，代数余子式甚至不是不变量。对于切割导纳矩阵元素的代数余子式同样适用。

设

$$B=[b_{ij}] \text{和} Q=[q_{ij}] \tag{2.165}$$

定义

$$M_j(B;I_{m-1}) = \sum_{i=1}^{m}(-1)^i b_i \det B_i(I_{m-1}) \qquad (2.166\text{a})$$

$$M_j(Q;I_{r-1}) = \sum_{i=1}^{r}(-1)^i q_i \det Q_i(I_{r-1}) \qquad (2.166\text{b})$$

引理 2.9：设 B 和 B^*是有向图 G 的两个基本回路矩阵，同时又设 Q 和 Q^*是 G 的两个基本切割矩阵，如果 i 不包含在 I_{m-1}和 I_{r-1}中，则

$$k(B^*)^{1/2}|M_j(B;I_{m-1})| = k(B)^{1/2}|M_j(B^*;I_{m-1})| \qquad (2.167\text{a})$$

$$k(Q^*)^{1/2}|M_j(Q;I_{r-1})| = k(Q)^{1/2}|M_j(Q^*;I_{r-1})| \qquad (2.167\text{b})$$

当 j 包含在 I_{m-1}和 I_{r-1}中时，则它们全部成为零。

证明：我们仅将证明回路部分，因为切割的情况能够用完全类似的方法得到证明。如果 j不在 I_{m-1}中，则

$$M_j(B;I_{m-1}) = \pm\det B(I_{m-1}\cup\{j\}) \qquad (2.168\text{a})$$

$$M_j(B^*;I_{m-1}) = \pm\det B^*(I_{m-1}\cup\{j\}) \qquad (2.168\text{b})$$

该引理由此得出。如果 j 在 I_{m-1}中，让我们考虑在 $B(I_{m-1})$中对应于 j 的列的左侧插入 B 的第 j 列而获得的矩阵 R。现在如果我们沿着 R 的插入列展开 detR，我们得到 $\det R = \pm M_j(B;I_{m-1})$。因为R 具有两个完全相同的列，于是 $\det R = 0$。引理证毕。

因此，如果 $M_j(B;I_{m-1})$和 $M_j(B;J_{m-1})$是非零的，从式(2.168a)和推论 2.15 可知它们必须具有相同的量值。对于切割情况这同样是适用的。

推论2.32：$M_j(B_f;I_{m-1})$和 $M_j(Q_f;I_{r-1})$的值，如果不恒等于零，即等于1，因而对于从一个这样的方程组变换到另一个时是不变量。

推论2.33：

---

* 我们指的是 Z_m 或 Z^*_{r1}的第 1 行和第 2 列中的元素。

$$k(B^*)M_i(B;I_{m-1})M_j(B;J_{m-1})=k(B)M_i(B^*;I_{m-1})M_j(B^*;J_{m-1}) \tag{2.169 a}$$

$$k(Q^*)M_i(Q;I_{r-1})M_j(Q;J_{r-1})=k(Q)M_i(Q^*;I_{r-1})M_j(Q^*;J_{r-1}) \tag{2.169 b}$$

推论 2.34：(1)当且仅当对应于 I_{r-1} 中整数的子图是从 G 中通过短接与整数 j 相对应的边 e_j 后获得的有向图 G_α 的一棵树时，则 $M_j(Q;I_{r-1})$ 是非零。

(2) 当且仅当对应于 I_{m-1} 中整数的子图是 $G-e_j$ 中的一棵补树时，则 $M_j(B;I_{m-1})$ 是非零。

证明：因为当且仅当 $Q(I_{r-1}\cup\{j\})$ 是 Q 的一大子矩阵(这里 j 不在 I_{r-1} 中)时，$M_j(Q;I_{r-1})$ 是非零，又因为根据推论 2.3，当且仅当对应于 $I_{r-1}\cup\{j\}$ 中整数的子图是包含 G 中的边 e_j 的一棵树时，$\det Q(I_{r-1}\cup\{j\})\neq 0$。推论的第一部分实际上是从包含 G 中边 e_j 的树与 G_α 中的树一一对应得出的(另一种关系将在引理 2.11 中给出)。类似地我们能够证明(2)。

定义 2.26，广义代数余子式。

对于任意给定的 $b\times b$ 阶矩阵 **Z** 和 **Y**，以及对于一给定的有向图 G，令 $(B_{-j})'=B'_{-j}$，$(Q_{-j})'=Q'_{-j}$ 和

$$M_{uv}(B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}b_{iu}b_{jv}\det B_{-i}ZB'_{-j} \tag{2.170 a}$$

$$M_{uv}(Q)=\sum_{i=1}^{r}\sum_{j=1}^{r}(-1)^{i+j}q_{iu}q_{jv}\det Q_{-i}YQ'_{-j} \tag{2.170 b}$$

其中 u，v＝1，2，…，b。标量 $M_{uv}(B)$ 和 $M_{uv}(Q)$ 分别叫做矩阵 BZB' 和 QYQ' 的元素的广义代数余子式。

取名“广义代数余子式”的理由是广义代数余子式在附加条件下就成为通常的代数余子式。例如，如果 G 中与 B 的列 u 和 v 相对应的边 e_u 和 e_v 分别仅仅包含在与 B 中的行 k 和 h 相对应的回路

L_k 和 L_h 中，同时分别用如同回路 L_k 和 L_h 一样的方向来取向，那么我们有

$$M_{uv}(B)=(-1)^{k+h}\det B_{-k}ZB'_{-h} \tag{2.171}$$

上式实际上是 BZB' 的$(k，h)$ 元素的代数余子式。如果再加上一个条件，G 的边和回路的编号使 $k=u$ 和 $h=v$，则 $M_{uv}(B)$仅仅是 BZB' 的(u,v) 元素的代数余子式。对于 QYQ' 元素的广义代数余子式 $M_{uv}(Q)$这也同样适用。

举例说明，考虑如图 2.15 所示有向图 G。G 的两个基本回路矩阵给出如下

$$B=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.172 a}$$

$$B^*=\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.172 b}$$

如果 Z 和式(2.68)中给出的一样，则 BZB' 和 $B^*ZB^{*\prime}$ 元素的广义代数余子式 $M_{12}(B)$和 $M_{12}(B^*)$分别由以下二式给出

$$\begin{aligned} M_{12}(B) &= \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}(-1)^{i+j} b_{i1} b_{j2}\det B_{-i}ZB'_{-j} \\ &= \det B_{-1}ZB'_{-2} \\ &= (R_3+R_4+R_5) \end{aligned} \tag{2.173 a}$$

$$\begin{aligned} M_{12}(B^*) &= -\det B^*_{-1}ZB^{*\prime}_{-1}+\det B^*_{-1}ZB^{*\prime}_{-2} \\ &\quad +\det B^*_{-2}ZB^{*\prime}_{-1}-\det B^*_{-2}ZB^{*\prime}_{-2} \\ &= -(R_2+R_4+R_5)+R_2+R_5-(R_2+R_3) \\ &= (R_3+R_4+R_5) \end{aligned} \tag{2.173 b}$$

下面我们将证明在某种条件下广义代数余子式对于回路和切割的选择是不变量。

定理 2.23：设 B 和 B^*是有向图G的两个基本回路矩阵，又设 Q 和 Q^*是G的两个基本切割矩阵。则对于任意给定的 b 阶方矩阵

Z 和 Y，我们有

$$k(B^*)M_{uv}(B)=k(B)M_{uv}(B^*) \tag{2.174 a}$$

$$k(Q^*)M_{uv}(Q)=k(Q)M_{uv}(Q^*) \tag{2.174 b}$$

其中 $u, v=1, 2, \cdots, b$。

证明：设

$$B^*=[b_{ij}^*]和 Q^*=[q_{ij}^*] \tag{2.175}$$

则我们有

$$M_{uv}(B)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}(-1)^{i+j}b_{iu}b_{jv}\det B_{-i}ZB'_{-j}$$

$$=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m}\Big[(-1)^{i+j}b_{iu}b_{jv}\Big(\sum_{I_{m-1}}\sum_{J_{m-1}}\det B_{-i}(I_{m-1})$$

$$\times\det Z(I_{m-1},J_{m-1})\det B_{-j}(J_{m-1})\Big)\Big]$$

$$=\sum_{I_{m-1}}\sum_{J_{m-1}}\Big[\Big(\sum_{i=1}^{m}(-1)^{i}b_{iu}\det B_{-i}(I_{m-1})\Big)$$

$$\cdot\det Z(I_{m-1},J_{m-1})$$

$$\times\Big(\sum_{j=1}^{m}(-1)^{j}b_{jv}\det B_{-j}(J_{m-1})\Big)\Big]$$

$$=\sum_{(I_{m-1})}\sum_{(J_{m-1})}M_u(B;I_{m-1})\det Z(I_{m-1},J_{m-1})$$

$$\cdot M_v(B;J_{m-1})$$

$$=\sum_{(I_{m-1})}\sum_{(J_{m-1})}k(B)M_u(B^*;I_{m-1})$$

$$\times\det Z(I_{m-1},J_{m-1})M_v(B^*;J_{m-1})/k(B^*)$$

$$=[k(B)/k(B^*)]\sum_{(I_{m-1})}\sum_{(J_{m-1})}M_u(B^*;I_{m-1})$$

$$\times\det Z(I_{m-1},J_{m-1})M_v(B^*;J_{m-1})$$

$$=k(B)M_{uv}(B^*)/k(B^*) \tag{2.176}$$

类似地，我们能够证明另一种情况，定理证毕。

推论 2.35：与f 回路或f 割集方程组相联系的网络矩阵元素的广义代数余子式对于从一个这样的方程组变换到另一个时是不变量。

如同网络行列式一样，我们将利用与f 回路或f 割集方程组相联系的广义代数余子式的值作为我们的比较标准，因为这些值对于这些变换是不变量。

定义 2.27：广义代数余子式的基本值。

与网络的f 回路或f 割集方程组相联系的网络矩阵元素的广义代数余子式的值叫做广义代数余子式的基本值。

显然，对于整数u和v的每一个选择存在一个唯一的与之相联系的基本值。通常有b^2个广义代数余子式。

推论 2.36：对于任意给定的方矩阵Z和Y，BZB′和QYQ′的元素的广义代数余子式$M_{uv}(B)$和$M_{uv}(Q)$如果不恒等于零，则当且仅当$k(B)=1$和$k(Q)=1$时，得到它们的最小绝对值。

推论 2.37：网络矩阵元素的广义代数余子式的值等于该广义代数余子式的基本值与一整数的平方相乘。这基本值的绝对值对于广义代数余子式是可能得到的最小绝对值。

推论 2.38：广义代数余子式$M_{uv}(B_f)$和$M_{uv}(A)$具有基本值。

定理2.20和2.23的一个直接推论如下：

推论 2.39：网络矩阵行列式与它的广义代数余子式行列式之比的比率或两个网络矩阵代数余子式的比率对于从一个回路方程组或切割方程组变换到另一个时是不变量（对应于一个基本回路矩阵或基本切割矩阵）。

我们将用下面的例子来说明以上结论。

例题 2.7：考虑如图2.20所示的有向图G。对应于图2.21中所示的四个割集的基本割集矩阵Q在式(2.137 a)中给出。为了简便

起见，设 Y 是 8 阶的单位矩阵。与 Q 和 A（选用节点 5 作为基准节点）相联系的广义代数余子式 $M_{57}(Q)$ 和 $M_{57}(A)$ 由以下二式给出

$$
\begin{aligned}
M_{57}(Q) &= \sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1}^{4}(-1)^{i+j} q_{i5} q_{j7} \det Q_{-i} Q'_{-j} \\
&= \det Q_{-1} Q'_{-3} - \det Q_{-1} Q'_{-4} \\
&\quad - \det Q_{-2} Q'_{-3} + \det Q_{-2} Q'_{-4} \\
&= -36 + 9 + 9 - 36 = 3^2 \cdot (-6)
\end{aligned}
\tag{2.177 a}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{57}(A) &= \det A_{-1} A'_{-3} + \det A_{-1} A'_{-4} \\
&\quad + \det A_{-2} A'_{-3} + \det A_{-2} A'_{-4} \\
&= -6 \quad 9 \quad 9 \quad 6 = -6
\end{aligned}
\tag{2.177 b}
$$

因此，广义代数余子式 $M_{57}(Q)$ 的基本值是 -6，同时

$$
M_{57}(Q) = k(Q) M_{57}(A) \tag{2.178}
$$

式中 $k(Q)=9$，上式验证了恒等式(2.174 b)。

下面我们将建立一个重要的恒等式，它显示出与两类网络矩阵有关的广义代数余子式的关系。

设 $S=\{1, 2, \cdots, b\}$。对于 S 中的 u 和 v，设 $S^{uv}=S-\{u, v\}$。为了方便起见，设符号 I_k^{uv} 和 J_k^{uv} 表示集合 S^{uv} 的子集，其中每一个包含 k 个元素，我们用 $\overline{I_k^{uv}}$ 和 $\overline{J_k^{uv}}$ 分别表示 S^{uv} 中 I_k^{uv} 和 J_k^{uv} 的补集，用了这些定义，我们有

定理 2.10，如果 u 和 v 是 B 或 Q 中的相邻列，则

$$
\begin{aligned}
& k(Q) M_u(B; I_{m-1}^{uv}) M_v(B; J_{m-1}^{uv}) \\
&= (-1)^{\alpha+\beta+1} k(B) M_u(Q; \overline{J_{m-1}^{uv}}) M_v(Q; \overline{I_{m-1}^{uv}})
\end{aligned}
\tag{2.179}
$$

式中 α 和 β 分别是包含在 I_{m-1}^{uv} 和 J_{m-1}^{uv} 中整数的和。

证明，让我们假设 $v>u$，这并没有失去一般性，因为

$$
M_u(B; I_{m-1}^{uv}) = (-1)^u \det B(I_{m-1}^{uv} \cup \{u\}) \tag{2.180 a}
$$

$$
M_v(B; J_{m-1}^{uv}) = (-1)^v \det B(J_{m-1}^{uv} \cup \{v\}) \tag{2.180 b}
$$

式中 u' 和 v' 分别是对应于 $B(I^{uv}_{m-1}\cup\{u\})$ 和 $B(J^{uv}_{m-1}\cup\{v\})$ 中整数u和v列的列标号，从式(2.146)得出

$$
\begin{aligned}
&k(Q)M_u(B;I^{uv}_{m-1})M_v(B;J^{uv}_{m-1})\\
&=(-1)^{u'+v'+\alpha+\beta+u+v}k(B)\det Q(\overline{I^{uv}_{m-1}}\cup\{v\})\\
&\quad\times\det Q(\overline{J^{uv}_{m-1}}\cup\{u\})
\end{aligned}
\tag{2.181}
$$

因为

$$M_v(Q;\overline{I^{uv}_{m-1}})=(-1)^{v''}\det Q(\overline{I^{uv}_{m-1}}\cup\{v\}) \tag{2.182 a}$$

$$M_u(Q;\overline{J^{uv}_{m-1}})=(-1)^{u''}\det Q(\overline{J^{uv}_{m-1}}\cup\{u\}) \tag{2.182 b}$$

式中 v'' 和 u'' 分别表示对应于 $Q(\overline{I^{uv}_{m-1}}\cup\{v\})$ 和 $Q(\overline{J^{uv}_{m-1}}\cup\{u\})$ 中整数v和u列的列标号，同时因为 $u=u'+v''-1$ 和 $v=v'+u''$，于是

$$
\begin{aligned}
&k(Q)M_u(B;I^{uv}_{m-1})M_v(B;J^{uv}_{m-1})\\
&=(-1)^{\alpha+\beta+1}k(B)M_u(Q;\overline{J^{uv}_{m-1}})M_v(Q;\overline{I^{uv}_{m-1}})
\end{aligned}
\tag{2.183}
$$

引理证毕。

定义 2.28：分离边。

对于给定的b阶方矩阵 Z 和给定的有向图G，G中对应于Z的行(或列) u和v的边 e_u 和 e_v，当 $z_{ui}=z_{iu}=0$ (其中 $i\neq u$，$i=1, 2, \cdots, b$)和 $z_{vj}=z_{jv}=0$ (其中 $j\neq v$，$j=1, 2, \cdots, b$) 时，叫做关于 Z 的分离边，这里 $Z=[z_{ij}]$。

换言之，如果 $z_{uu}\neq0$ 和 $z_{vv}\neq0$，它们是 Z 的 u 行 u 列和 v 行v列中唯一的非零项。为了方便起见，我们用 $Z_{uu,vv}$ 表示从 Z 中删除u 行 u 列和 v 行 v 列后得到的子矩阵。

定理 2.24：如果 Z 是非奇异的，有 $Y=Z^{-1}$，则对于有向图关于 Z 的所有分离边 e_u 和 $e_v(u\neq v)$，有

$$k(Q)M_{uv}(B)=-k(B)(\det Z_{uu,vv})M_{uv}(Q) \tag{2.184}$$

证明：设 $H=Z_{uu,vv}$，根据习题2.35，我们可以假设 $u=b-1$

和 v = b，这并没有失去一般性。根据式(2.176)的第四行我们有

$$
\begin{aligned}
M_v(B) &= \sum_{I_{m-1}} \sum_{J_{m-1}} M_u(B; I_{m-1}) \det Z(I_{m-1}, \\
&\quad J_{m-1}) M_v(B; J_{m-1}) \\
&= \sum_{(I^{uv}_{m-1})} \sum_{(J^{uv}_{m-1})} M_u(B; I^{uv}_{m-1}) M_v(B; J^{uv}_{m-1}) \cdot \\
&\quad \cdot \det Z(I^{uv}_{m-1}, J^{uv}_{m-1}) \\
&= \sum_{(I^{uv}_{m-1})} \sum_{(J^{uv}_{m-1})} [k(B)/k(Q)] M_v(Q; \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&\quad \times M_u(Q; \overline{J^{uv}_{m-1}})(-1)^{\alpha+\beta} \det Z(I^{uv}_{m-1}, J^{uv}_{m-1}) \\
&= [k(B)/k(Q)] \sum_{(I^{uv}_{m-1})} \sum_{(J^{uv}_{m-1})} M_v(Q; \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&\quad \times M_u(Q; \overline{J^{uv}_{m-1}})(-1)^{\alpha+\beta} \det H(I^{uv}_{m-1}, J^{uv}_{m-1}) \\
&= [k(B)/k(Q)] \sum_{(I^{uv}_{m-1})} \sum_{(J^{uv}_{m-1})} M_v(Q; \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&\quad \times M_u(Q; \overline{J^{uv}_{m-1}}) \det H^{-1}(\overline{J^{uv}_{m-1}}, \\
&\quad \overline{I^{uv}_{m-1}}) \det H \\
&= [k(B)(\det H)/k(Q)] \sum_{(\overline{I^{uv}_{m-1}})} \sum_{(\overline{J^{uv}_{m-1}})} \times \\
&\quad \times M_v(Q, \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&\quad \times M_u(Q, \overline{J^{uv}_{m-1}}) \det Y(\overline{J^{uv}_{m-1}}, \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&= [k(B)(\det H)/k(Q)] \sum_{(\overline{J^{uv}_{m-1}})} \sum_{(\overline{I^{uv}_{m-1}})} \times \\
&\quad \times M_u(Q, \overline{J^{uv}_{m-1}}) \\
&\quad \times \det Y(\overline{J^{uv}_{m-1}}, \overline{I^{uv}_{m-1}}) M_v(Q; \overline{I^{uv}_{m-1}}) \\
&= k(B)(\det H) M_{uv}(Q)/k(Q)
\end{aligned}
\tag{2.185}
$$

上式中第二行是从引理 2.9 得出的。因为 e_u 和 e_v 是G的分离边，如果 v 是在 I_{m-1} 中或 u 是在 J_m 中，这三部分乘积等于零。第三行是从式(2.179)得出的。第五行是用式(2.166)的雅各比定理求得的。所有这些符号的定义和引理 2.10 中的那些符号一样，定理证毕。

推论 2.40：如果 Z 是非奇异的，有 $Y=Z^{-1}$，则对于G关于Z的所有分离边 e_u 和 $e_v(u\neq v)$，有

$$M_{uv}(B)=(\det Z_{uu,vv})M_{uv}(Q)$$
$$=(\det Z_{uu,vv})M_{uv}(A) \qquad (2.186)$$

推论 2.41：如果 e_s、e_t、e_u 和 e_v 是G关于Z的分离边，又如果 Z 是非奇异的，有 $Y=Z^{-1}$，那么当 $s\neq t$ 和 $u\neq v$ 时，我们有

$$M_{uv}(B)M_{st}(B)=K_1M_{uv}(Q)M_{st}(Q) \qquad (2.187a)$$

$$M_{uv}(B)/(\det BZB')=K_2M_{uv}(Q)/(\det QYQ') \qquad (2.187b)$$

式中 $k_1=Z_{ss}Z_{tt}Z_{uu}Z_{vv}$ 和 $k_2=-1\cdot Z_{uu}Z_{vv}$。

如同在上一节中所讨论的网络行列式的情况一样，设G是不含有独立源的网络，其支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵是 Z_{pp} 和 Y_{pp}。如果 Z、B、Y 和 Q 分别是在上一节中定义的G的有关有向图 G_i 和 G_t 的矩阵。又如果它们是按照式(2.156)和(2.157)进行分块，那么我们有

推论 2.42：假设 Y_{pp} 是 Z_{pp} 的逆，如果 e_s 和 e_t 是G对应于 Y_{pp} 的 s 和 t 列或 s 和 t 行的边，那么当 $s\neq t$ 时，对于G关于 Z_{pp} 的所有分离边 e_s 和 e_t，我们有

$$k(Q)M_{st}(B)=k(B)(\det Z_{pp,ss,tt})M_{st}(Q) \qquad (2.188a)$$

$$M_{st}(B)=M_{st}(B_{12}) \text{ 和 } M_{st}(Q)=M_{st}(Q_{12}) \qquad (2.188b)$$

式中 $Z_{pp,ss,tt}$ 是从 Z_{pp} 中通过删除 s 和 t 行以及 s 和 t 列后获得的子矩阵。

现在我们将应用以上结论来说明网络函数对于参照系的变换是不变量，即对于回路或切割分析方法的选择以及回路或切割的选择

是不变量。

假设除了对应于边 e_u 的独立源以外，我们已经从G的 G_t 和 G_l 中移去所有的独立源，这并没有失去一般性。假如我们希望应用回路方程组来计算 G_t 的边 e_u 和 e_v 之间的转移导纳函数 $y_{uu,vv}$。设在边 e_u 的电压源 v_{gu} 的作用下 e_v 中的电流为 i_v，按本书中对电流及电压参考方向的设置习惯，i_v 的正方向与 e_v 的方向一致，v_{gu} 的"+"极性端在电流指向箭头的尾部。根据式（2.78），电流 i_v 由下式给出（习题 2.32）

$$i_v = -v_{gu}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} b_{iu} b_{jv} (-1)^{i+j} (\det B_{ij} Z B'_{ij}) / (\det BZB')$$

$$= -v_{gu} M_{uv}(B) / (\det BZB') \qquad (2.189)$$

转移导纳函数 $y_{uu,vv}$ 定义为 i_v 与 v_{gu} 之比，

$$y_{uu,vv} = i_v / v_{gu} = -M_{uv}(B) / \det BZB' \qquad (2.190)$$

类似地，如果应用的是切割方程组，边 e_u 和 e_v 之间的转移阻抗函数 $Z_{uu,vv}$ 定义为 e_v 上电压与 e_u 上电流之比，由下式给出（习题 2.33）

$$z_{uu,vv} = -M_{uv}(Q) / (\det QYQ') \qquad (2.191)$$

由于策动点函数是转移函数的特殊情况，又由于其它类型的网络函数也能用类似的方法获得。可以断定，网络函数总是能够表示为网络矩阵行列式与它的一个广义代数余子式行列式的比值，或是该比值的倒数，或是两个网络矩阵广义代数余子式之比。例如，边 e_u 和 e_v 之间的转移电压比函数和转移导纳函数是用与G的边 e_v 相联系的阻抗来联系的。

应该再一次强调，在式(2.184) 中给出的网络的回路阻抗矩阵和切割导纳矩阵元素的广义代数余子式二者之间的关系是在当网络的这部分中所有独立源已经去掉后给定的。如果在回路和切割公式中包含有独立源，就必须分别应用上一节中定义的G的有关有向

图G_v和G。

在我们说明上述结果以前，根据本节和上节给出的讨论我们可以推断出

定理2.25：网络函数与回路电流或切割电压的选择无关，是一个不变量。网络函数对于参照系的变换是不变量。

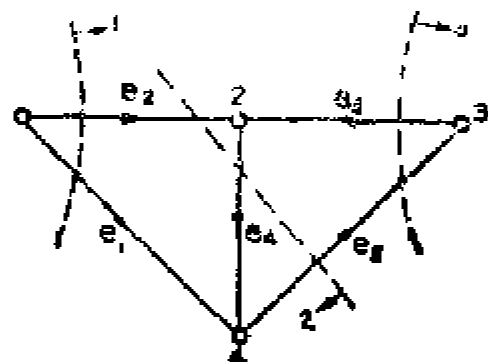


图 2.25 例题2.8中所考虑的网络

例题2.8：考虑如图2.25所示的网络G。对应于如图2.25中所示三个割集的基本切割矩阵Q由下式给出

$$Q=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \end{matrix} \quad (2.192)$$

广义代数余子式$M_{15}(Q)$求得如下：

$$\begin{aligned} M_{15}(Q) &= \det Q_{15}YQ'_{15} = \det Q_{15}YQ'_{15} \\ &= (z_2/z+y_5)z_3/z-(z_0/z-y_5)z_0/z \\ &\quad+(z_0/z-y_5)z_3/z-(z_3/z-y_5+y_1)z_0/z \\ &= -(1-z_0y_1)/z \end{aligned} \quad (2.193)$$

式中Y是式(2.152)中给出的。类似地，对应于如图2.22中所示G的两个回路的基本回路矩阵B由下式给出

$$B=\begin{matrix} & e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{matrix} \quad (2.194)$$

广义代数余子式$M_{15}(B)$由下式给出：

$$M_{15}(B)=\det B_{15}ZB'_{15}=z_0+z_4 \quad (2.195)$$

式中Z是式(2.151)中给出的，现在容易检验

$$M_{15}(B)=-(\det Z_{1,\dots,5})M_{15}(Q) \quad (2.196)$$

式中 $\det Z_{11,55} = z_0 z$ 和 $k(B) = k(Q) = 1$。

作为另一个例子，QYQ′ 和 BZB′ 元素的广义代数余子式 $M_{45}(Q)$ 和 $M_{45}(B)$ 分别计算如下：

$$
\begin{aligned}
M_{45}(Q) &= -\det Q_{-2}YQ'_{-3} \quad \det Q_{-3}YQ'_{-3} \\
&= -(y_1 \quad z_3/z)(y_5 + z_2 \quad z) \quad z_0^2/z^2 \quad z_3z_4/z^2 \\
&\qquad (y_1 + z_5/z)(y_5 \quad z_4/z) \\
&\quad (y_5z_0 \quad y_1z_2 \quad 1)/z \qquad (2.197)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{45}(B) &\quad \det B_{-1}ZB'_{-2} + \det B_{-2}ZB'_{-2} \\
&= -z_0 \quad z_4 \quad z_3 + z_2 \quad z_4 \\
&= z_3 + z_2 - z_0 \qquad (2.198)
\end{aligned}
$$

它们满足恒等式

$$M_{45}(B) \quad (\det Z_{44,55})M_{45}(Q) \qquad (2.199)$$

式中 $\det Z_{44,55} \quad z_3z_0$

例题2.9：在图 2.25 中，设边 e_1 表示一电压源 v_g 而不是一无源元件，即在式（2.151）中 $z_1 = 0$。于是对应于 $G(\ \ G_v)$ 的 G 如图 2.23 所示，这里边 e_1 对应一电流源 i_g，为了使 G_v 和 G_i 等效，*对于其参考方向如所指出的 v_g 和 i_g（代文宁和诺顿定理），我们必*须有 $i_g \quad v_gy_2$，应用 G_v，可以从式（2.190）求得该网络的转移导纳函数 $y_{1,55}$，由下式给出

$$
\begin{aligned}
y_{1,55} &\quad M_{15}(B)/(\det BZB' \\
&= (\det B_{-1}ZB'_{-2})/(\det BZB') \\
&\quad (z_0 + z_4)/[z_2(z_3 + z \quad z_5) + \\
&\quad + z_4(z_3 \quad z_5) \quad z_0^2 \quad 2z_0z_4] \qquad (2.200)
\end{aligned}
$$

式中 B 是式(194)中给出的，Z 由式(2.151)中给出，但具有 z_1 0。类似地，如果我们应用 G_i 可从式（2.191）求得该网络的转移阻抗函数 $z_{11,55}$，并由下式给出

$$
\begin{aligned}
z_{11,55} &\quad -M_{16}(A)/(\det AYA') \\
&= (\det A_{-1}YA'_{-2})/(\det AYA')
\end{aligned}
$$

$$= (z_0 - z_2)/(1 + z_2 y_4 + y_5 z_3 + y_5 z_2 + y_5 y_4 z - 2 z_0 y_5) \qquad (2.201)$$

式中 A 是 G_i 的基本关联矩阵，以节点 4 为基准点，Y 是式(2.152)中给出的，具有 $y_1 = 0$

面对 G_v 中电压源的策动点导纳函数 $y_{11,22}$ 由下式给出

$$y_{11,22} = i_2/v_g = M_{12}(B)/(\det BZB') = (\det B_{-1} Z B'_{-1})/(\det BZB') = (z_3 + z_4 + z_5)/[z_2(z_3 + z_4 + z_5) + z_4(z_3 + z_5) - z_0^2 - 2 z_0 z_4] \qquad (2.202)$$

面对 G_i 中电流源的策动点阻抗函数 $z_{11,22}$ 由下式给出

$$z_{11,22} = v_2/i_g = M_{12}(A)/(\det AYA') = (\det A_{-1} Y A'_{-1})/(\det AYA') = (z_2 + y_5 z)/(1 + z_2 y_4 + y_5 z_3 + y_5 z_2 + y_5 y_4 z - 2 z_0 y_5) \qquad (2.203)$$

注意，因为策动点函数在 G_v 和 G_i 中是不相同的，$z_{11,22}$ 不是 $y_{11,22}$ 的倒数，然而，如果我们假设在边 e_2 和 e_5 之间不存在互感耦合即 $z_0 = 0$，则

$$1/y_{11,22} = z_2 + z_4(z_3 + z_5)/(z_3 + z_4 + z_5) \qquad (2.204a)$$

$$1/z_{11,22} = y_2 + (z_3 + z_4 + z_5)/z_4(z_3 + z_5) \qquad (2.204b)$$

这样，式(2.204a)和(2.204b)中的第二项就互为倒数。显然，如果 e_2 与网络的其它部分没有耦合，由于它们是在所有的源均已移去的网络内面对 e_2 的策动点阻抗和导纳函数，该陈述通常是正确的。

最后让我们分别计算 G_i 和 G_v 中的 $M_{45}(A)$ 和 $M_{45}(B)$

$$M_{45}(A) = \det A_{-1} Y A'_{-2} = (z_0 - z_2)/2 \qquad (2.205a)$$

$$M_{45}(B) = \det B_{-1}ZB'_{-2} + \det B_{-2}ZB'_{-2}$$

$$= -(z_0 + z_4) + (z_2 + z_4) = -z_0 + z_2 \qquad (2.205b)$$

容易检验

$$k(A)M_{45}(B) = k(B)(\det Z_{pp;44,55})M_{45}(A) \qquad (2.205c)$$

式中 $\det Z_{pp;44,55} = z$，$k(A) = k(B) = 1$。

§5. 不变性和关联函数

在这之前我们已经考虑在给定的网络G中网络行列式及其广义代数余子式对于回路或切割的选择是不变量的问题。在本节中，我们将考虑这些行列式和广义代数余子式对于G的“关联函数”的选择是不变量的相应问题

如在§2中提到的，在电网络理论中，G中边的取向或方向是用来代替一个复杂参考系统的“伪方向”。换言之，它们仅仅是为了用来对支路电压和电流给出一个参考方向。这些参考方向的选择最好是能用一个函数来描述。

定义2.29：关联函数。

对于一给定的有向图G，说明G中边的方向的函数叫做G的关联函数。

改变G的关联函数，意指改变G中一些边的方向。下面我们将证明，如果G的关联函数改变了，则网络矩阵 BZB′ 和 QYQ′ 的行列式及其广义代数余子式通常不再保持为不变量。但是如果 Z 和Y分别是某一电网络的支路阻抗矩阵和支路导纳矩阵，则它们对于关联函数的选择是不变量。

考虑如图 2.26(a)中所示的有向图G，设B是对应于G中两个网孔的基本回路矩阵，又设除 z_{33} 为 z_6 外，$z_{ii} = z_i$ 和 $z_{ij} = 0 (i \neq j)$，这里 $Z = [z_{ij}]$，$i, j = 1,2,3,4,5$，于是我们有

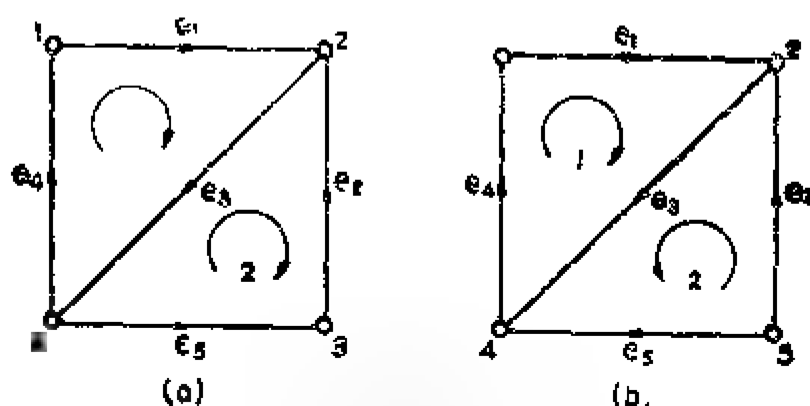


图 2.26 同一网络的关联函数的两种选择

$$
\mathbf{BZB}'=\begin{bmatrix}1&0&1&1&0\\0&1&1&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}z_1&0&0&0&0\\0&z_2&0&0&0\\0&0&z_3&0&z_6\\0&0&0&z_4&0\\0&0&0&0&z_5\end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\1&1\\1&0\\0&1\end{bmatrix}
=\begin{bmatrix}z_1+z_3+z_4 & z_3+z_6\\ z_3 & z_2+z_3+z_6+z_5\end{bmatrix} \tag{2.206}
$$

因此我们有

$$
\det\mathbf{BZB}'=(z_1+z_4)(z_2+z_3+z_5+z_6)-z_3(z_3+z_6) \tag{2.207}
$$

现在如果我们改变G中边 e_5 的方向,我们得到一个新的有向图 G*,如图 2.26(b)所示。如果 B*是 G* 中对应于G的基本回路矩阵,

则

$$\det B^*ZB^{*\prime} = (z_1+z_4)(z_2+z_3+z_5-z_6) + z_3(z_2+z_5) \tag{2.208}$$

BZB' 和 $B^*ZB^{*\prime}$ 的元素的广义代数余子式 $M_{21}(B)$ 和 $M_{21}(B^*)$ 分别由以下二式给出

$$M_{21}(B) = -\det B_{-2}ZB'_{-1} = -(z_3+z_6) \tag{2.209a}$$

$$M_{21}(B^*) = -\det B^*_{-2}ZB^{*\prime}_{-1} = (z_3-z_3) \tag{2.209b}$$

因此我们推断，网络矩阵行列式及其广义代数余子式通常对于G的关联函数的改变不再保持为不变量，但是，我们看到在一定的条件下它们仍保持为不变量、作为描述电网络，最通用的和最重要的一类有向图是不变量。

对于一个给定的有向图G，设 G^* 是从G中通过改变G的一些边的方向获得的有向图，如果 B 和 B^* 分别是与G和 G^* 中相同回路集合相对应的基本回路矩阵，则

$$B = B^*D \tag{2.210}$$

式中 D 是 $b\times b$ 阶对角线矩阵，其中第 ii 项的元素 d_{ii} 对应于G或 G^* 的边 e_i，如果G中边 e_i 的方向和 G^* 中 e_i 的方向一样，则 $d_{ii}=1$，否则 $d_{ii}=-1$。对以上情况稍加推广，如果 B 和 B^* 对应于G和 G^* 中两个不同的回路集合，则

$$B = CB^*D \tag{2.211}$$

式中 C 是一个 $m\times m$ 阶非奇异矩阵。

现在我们将考虑在网络矩阵行列式及其广义代数余子式对于关联函数的选择保持不变量的一些充分条件。

定理2.26，如果矩阵 Z 和 Y 是对角线矩阵，则与有向图G相联系的网络矩阵 BZB' 和 QYQ' 的行列式及其广义代数余子式 M_{ij}

(B)和 $M_{ij}(Q)$ 对于改变G的关联函数是不变量。

证明：我们将只考虑矩阵 BZB' 的行列式，因为其它的能够用类似的方法证明。为此目的，只要证明如果 B 和 B^* 分别是对应于 G 和 G^* 中相同回路集合的 G 和 G^* 的基本回路矩阵，则 $\det BZB' = \det B^*ZB^{*\prime}$ 就足够了。这是显而易见的，因为

$$\begin{aligned} \det BZB' &= \det B^*DZD'B^{*\prime} \\ &= \det B^*DD'ZB^{*\prime} \end{aligned} \qquad (2.212)$$

式(2.212)的第二行是从 Z 是对角线矩阵这一事实得出的。由于 DD' 是 b 阶的单位矩阵，定理证毕。

设G是一电网络，又设 $I(I^*)$ 和 $V(V^*)$ 是 $G(G^*)$ 的支路电流和支路电压矢量。我们假设对 G 和 G^* 二者选择相同的回路集合，这并没有失去一般性。如果 E 和 E^* 分别是 G 和 G^* 的支路电压源矢量，则

$$B = B^*D \qquad (2.213a)$$

$$V = ZI + E \qquad (2.213b)$$

$$V^* = Z^*I^* + E^* \qquad (2.213c)$$

式中 Z 和 Z^* 分别是 G 和 G^* 的支路阻抗矩阵，因为

$$E = DE^* \qquad (2.214a)$$

$$V = DV^* \qquad (2.214b)$$

$$I = DI^* \qquad (2.214c)$$

于是经过简单的代换以后，并由 DD 是单位矩阵，我们有

$$Z^* = DZD \qquad (2.215)$$

因此网络的回路阻抗矩阵行列式对于关联函数选择的不变量性质能够容易地建立如下：

$$\begin{aligned} \det BZB' &= \det B^*DZD B^{*\prime} \\ &= \det B^*Z^*B^{*\prime} \end{aligned} \qquad (2.216)$$

对于网络的切割导纳矩阵行列式以及这些矩阵元素的广义代数余子式当然同样适用（习题2.36）。

定理 2.27： 一个网络的回路阻抗或切割导纳矩阵的行列式及其广义代数余子式对于该网络的关联函数的选择是不变量。

举例说明，在图 2.26(a) 中设G是一电网络，并令式(2.206)中的Z是G的支路阻抗矩阵。如果如图 2.26(b) 中所示的G^*是用改变G中边e_5的方向从G中获得的有向图，则我们有

$$D=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.217}$$

根据式(2.215)，G^*的支路阻抗矩阵Z^*由下式给出

$$Z^*=\begin{bmatrix} z_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & z_3 & 0 & -z_6 \\ 0 & 0 & 0 & z_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & z_5 \end{bmatrix} \tag{2.218}$$

因此我们有

$$\det BZB' = \det B^*Z^*B^{*\prime} = (z_1+z_4)(z_2-z_3+z_5+z_6)+z_3(z_2+z_5) \tag{2.219a}$$

$$M_{21}(B) = M_{21}(B^*) = -(z_3+z_6) \tag{2.219b}$$

§ 6. RLC 网络的拓扑公式

拓扑公式这个名称用于这样一些公式，用它们可以通过观察网络简图立即写出一个网络的策动点函数和转移函数。无需去展开各种行列式和代数余子式。这些公式已经应用到网络分析和网络综合两个方面。在分析中拓扑公式提供一个求网络行列式和代数余子式

值的简捷方法，因为在用展开法求这些行列式的值时通常出现的大量相消项可以得到。在综合中它们提供了对于集总网络发现个新综合技术的可能性，并能推广到所有的集总系统。

和本书中讨论的许多其它问题一样，拓扑公式的基本概念并不是新的。一百多年以前，KIRCHHOFF[1847]对回路方程组阐明了基本公式，MAXWELL[1892]对节点方程组给出了基本公式。虽然这些规则基本上是正确的，但还远不够完整，应用一些现代代数的方法，FRANKLIN[1925]对基尔霍夫的阻抗规则给出了证明，接着Franklin，ky[1932]对麦克斯韦的导纳规则给出了一个有用的解释，对这个理论作出了贡献。最近该公式已由NERODE和SHANK[1961]以及SLEPIAN[1968]应用代数拓扑学作为工具得到了证明。然而，所有这些公式仅仅是对电阻性网络阐明的。显然，它们同样能够容易地扩大到一般的RLC网络。虽然对于一般的网络有可能直接获得这通用的公式，把RLC网络看作是一特殊情况，这特殊情况将在下面讨论中首先考虑。这是因为对于RLC网络该公式几乎最简单，单独考虑它们是非常重要的。一般情况的论述我们推迟到第四章进行。

6.1 网络行列式及树和补树

在本节和下节中，我们仅考虑$r=0$和$m=0$的RLC网络G。根据§1中给出的讨论，显然这个结果也能应用到具有独立电源的RLC网络。因为G的支路阻抗和支路导纳矩阵Z和Y是对角线的和非奇异的，将Z(Y)的第ii项$z_{ii}(Y_{ii})$与G的边e_i($i=1,2,\cdots,b$)相联系是方便的。这个与边e_i相联系的加权函数$z_{ii}(Y_{ii})$叫做阻抗（导纳）。

定义 2.30：树乘积

对于一连通的RLC网络G，与G的树支相联系的加权函数的乘积叫做G的树乘积。如果该加权函数全是导纳，则此乘积称为G

的树导纳乘积；如果该加权函数全是阻抗，则称为G的树阻抗乘积。

为方便起见，令

$$V(Y) = \sum 树导纳乘积 \tag{2.220a}$$

$$V(Z) = \sum 树阻抗乘积 \tag{2.220b}$$

这里的和式分别是包括G的所有可能的树导纳和树阻抗乘积求和。

定理 2.28：一RLC网络的节点导纳矩阵 Y_n 的行列式由下式给出

$$\det Y_n = V(Y) \tag{2.221}$$

证明：根据式（2.105）的比耐–柯西定理，我们有

$$\det Y_n = \det AYA' = \sum_{(I_r)} \sum_{(J_r)} \det A(I_r)\det Y(I_r, J_r)\det A(J_r)'$$

$$= \sum_{(I_r)} \det A(I_r)\det Y(I_r, I_r)\det A(I_r)'$$

$$= \sum_{(I_r)} \det Y(I_r, I_r) = V(Y) \tag{2.222}$$

上式中的第二行是从Y是对角线矩阵这一事实得出的，第三行是从定理2.19得出的，而最后一个等式是从定理2.2得出的，和式是指对A的全部大子矩阵 $A(I_r)$ 求和。定理证毕。

上面的结果首先是由MAXWELL[1892]用作求节点行列式值的简捷方法。第一个公式证明该结论的是由Brooks et al[1940]给出的。而上式和式（2.134）的直接推论如下。

推论 2.43：一RLC网络的切割导纳矩阵 Y_c 的行列式由下式给出

$$\det Y_c = K(Q)V(Y) \tag{2.223}$$

式中 $Y_c = QYQ'$。

让我们用一个例子说明该定理。对于图（2.26a）的网络G，G的树集T由下式给出

$$T = \{e_1e_2e_4,\ e_2e_4e_5,\ e_1e_4e_5,\ e_1e_2e_3,\ e_3e_4e_5,\ e_1e_3e_5,\ e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_5\} \tag{2.224}$$

根据定理 2.28，我们有

$$\det Y_n = y_1y_2y_4 + y_2y_4y_5 + y_1y_4y_5 + y_1y_2y_5 + y_3y_4y_5 + y_1y_2y_3 + y_2y_3y_4 + y_1y_3y_5 \tag{2.225}$$

式中 y_i 是边 e_i 的导纳，其中 $i = 1,2,3,4,5$。

应该注意二个重要的事实。首先，不必写出节点导纳矩阵，它的行列式能够直接求得。第二，这里没有相消项，没有无效劳动。只需要对图 2.26(a) 写出节点导纳矩阵，同时计算它的行列式来鉴定这一事实。最后，节点导纳矩阵的行列式和基准节点的选择是无关的，这一事实在推论 2.23 中已经证明。

现在让我们研究由 KIRCHHOFF[1847] 对网络响应的计算给出的对偶规则。我们用阻抗和回路方程组来解释他的规则，虽然基尔霍夫规则是用在§3.1 中讨论支路电流方程组陈述的。

定义 2.31：补树乘积

对于一连通 RLC 网络 G，与G的补树的支路相联系的加权函数的乘积叫做G的补树乘积。如果加权函数全是导纳，则该乘积称为G的补树导纳乘积；如果加权函数全是阻抗，则称为G的补树阻抗乘积。

设

$$C[V(Z)] = \sum \text{补树阻抗乘积} \tag{2.226}$$

上面的和式是对包括G的所有补树阻抗乘积求和。

定理 2.29. 一 RLC 网络的回路阻抗矩阵 Z_m 的行列式由下式给出

$$\det Z_m = k(B)C[V(Z)] \tag{2.227}$$

式中 $Z_m = BZB'$。

证明：因为 Y 是 Z 的逆，根据定理 2.22 和 2.28，我们有

$$\begin{aligned}\det Z_m &= k(B)(\det Z)(\det AYA') \\ &= k(B)(z_1z_2\cdots z_b)V(Y) \\ &= k(B)C[V(Z)]\end{aligned} \tag{2.228}$$

式中 z_i 是与边 $e_i(i=1, 2, \cdots, b)$ 相联系的阻抗。定理证毕。

式（2.221）和（2.227）中给出的表达式，分别称为节点和网孔的判别式。

推论 2.44：

$$\det \mathbf{B}_f \mathbf{Z} \mathbf{B}_f' = \det \mathbf{B}_p \mathbf{Z} \mathbf{B}_p' = C[V(Z)]$$
$$= z_1 z_2 \cdots z_b V(Y) \qquad (2.229a)$$

$$\det \mathbf{Q}_f \mathbf{Y} \mathbf{Z}_f' = \det \mathbf{A} \mathbf{Y} \mathbf{A}' = V(Y) = y_1 y_2 \cdots y_b C[V(Z)]$$
$$(2.229b)$$

式中 $Y_i = 1/z_i$，其中 $i = 1, 2, \cdots b$。

例如，在图 2.26(a) 中G的补树集合 $\bar{T}$ 由下式给出

$$\bar{T} = \{e_3e_5,\ e_1e_3,\ e_2e_3,\ e_3e_4,\ e_1e_2,\ e_4e_5,\ e_1e_5,\ e_2e_4\} \qquad (2.230)$$

根据定理 2.29，我们有

$$\det Z_m = z_3z_5 + z_1z_3 + z_2z_3 + z_3z_4 + z_1z_2 + z_4z_5 + z_1z_5 + z_2z_4 \qquad (2.231)$$

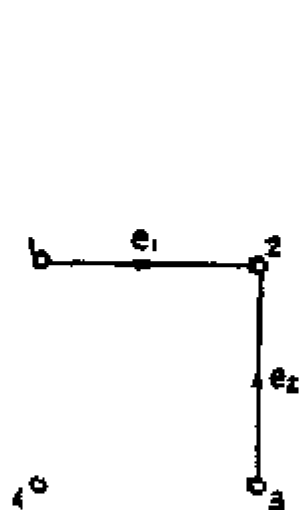
6.2 广义代数余子式及 2-树和 2-补树

本节中，我们将介绍用网络某些子图的加权函数的乘积表示广义代数余子式的公式。

定义 2.32：2-树。

一有向（无向）图G的生成子图，当且仅当它具有两个连通片同时不包含回路时，叫做G的 2 树。两个连通片之一（或者，也可以两者都是）可以由一个孤立节点组成。

常会需要求出某些指定的节点在不同的连通片中的 2-树。为了方便起见，用下标来表示这一意图。例如 $t_{ab,cde}$ 表示这样一个 2 树的符号，其中节点 a 和 b 是在一个片中，而节点 c、d 和 e 在另一个片中。作为一个例子，如图 2.26(a) 中的 2 树 $t_{12,4}$ 和 $t_{2,4}$ 的集合分别表示在图 2.27 和图 2.28 中。



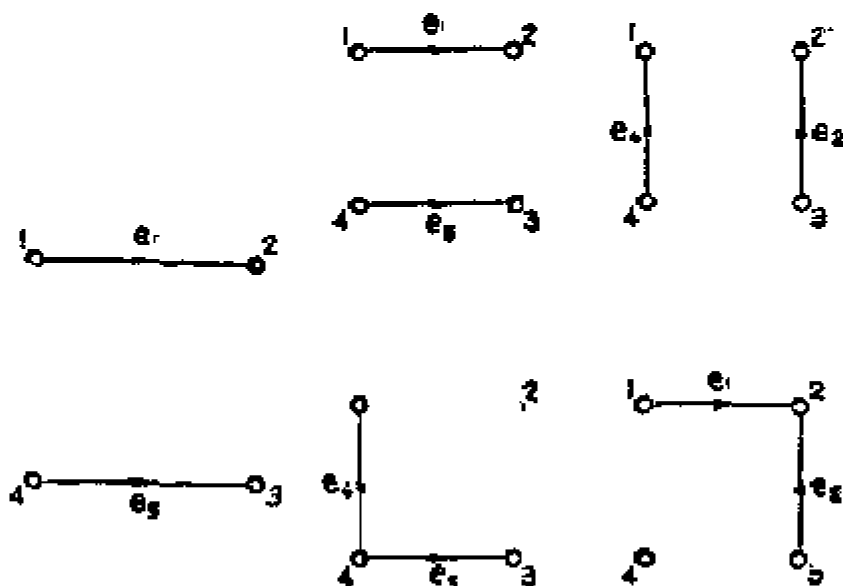


图 2.27　2 树 $t_{13,4}$　　　　图 2.28　2 树 $t_{1,4}$

定义 2.33：2-树乘积。

对于一个 RLC 网络G，与G的 2-树的边相联系的加权函数的乘积叫做G的 2-树乘积。如果加权函数全是导纳，则该乘积称为G的 2-树导纳乘积；如果加权函数全是阻抗，则称为G的 2-树阻抗乘积。象 $t_{4,4}$ 这样一类的 2-树，其中相同节点要求在不同的连通片中，根据定义具有零乘积。

在一般情况下，2-树可以由两个孤立节点组成。这样一种 2-树的乘积可以定义，但我们没有发现有此需要。

设

$$W_{ab,cd}(Y) = \sum 2\text{-树导纳乘积} \qquad (2.232a)$$

$$W_{ab,cd}(Z) = \sum 2\text{-树阻抗乘积} \qquad (2.232b)$$

上面的和式分别对G的所有 2-树 $t_{ab,cd}$ 的所有可能的 2-树导纳和 2-树阻抗乘积求和。

引理 2.11： 对于一有向图G，设 G_a 是从G通过短接边 e_a 获得的有向图。则将G中 e_a 的两个端点分开的 2-树和 G_a 中的树二者之

间存在一一对应关系。而且G和G_s中对应的子图具有相同的乘积。

该引理的证明是简单的，留作练习（习题 2.37）。

定理 2.30：对于一连通的 RLC 网络G，设 $e_u=(u_1, u_2)$ 和 $e_v=(v_1, v_2)$ 是G的两条边。则G的切割导纳矩阵 Y_c的元素的广义代数余子式 $M_{uv}(Q)$ 由下式给出

$$M_{uv}(Q)=K(Q)[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Y)-W_{u_1v_2,u_2v_1}(Y)] \quad (2.233)$$

式中 $Y_c=QYQ'$。

证，根据式（2.174 b）充分说明

$$M_{uv}(A)=[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Y)-W_{u_1v_2,u_2v_1}(Y)] \quad (2.234)$$

按与在式（2.176）中给出的相似论据，我们有

$$M_{uv}(A)=\sum_{I_{r-1}}\sum_{J}M_u(A;\ I_{r-1})\det Y(I_{r-1},\ J_{r-1})M_v(A;\ J_{r-1})$$

$$=\sum_{(I_{r-1})}M_u(A;\ I_{r-1})M_v(A;\ I_{r-1})\det Y(I_{r-1},\ I_{r-1})$$

(2.235)

由于Y是对角线矩阵，根据推论 2.34 和引理 2.11，显然乘积

$$M_u(A;\ I_{r-1})M_v(A;\ I_{r-1}) \quad (2.236)$$

当且仅当与 I_{r-1}中整数相对应的G的子图是一个 2-树 t_{v_1,v_2} 以及 2-树 t_{u_1,u_2}时，该乘积为非零。因此这非零乘积对应 2 树 $t_{u_1v_1,u_2v_2}$或 $t_{u_1v_2,u_2v_1}$。由于Y是对角线矩阵，它在式（2.235）中不会增加复杂。换言之，当且仅当它与G中 2 树 $t_{u_1v_1,u_2v_2}$ 或 $t_{u_1v_2,u_2v_1}$的 2-树导纳乘积相对应时，则式（2.235）和式中的二部分乘积为非零。

在 2 树导纳乘积的前面还需规定符号，如果e_u和e_v是平行边或如果 $e_u=e_v$，定理显然是成立的。因此让我们假设 $e_u\neq e_v$，同时它们不平行连接。根据习题 2.35 和 2.59，让我们假设 $u_1=1$，$u_2=4$，$v_1=2$，$v_2=3$，$u=1$ 和 $v=2$，这并不失去一般性。又设G的基准节点为节点 4，则

$$
A(I_{r-1}\cup\{1,2\}) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & A_1 \\ 0 & 1 & A_2 \\ 0 & -1 & A_3 \\ 0 & 0 & F \end{vmatrix} \quad \begin{matrix} e_1 & e_2 & (I_{r-1}) \end{matrix} \tag{2.237}
$$

式中A_1、A_2和A_3是行矢量，而F是$(r-3)\times(r-1)$阶矩阵。注意，为了使式（2.236）为非零，整数1和2不能包含在I_{r-1}中。因此我们有

$$M_u(A;\ I_{r-1}) = \det A(I_{r-1}\cup\{1\}) = -\det F_1 \tag{2.238a}$$

$$M_v(A;\ I_{r-1}) = \det A(I_{r-1}\cup\{2\}) = \det F_2 \tag{2.238b}$$

式中

$$F_1 = \begin{bmatrix} A_2 \\ A_3 \\ F \end{bmatrix} \text{和} F_2 = \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 + A_3 \\ F \end{bmatrix} \tag{2.239}$$

考虑两种情况：它们对应以上讨论的两种类型的2-树。

情况1：具有类型$t_{12,34}$的2-树。现在对应于2-树$t_{12,34}$同一片中的节点如节点1和2的$A(I_{r-1})$的所有行的和为零，因为这些行形成该片的关联（不是基本关联）矩阵。用行矩阵$\sum A_i$表示这些和。则$A_1 = -(\sum A_i - A_1)$。由于相加矩阵的行不影响它的行列式值，我们可以用$-A_1$代替F_1的第一行，用A_2+A_3代替第二行。换言之，我们有

$$\det F_1 = -\det F_2 \tag{2.240}$$

从式(2.238)得出式(2.236)中的乘积之值为1。

情况2：具有类型$t_{13,24}$的2-树。现在对应于2-树$t_{13,24}$同一片中的节点如节点1和3的$A(I_{r-1})$的所有行的和为零。再一次用行矩阵$\sum A_i$表示这个和。则$A_1 = -(\sum A_i - A_1)$。因此，我们可以用A_2+A_3代替F_1的第一行，用$-A_1$代替第二行，这样导致

$$\det F_1 = \det F_2 \tag{2.241}$$

根据式(2.238)和(2.241)可见式(2.236)中的乘积之值为 1。因此我们有

$$M_{u}(A) \quad [W_{12,34}(Y) \quad W_{13,24}(Y)] \qquad (2.242)$$

类似地，我们能够证明当u_1 v_1或v_2以及u_2 v_1或v_2的情况(习题2.59)。定理证毕。

注意式(2.233)中的所有项是各不相同的，这意味着应用这一公式不会象通常展开网络行列式那样去进行多余项的计算，它仅仅包括那些不能约去的项。这是所有拓扑公式的典型特性之一。

2 树这个术语是由$P_{ERCEVAL}$[1953]首先应用的。对于2 树应用他使用几何符号，公式(2.233)可以直观地用图2.29表示。

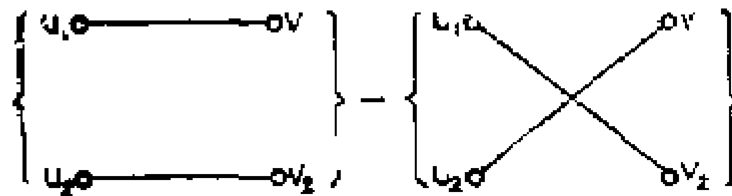


图 2.29 公式(2.233)的几何表示

推论2.45：

$$M_{uv}(Q_f) \quad M_{uv}(A) \quad [W_{u\ \ ,v_2,}(Y) \quad W_{u\ v_2,u_2v_1}(Y)] \qquad (2.243)$$

推论2.46： 设 k 是 G的基准节点。则G的节点导纳矩阵的(i,j)-元素的代数余子式Δ_{ij}由下式给出

$$\Delta \quad W_{ij,k}(Y) \qquad (2.244)$$

证明：在定理2.30中，令u_1 i，v_1 j和u_2 v_2 K。则

$$M_{ij}(A) \quad (-1)^{i+j}\det A\ YA'_{-j} \quad \Delta_{ji} \qquad (2.245)$$

此推论是从式(2.23)及$W_{iK,K_j}(Y)$ 0中得出的。

推论2.47： 如果边$e_a=(u_1,u_2)$和e_b (v_1,v_2)分别是仅仅包含在切割 i 和 j 中，又如果它们的取向与切割方向相同，则由基本切割矩阵 Q(包含切割 i 和 j) 形成的 G 的切割导纳矩阵的 (i,j)-元素的代数余子式Δ_{ij}由下式给出

$$\Delta^c_{ij} = k(Q)[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Y) - W_{u_1v_2,u_2v_1}(Y)] \qquad (2.246)$$

证明：根据式(2.170b)我们有

$$M_{uv}(Q) = (-1)^{i+j}\det Q_{-u}YQ'_{-v} = \Delta^c_{ij} \qquad (2.247)$$

该推论由此得证。

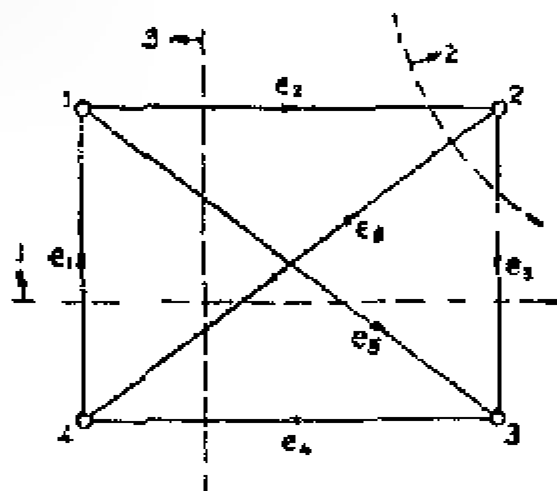


图 2.30 例题2.10中所考虑的RLC网络

显然，由包含G的边e_u和e_v的树形成的f割集的集合满足推论2.47的要求。

例题 2.10：考虑如图2.30所示的RLC网络G。由如图2.30所表示的三个割集形成的割集导纳矩阵Y_c的元素的广义代数余子式$M_{13}(Q)$，现在能够根据G用式(2.233)直接求得，这里$e_1=(4,1)$，$e_3=(2,3)$。此结果由下式给出

$$\begin{aligned} M_{13}(Q) &= [W_{42,13}(Y) - W_{43,12}(Y)] \\ &= y_5y_6 - y_2y_4 \end{aligned} \qquad (2.248)$$

式中Y_i是边$e_i(i=1, 2, \cdots, 6)$的导纳，为了说明意图，让我们用通常的方法计算$M_{13}(Q)$。

$$\begin{aligned} M_{13}(Q) &= \det Q_{-1}YQ'_{-1} + \det Q_{-1}YQ'_{-2} \\ &= -(y_2+y_3+y_6)(y_2+y_5+y_4+y_6) \\ &\quad +(y_2+y_6)^2 \\ &\quad +(y_3+y_5)(y_2+y_5+y_4+y_6) \\ &\quad -(y_2+y_6)(y_5-y_6) \\ &= y_5y_6 - y_2y_4 \end{aligned} \qquad (2.249)$$

Y_c的(1, 3)元素的代数余子式Δ^c_{13}能够从式(2.246)直接求得，这里$e_u=(4, 1)$，$e_v=(3, 4)$。

$$\begin{aligned} \Delta^c_{13} &= [W_{43,14}(Y) - W_{44,13}(Y)] = W_{4,13}(Y) \\ &= -y_2y_3 - y_2y_5 - y_3y_6 - y_5y_6 \end{aligned} \qquad (2.250)$$

设G的基本关联矩阵A以节点4为基本节点，并据此写出节点导

纳矩阵 Y_n，如果需要Y_n中元素的广义代数余子式$M_{24}(A)$，它能够容易地从式(2.243)求得并由下式给出

$$M_{24}(A) = [W_{13,24}(Y) - W_{14,23}(Y)] = Y_5Y_6 - Y_1Y_3 \quad (2.251)$$

为了进行比较，这里对$M_{24}(A)$再用通常的展开式计算如下

$$\begin{aligned} M_{24}(A) &= \det A_{1}YA'_{3} - \det A_{2}YA'_{3} \\ &= y_2y_3 + y_5(y_2 + y_3 + y_6) \\ &\quad - y_3(y_1 + y_2 + y_5) - y_2y_5 \\ &= y_5y_6 - y_1y_3. \end{aligned} \quad (2.252)$$

最后，Y_n的(1，3)-元素的代数余子式Δ^n_{13}能够从式(2.244)直接计算并由下式给出

$$\begin{aligned} \Delta^n_{13} &= W_{13,4}(Y) \\ &= y_2y_3 - y_2y_5 + y_3y_5 + y_5y_6 \end{aligned} \quad (2.253)$$

现在让我们考虑上述的对偶情况，也就是对于 RLc 网络的回路阻抗矩阵元素的广义代数余子式$M_{..}(B)$的公式。

定义 2.34：2-补树。

对于一有向(无向)图 G，G中某2-树的补树叫做 G 的2-补树。

象补树一样，如果$t_{ab,cd}$是 G 的2-树，则符号$\bar{t}_{ab,cd}$表示对于2-树$t_{ab,cd}$的2-补树。

定义2.35：2-补树乘积。

对于一RLc网络 G，与 G 的2-补树的边相联系的加权函数的乘积叫做 G 的2-补树乘积。如果加权函数全是导纳，则该乘积称为G的2-补树导纳乘积；如果加权函数全是阻抗，则称为G的2-补树阻抗乘积。

在一般情况下，如果 G 本身是 2-树，则对应的2-补树为零。象这种2-树情况，其2-补树的乘积是能够定义的，但我们认为并无此需要。

设

$$C[W_{ab,cd}(Y)] = \sum 2\text{-补树导纳乘积} \quad (2.254a)$$

$$C[W_{ab,cd}(Z)]=\sum 2\text{-补树阻抗乘积} \qquad (2.254b)$$

这里的和式分别包括 G 的所有2-补树 $\bar{t}_{ab,cd}$ 的所有可能的 2-补树导纳乘积和2-补树阻抗乘积。

定理 2.31：对于一连通 RLC 网络G，设 $e_u=(u_1,u_2)$ 和 $e_v=(v_1,v_2)$ 是G的两条边。则 G的回路阻抗矩阵 Z_m 的元素的广义代数余子式 $M_{uv}(B)$ 由下式给出

$$M_{uv}(B)=\frac{K(B)}{z_u z_v}\left(C[W_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)]-C[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)]\right) \qquad (2.255)$$

式中 $Z_m=BZB'$，z_i 是边 $e_i(i=1,2,\cdots b)$ 的阻抗。

证：根据定理2.24和推论2.15，我们有

$$\begin{aligned}M_{uv}(B)&=k(B)(\det Z_m)M_{uv}(A)\\&=k(B)(z_1z_2\cdots z_b/z_uz_v)[W_{u_1v_2,u_2v_1}(Y)\\&\quad-W_{u_1v_1,u_2v_2}(Y)]\\&=k(B)(1/z_uz_v)(C[W_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)]\\&\quad-C[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)])\end{aligned} \qquad (2.256)$$

定理证毕。

式(2.255)圆括号内公式能够以一种直观的方式用下面如图2.31所示的Percival的符号直接写出。

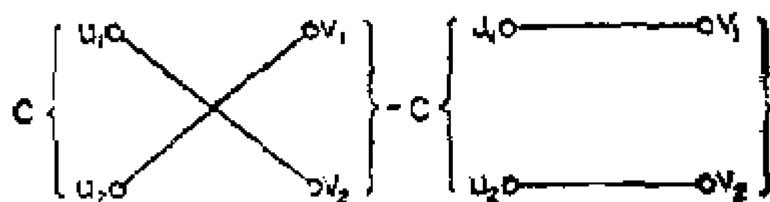


图 2.31 公式(2.255)的几何表示

推论 2.48：

$$M_{uv}(B_f)=M_{uv}(B_p)=(1/z_uz_v)(C[W_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)]-C[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)]) \qquad (2.257)$$

推论 2.49：设G^*是从 G 中移去边e_u和e_v后获得的有向图。如果$C[W^*_{ab,cd}(Z)]$表示G^*中有2-补树 $\bar{t}_{ab,cd}$的所有可能的2-补树阻抗

乘积之和，则回路阻抗矩阵Z_m的元素的广义代数余子式$M_{uv}(B)$由下式给出

$$M_{uv}(B)=k(B)(C[W^*_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)-C[W^*_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)])$$

(2.258)

式中 $Z_m=BZB'$。

推论 2.50：如果边$e_u=(u_1, u_2)$和$e_v=(v_1, v_2)$分别只包含在回路i和j中，又如果它们以回路的方向取向，则由基本回路矩阵B(包括回路i和j)形成的G内回路阻抗矩阵的(i, j)-元素的代数余子式Δ^m_{ij}由下式给出

$$\Delta^m_{ij}=\frac{k(B)}{z_uz_v}(C[W_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)]-C[W_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)])$$

(2.259a)

或

$$\Delta^m_{ij}=k(B)(C[W^*_{u_1v_2,u_2v_1}(Z)]-C[W^*_{u_1v_1,u_2v_2}(Z)])$$

(2.259b)

式中$C[W^*_{ab,cd}(Z)]$表示G^*的所有2-补树$t_{ab,cd}$的所有可能的2-补树阻抗乘积之和，而G^*是从G中移去边e_u和e_v后获得的。

这个推论的证明类似于推论2.47，留作练习(习题2.38)。显然，对于不包含G的边e_u和e_v的某树的f回路集合满足上述推论的条件。

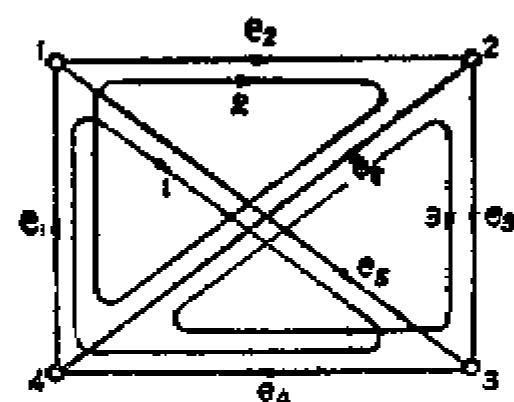


图 2.32 例题2.11所考虑的RLC网络

例题2.11：考虑如图2.32所示的RLC网络G。由图2.32所表示的三个回路所形成的回路阻抗矩阵Z_m的元素的广义代数余子式$M_{13}(B)$，现在能够根据G用式(2.255)直接求得并由下式给出

$$M_{13}(B)=(1/z_1z_3)(C[W_{43,12}(Z)]-c[W_{42,13}(Z)])$$
$$=(1/z_1z_3)(z_1z_3z_5z_6-z_1z_2z_3z_4)=z_5z_6-z_2z_4 \quad (2.260)$$

式中 z_k 是与边 $e_k(K=1, 2, \cdots, 6)$ 相联系的阻抗。Z_m 的(2, 3)元素的代数余子式 Δ^m_{23} 能够根据 G 用式(2.259)直接求得，这里 $e_u=(1, 2)$ 和 $e_v=-(2, 3)$。

$$\Delta^m_{23}=(1/z_2z_3)(C[W_{13,32}(Z)]-C[W_{12,23}(Z)])$$
$$=(1/z_2z_3)(z_2z_3z_4z_6+z_1z_2z_3z_6+z_1z_2z_3z_4+z_2z_3z_5z_6)$$
$$=z_4z_6+z_1z_6+z_1z_4+z_5z_6 \tag{2.261}$$

最后，由 G 的以时针方向取向的三个网孔形成的回路阻抗矩阵的元素的广义代数余子式 $M_{16}(B_p)$ 由下式给出

$$M_{16}(B_p)=(1/z_1z_6)(C[W_{42,15}(Z)]-C[W_{44,12}(Z)])$$
$$=-(1/z_1z_6)C[W_{4,19}(Z)]$$
$$=-(z_3z_4+z_4z_5+z_2z_4+z_3z_5) \tag{2.262}$$

上式等于 $B_pZB'_p$ 的(1, 3) 元素的代数余子式 Δ^m_{13} 的负值，其三个对应网孔是 $e_1e_4e_6$，$e_2e_3e_5$ 和 $e_3e_4e_5$。

6.3 RLC 二端口网络的拓扑公式

一个二端口网络定义为具有两个能与外电路相接的端对的网络，除了这两个端对以外，网络与外界是电和磁绝缘的。“端对”或“口”，意指一个端对的一端和不同端对的另一端之间不进行外部连接。例如，如果图2.33的黑盒子表示一个二端口网络N，这里(1, 2)是一个端对，(3, 4)是另一端对，端子 1 和 3 或 2 和 4 或 1 和 4 或 2 和 3 之间不进行外部连接。RLC 二端口网络是一个仅由电阻器，电容器和自感线圈组成的二端口网络。

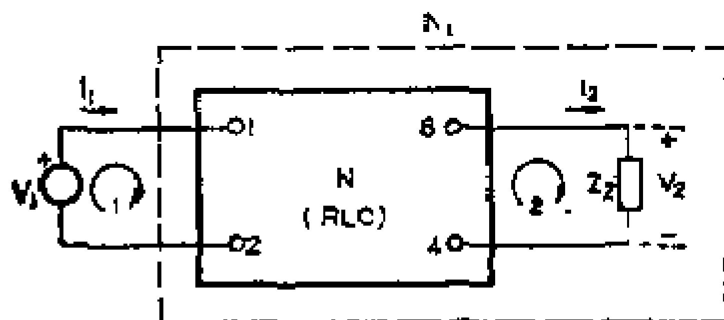


图 2.33 用电压源激励的双口网络

易于将前两节的结果应用到 RLC 二端口网络的分析。因此我们简单地陈述这个结果，而将细节留作练习(习题2.39)。

为了简单起见，我们对二端口网络N的节点和支路如图2.33或2.34标号。应用回路方程组的公式假设作用在输入端的是一电压源，如图2.33所示。应用节点方程组并用一电流源激励网络，如图2.34所示可得出另一组公式，回路和基准节点的选择表示在图2.33和2.34中。应用前述结果导出这个公式的最简单方法是我们分别把电压源和电流源认为是具有零阻抗和零导纳的边。注意，在图2.33

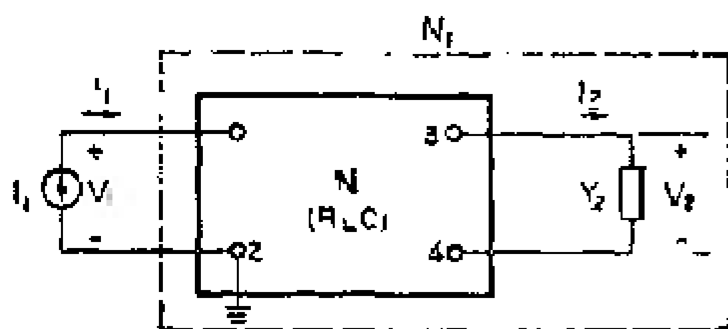


图 2.34 用电流源激励的二端口网络

中对电压源的参考方向的规定与我们以往的习惯规定是不同的。因此在应用前述结果时，它将引入一个负号。应用图2.33中规定的参考方向，对有载二端口网络N在初始条件为零的情况下，四个转移函数定义如下⊖

$$z_{13,24}(s)=\text{转移阻抗函数}=v_2(s)/i_1(s) \tag{2.263a}$$

$$\alpha_{13,24}(s)=\text{转移电流比函数}=i_2(s)/i_1(s) \tag{2.263b}$$

$$y_{13,24}(s)=\text{转移导纳函数}=i_2(s)/v_1(s) \tag{2.263c}$$

$$g_{13,24}(s)=\text{转移电压比函数}=v_2(s)/v_1(s) \tag{2.263d}$$

在零初始条件下，对应于图2.33的网络N_t，它的两个策动点函数是

$$z_{11,22}(s)=(1,2)\text{端对的策动点阻抗函数}$$
$$=v_1(s)/i_1(s) \tag{2.264a}$$

⊖ 因为边的端点是指定的，这里规定的符号比§4.5中应用的那些符号更方便。这不应该引起任何困难。这里应用的符号与第4章§6中应用的那些符号是一致的。

$y_{11,22}(s)$ — (1，2)端对的策动点导纳函数

$$= i_1(s)/v_1(s) \qquad (2.264b)$$

定理 2.32：对如图2.33或2.34所示的RLC二端口网络N，我们有

$$z_{13,24}(s) = z_2\alpha_{13,24} = [W_{13,24}(Y) - W_{14,23}(Y)]/V^*(Y) \qquad (2.265a)$$

$$= z_2(C[W_{13,24}(Z)] - C[W_{14,23}(Z)])/C[V^*(Z)] \qquad (2.265b)$$

$$y_{13,24}(s) = y_2 g_{13,24}(s) = y_2[W_{13,24}(Y) - W_{14,23}(Y)]/W^*_{1,2}(Y) \qquad (2.266a)$$

$$= (C[W_{13,24}(Z)] - C[W_{14,23}(Z)])/C[W^*_{1,2}(Z)] \qquad (2.266b)$$

$$z_{11,22}(s) = 1/y_{11,22}(s) = W^*_{1,2}(Y)/V^*(Y)$$

$$= C[W^*_{1,2}(Z)]/C[V^*(Z)] \qquad (2.267)$$

式中 $z_2 = 1/y_2$，星号表示这些树和2-树乘积以及它们的补树是对网络N*计算的，所有其它项只是计算二端口网络N。

例题 2.12：考虑如图2.35所示的二端口网络N，要求的项计算如下

$$W_{13,24}(Y) - W_{14,23}(Y) = y_1y_3y_5y_7 - 0 = y_1y_3y_5y_7 \qquad (2.268a)$$

$$C[W_{13,24}(Z)] - C[W_{14,23}(Z)] = z_4z_6 \qquad (2.268b)$$

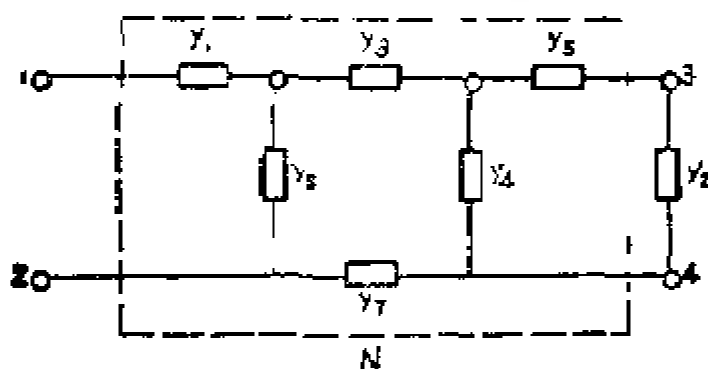


图 2.35 一梯型网络

$$W_{1,2}^{*}(Y) = y_1y_3y_5y_7 + y_1y_3y_2y_7 + y_1y_3y_4y_6 + y_1y_2y_3y_4$$
$$+ y_1y_2y_3y_5 + y_1y_4y_5y_7 + y_1y_2y_4y_7 + y_1y_2y_5y_7$$
$$+ y_3y_5y_6y_7 + y_2y_3y_6y_7 + y_3y_4y_5y_6 + y_2y_3y_4y_6$$
$$+ y_2y_3y_5y_6 + y_4y_5y_6y_7 + y_2y_4y_6y_7 + y_2y_5y_6y_7$$
$$+ y_3y_4y_5y_7 + y_2y_3y_4y_7 + y_2y_3y_5y_7 \qquad (2.269\text{ a})$$
$$C[W_{1,2}^{*}(Z)] = z_2z_4z_5 + z_4z_3z_5 + z_4z_5z_7 + z_2z_5z_7$$
$$+ z_3z_5z_7 + z_2z_3z_6 + z_3z_5z_6 + z_3z_4z_6$$
$$+ z_1z_2z_4 + z_1z_4z_5 + z_1z_2z_7 + z_1z_5z_7$$
$$+ z_1z_4z_7 + z_1z_2z_3 + z_1z_3z_5 + z_1z_3z_4$$
$$+ z_1z_2z_6 + z_1z_5z_6 + z_1z_4z_6 \qquad (2.269\text{ b})$$
$$V^{*}(Y) = y_1y_3y_5y_6y_7 + y_1y_2y_3y_4y_6 + y_1y_3y_4y_5y_6 + y_1y_2y_4y_6y_7$$
$$+ y_1y_2y_3y_5y_6 + y_1y_4y_5y_6y_7 + y_1y_2y_4y_5y_7 + y_1y_2y_5y_6y_7$$
$$+ y_1y_3y_4y_5y_7 + y_1y_2y_3y_4y_7 + y_1y_2y_3y_5y_7 \qquad (2.270\text{ a})$$
$$C[V^{*}(Z)] = z_2z_4 + z_5z_7 + z_2z_7 + z_4z_5 + z_4z_7 + z_2z_3 + z_3z_5$$
$$+ z_3z_4 + z_2z_5 + z_5z_6 + z_4z_6 \qquad (2.270\text{ b})$$

需要的网络函数即能从式(2.265)—(2.267)得到。

§7. 网络解的存在性和唯一性

在前面的讨论中，我们默认了网络矩阵的逆存在。因此，确定电网络能够获得唯一解的条件是很重要的。

KIRCHHOFF 1847 年首先对仅由电阻组成的网络证明了解的存在。这个问题的证明是由 WEYL[1923]和 ECKMANN[1944]详细阐述的,同时他们对这问题还进行了比较深入的探讨。SESHU 和 REED[1961]得出了对具有互感和独立源的RLC 网络存在唯一解的必要和充分的条件。为了试图适用于更一般的情况，ROTH[1955, 1959]以及 MALIK 和 HALE[1967]也仔细考虑过这个问题并对大批网络的唯一解答证明了一些必要和充分的条件。

三个基本方程组(2.51)—(2.53)构成研究的出发点。首先，我

们按照式(2.53)中的 Z 或 Y 那样对 Q 和 B 的列分块，然后我们将三个方程组写在一起，这样使已知量能够从未知量中分离出来。

$$\begin{bmatrix} Q_s & Q_p & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_s & B_p \\ 0 & 0 & U_s & 0 \\ 0 & -Z_{pp} & 0 & U_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s \\ I_p \\ V_s \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ E_s \\ E_p \end{bmatrix} \qquad (2.271)$$

这里 U_x 表示 x 阶的单位矩阵。因为 V_s 仅仅是 E_s 的代换符号，所以方程的第三行是多余的。删除这些多余的方程并将已知的 V_s 移置到方程的右边，我们得到

$$\begin{bmatrix} Q_s & Q_p & 0 \\ 0 & 0 & B_p \\ 0 & Z_{pp} & U_p \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_s \\ I_p \\ V_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -B_sE_s \\ E_p \end{bmatrix} \qquad (2.272)$$

为了使方程组(2.72)是相容的，系数矩阵与增广矩阵具有相同的秩是必要而充分的。因此，在给定的网络G中如果存在一个仅由独立的和非独立的电压源组成的回路，则为了使G具有一个解答，这些电压源的代数和必须为零，因为系数矩阵中对应于这个回路的行仅由零组成。类似地，如果以式（2.53 b）代替式（2.53 a）应用到式(2.271）中，则为了使G具有一个解答，G中仅由独立的和非独立的电流源组成的切割中这些电流源的代数和必须为零。很清楚，如果G包含有这样一个回路或切割，由于系数矩阵的秩小于未知量的数目，如果它的解存在，解决不能是唯一的。

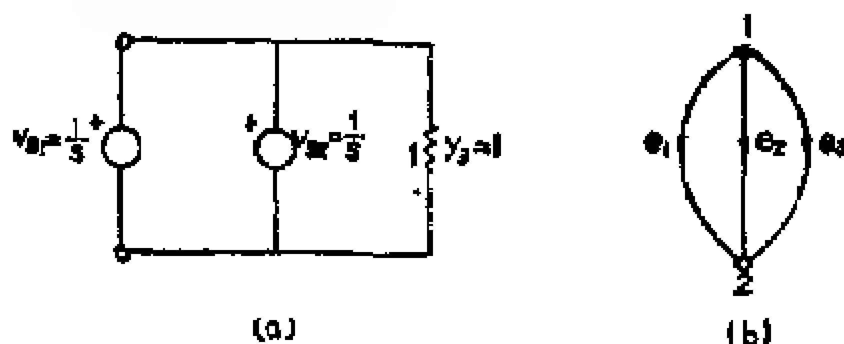


图 2.36　具有无穷多解的网络

举例说明，考虑如图 2.36 所示的网络及其对应的有向图G。网络对应于式(2.272)的矩阵方程由下式给出

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/s \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.273}$$

式(2.273)中的第二个方程对应于由电压源v_{g1}和v_{g3}组成的回路。于是该网络的完全解由下式给出

$$\mathbf{V} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/s \\ 1/s \\ 1/s \end{bmatrix} \text{和}\ \mathbf{I} = \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -x+1/s \\ 1/s \end{bmatrix} \tag{2.274}$$

式中 x 是复数域上一任意常数，因此网络具有无穷多个解。

引理 2.12：任意一方矩阵 Z 总是能够唯一地分解成两个部分

$$\mathbf{Z} = \mathbf{H} + \mathrm{j}\mathbf{F} \tag{2.275}$$

式中 H 和 F 是哈密特式矩阵。

证明：设

$$\mathbf{H} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} + \overline{\mathbf{Z}'}) \tag{2.276 a}$$

$$\mathrm{j}\mathbf{F} = \frac{1}{2}(\mathbf{Z} - \overline{\mathbf{Z}'}) \tag{2.276 b}$$

式中横线表示共轭复数，该引理直接从这里得出。

为了方便起见，这里我们将 Z的哈密特式部分叫做H。注意矩阵H和F 通常都是复数。但对于对称矩阵 Z，H 和 F 二者都是实数。

引理 2.13：如果一个初始松弛网络G的支路电压和支路电流矢量V 和 I 按照式(2.53)分块，又如果电压源和电流源是具有相同频率的正弦函数，那么二次型

$$\overline{I'_p}(j\omega)H_1(j\omega)I_p(j\omega) \text{或} \overline{V'_p}(j\omega)H_2(j\omega)V_p(j\omega) \tag{2.277}$$

仅仅是由独立电压源或电流源对G的剩余网络提供的平均功率的两倍，式中 H_1 和 H_2 分别是 Z_{pp} 和 Y_{pp}的哈密特矩阵部分，横线是表示共轭复数。

证明：我们仅将证明有关 Z 的情况，另一种情况能够用类似的方法证明，因为G是初始松弛的。根据式（2.53 a）我们有 $E_g=0$ 和

$$\begin{aligned}\overline{I'}(j\omega)V(j\omega) &= \overline{I'_s}(j\omega)V_s(j\omega)+\overline{I'_p}(j\omega)V_p(j\omega)\\ &= \overline{I'_s}(j\omega)V_s(j\omega)+\overline{I'_p}(j\omega)Z_{pp}(j\omega)I_p(j\omega)\end{aligned} \tag{2.278}$$

$$\mathrm{Re}\,\overline{I'}(j\omega)V(j\omega) = \mathrm{Re}\,\overline{I'_s}(j\omega)V_s(j\omega)+\overline{I'_p}(j\omega)H_1(j\omega)I_p(j\omega) \tag{2.279}$$

注意式（2.277）中的二次型总是实数。众所周知，在网络理论中 $\mathrm{Re}\,\overline{I'}(j\omega)V(j\omega)$ 和 $\mathrm{Re}\,\overline{I'_s}(j\omega)V_s(j\omega)$ 分别是G中吸收的和由G的独立电压源提供的平均功率的两倍。因此，根据定理2.15，我们断言 $\mathrm{Re}\,\overline{I'}(j\omega)V(j\omega)=0$。该引理由此得出。

因为 Z_{pp} 和 Y_{pp} 通常分别是从G中去掉所有的独立源后获得的网络 G*的支路阻抗和支路导纳矩阵，于是，如果式(2.277)中两个二次型的任何一个在某一频率是正定或半正定的，则该网络G不能用来放大含有该频率的输入信号的功率。另一方面，如果上述二次型不是正定或半正定，则该网络 G* 总能够连接作为一放大器或一振荡器工作。

下面我们将证明，如果式(2.277)中的二次型不是恒等于零，则网络具有唯一解。

定义 2.36：欧姆性。

对于复数域上的每一非零矢量X，如果二次型$\bar{X}'ZX \neq 0$，则复数域上的方阵Z叫做欧姆性的。

定理 2.33：如果Z是欧姆性的，那么Z是非奇异的。当且仅当Z是欧姆性的，则Z的逆也是欧姆性的。

证明：设Z是非奇异的，则存在一非零解X_1，使$ZX_1=0$。这样，当$X_1 \neq 0$时，$\bar{X}_1'ZX_1=0$产生了矛盾。所以Z必须是非奇异的。如果Z^{-1}不是欧姆性的，则存在一非零矢量X_1，使$\bar{X}_1'Z^{-1}X_1=0$。设$X_2=Z^{-1}X_1$。因为$X_1 \neq 0$，$X_2 \neq 0$，因此我们有

$$\bar{X}_1'Z^{-1}X_1 = \bar{X}_2'\bar{Z}'Z^{-1}ZX_2 = \bar{X}_2'\bar{Z}'X_2 = 0 \qquad (2.280)$$

现在，如果我们取共轭复数并变换最后一个关系式，我们看到，当$X_2 \neq 0$时，$\bar{X}_2'ZX_2=0$，这与Z是欧姆性的假设相矛盾，所以Z^{-1}是欧姆性的。反过来说，如果Z^{-1}是欧姆性的，则$(Z^{-1})^{-1}=Z$必须是欧姆性的。定理证毕。

引理 2.14：设F是一阶数为$p \times q$、秩为p的实数矩阵，如果Z是一q阶欧姆性矩阵，则FZF'也是欧姆性的。

证明：设X是一非零p矢量。我们需要证明$\bar{X}'FZF'X \neq 0$，为此目的，定义

$$X_1 = F'X \qquad (2.281)$$

X_1是一q-矢量，因为F'的秩为p，又因为$X \neq 0$，于是$X_1 \neq 0$，因为Z是欧姆性的，我们有$\bar{X}_1'ZX_1 \neq 0$，即

$$\bar{X}_1'ZX_1 = \bar{X}'FZF'X \neq 0 \qquad (2.282)$$

引理证毕。

定理 2.34：设G是一不包含有任何回路（切割）仅由独立的和非独立的电压(电流)源组成的网络。设G^*是从G中移去所有独立源后获得的网络。如果G^*的支路阻抗(支路导纳)矩阵$Z_{pp}(Y_{pp})$是欧姆性的，那么G的回路阻抗（切割导纳）矩阵$BZB'(QYQ')$是非奇异的，同时网络G的解是唯一的。

证明：设B^*和Q^*分别是G^*的基本回路和基本切割矩阵。因

为 Z_{pp} 和 Y_{pp} 是欧姆性的，从定理 2.33 和引理 2.14 得出网络矩阵 $B^*Z_{pp}B^{*\prime}$ 和 $Q^*Y_{pp}Q^{*\prime}$ 二者均是欧姆性的和非奇异的。定理的第一部分即可从推论 2.11 和 2.13 得出。

为证明解是唯一的，让我们假设组成对 (V_1, I_1) 和 (V_2, I_2) 是两个不同G中的支路电压和支路电流矢量的集合，它们满足式(2.40)—(2.42)。又设

$$V = V_1 - V_2 \quad 和 \quad I = I_1 - I_2 \tag{2.283}$$

因为 $BV_1 = 0$ 和 $BV_2 = 0$，我们得到 $BV = 0$。根据推论 2.12，存在一r 矢量 V_c，使

$$V = Q'V_c \tag{2.284}$$

其次，因为

$$I = I_1 - I_2 = YV_1 - YV_2 = YV \tag{2.285}$$

并因为 $QI = 0$，从式(2.284)和(2.285)得出

$$QYQ'V_c = 0 \tag{2.286}$$

但是根据证明的第一部分，QYQ' 是非奇异的。因此式(2.286)仅具有零解 $V_c = 0$。根据式(2.284)和(2.285)，我们有 $V = 0$ 和 $I = 0$，这表示组成对(V_1, I_1)和(V_2, I_2)是恒等的。因而解确实是唯一的。

推论 2.51： 如果 G^* 的 Z_{pp} 或 Y_{pp} 的哈密特部分是正定或负定，那么G具有唯一解。

现在我们将以上结果应用到"RLCM 网络"。

定义 2.37：RLCM 网络。

由电阻器、电容器以及自感和互感线圈组成的网络叫做 RLCM 网络。

对于一RLCM 网络 G^*，它的支路阻抗矩阵 Z_{pp}(如果必要的话，通过同时交换行和列)，能够根据 G^* 的电阻器、电感线圈和电容器分块成如下形式

$$Z_{pp} = \begin{bmatrix} R & 0 & 0 \\ 0 & sL & 0 \\ 0 & 0 & D/s \end{bmatrix} \tag{2.287}$$

式中R是每项都为正的对角线矩阵，D也是这样，L是正定或半定的。矩阵L是正定或半定的限制相当于要求该无源系统是稳定的。换言之，它表示如果一电感线圈的耦合能够得到这些线圈的矩阵L既不是正定也不是半定的，那么我们能够形成一个由这些电感线圈和一些无源电阻器组成的不稳定的无源网络。当然我们不能认为一个不包括有电源的物理网络会被烧坏，因此证明对于L的假设是正确的。

现在让我们考虑L的半定性，如果L是半正定的，它包含的一些主子阵是奇异的。如果任一组电感线圈是这样耦合的，它们的矩阵是奇异的，但对应于它的部分线圈的任何主子阵都不是奇异的，则这一组线圈称为是全耦合的。如果一个RLCM网络不含有全耦合线圈，则矩阵L将为非奇异，因而是正定的。除非另有相反的陈述，我们将假设是这一情况。

定理 2.35：设G是一含有独立源的非全耦合的RLCM网络。当且仅当它不存在仅由电压源组成的回路和仅由电流源组成的切割时，则G具有唯一解。

证明：这只要证明对于网络矩阵BZB'和QYQ'要求非奇异时，这个条件是必要的和充分的就足够了。

从前面我们对式(2.272)的讨论，显然对网络矩阵要求非奇异这个条件是必要的。还需要说明这个条件也是充分的，为此，设G的支路阻抗和支路导纳矩阵Z和Y按式(2.53)分块。又设基本回路矩阵B和基本切割矩阵Q的列与Z或Y有相同的边序列并按下式分块

$$B = [B_{11}\ B_{12}] \quad 和 \quad Q = [Q_{11}\ Q_{12}] \tag{2.288}$$

很容易检验

$$BZB' = B_{12}Z_{pp}B'_{12} \quad 和 \quad QYQ' = Q_{12}Y_{pp}Q'_{12} \tag{2.289}$$

我们假设网络G是连通的，这并不失去一般性。如果应用回路方程组，则根据定理的条件存在包含G的所有电压源的一种树 t（习题 2.43）。因此，对应于补树 $\bar{t}$（G中 t 的补树）的弦的那些列必在 B_{12} 中。根据定理2.5，B_{12} 含有 -m 阶的大子矩阵。因为 Z_{pp} 事实上是从G中去掉所有电压源后所获得网络的支路阻抗矩阵，根据式(2.287)对于正实数 s，Z_{pp} 是正定的。因此 Z_{pp} 是欧姆性的。根据式(2.289)和引理 2.14，得出的 BZB' 是非奇异的。类似地，应用习题 2.44 我们能够证明 QYQ' 也是非奇异的。该定理证毕。

值得花时间证明我们前面对于回路分析不存在电流源，对于切割分析不存在电压源的假设是有道理的。当电流源和电压源都存在时，尽管每种方法都能应用，作此假设能简化每种情况所获得的解。如果电流和电压源都存在，则如前面提及的不论是用回路法或是用切割法分析该网络需要一些简单的网络变换（戴文宁和诺顿等效网络）。一种更好的解法是利用网络的线性并将叠加原理应用到在§3.2和§3.3中已经求得的解（习题 2.42）。显而易见，如果此解对每一种情况都是唯一的，那么网络的解对于两类电源都存在时，也一定是唯一的。

最后，我们设两种也许在其它场合被忽视的情况。第一，没有不能应用回路或切割方程组的特殊网络。第二，一个网络支路可以是简单的电阻器、电感线圈、电容器或是独立的或非独立的电源或是这些元件的串联和(或)并联连接，这任我们选择。如果我们选择元件的串联和(或)并联连接为网络支路，网络的支路阻抗或支路导纳矩阵通常可使之为非奇异的，这又能帮助我们决定它的唯一可解性。举例说明这后一陈述，假设我们把图 2.13 中的网络元素 V_g 和 L_2s 看作为一单个支路。假设我们对 $g_m i_4$ 和 R_7 作同样的考虑。则网络的支路阻抗矩阵为

$$
\mathbf{Z}=\begin{bmatrix} L_2s & Ms & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Ms & L_3s & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C_4s} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_m & 0 & R_7 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & Z_8 \end{bmatrix}
$$

式中元件 L_2s 和 R_7 的电流参考方向用作组合支路的参考方向。如果这两个电感线圈不是全耦合，则 $\mathbf{Z}$ 是非奇异的，但对应于式(2.61)的支路阻抗矩阵却是奇异的。

§ 8. 结束语

本章中，我们从与有向图相联系的矩阵的基本特性开始讨论，应用这些结果，电网络问题在基尔霍夫定律和欧姆定律的基础上，已用精确假设的方式进行系统阐述。许多讨论都充分一般化使之适用于一般的线性系统。为了求解网络问题，我们还介绍了两种重要的方法：回路法和切割法。

我们已经证明网络行列式的许多不变量特性都能够纯粹从图的理论推导得出，而不必从物理论据求得。因此，网络行列式不变量的特性不仅对电网络适用而且对其它系统也适用。因为网络矩阵元素的代数余子式对于不论是回路还是切割变换通常不是不变量，它们值的不变性只能用精确定义的被称为广义代数余子式的量值来陈述。已经证明，虽然网络行列式或广义代数余子式对于一般的回路系统或切割系统不是不变量，它们以一实常数相联系，这一实常数仅决定于回路或切割的两种选择。而对于f-回路和f-割集，平面图的网孔和关联切割的集合等这样一类最通用的和主要的类型它们全是不变量。同时还证明了网络矩阵的行列式和它的某一广义代数余子式之比或两个广义代数余子式之比关于回路或切割的选择是不变

量。特别是，由此得出网络函数对于一般参考系统的变换是不变量。换言之，我们能够说许多网络的不变量特性是它拓扑特性的结果而不是它支路特性的结果。

我们还证明了网络矩阵的行列式及其广义代数余子式，虽然它们对于关联函数的选择通常不是不变量，但对于一般的电网络却是不变量

应用这些建立的恒等式推导出了RLC网络的拓扑公式。它们对网络分析和网络综合都有应用。在分析中，拓扑公式提供一种求网络行列式和代数余子式的简捷方法。因为它避免了通常在求这些行列式值时出现的内部相消项。在综合方面，它们提供了对集总网络发现重要新技术的可能性，这些新技术能够推广适用于所有的集总系统。

最后，我们提供了对一般网络问题存在唯一解的充分条件以及对一个非全耦合RLCM网络唯一可解性的必要和充分的条件。

习　题

2.1. 对一非连通有向图G证明定理2.1。

2.2. 设g是一n-节点连通图G的一个子图，证明如果g具有(n－1)条边同时不包含回路，则g是G的一个树。

2.3. 证明一非连通有向图G的回路矩阵B_a的秩至少等于G的零度。

2.4. 证明引理2.4。

2.5. 证明引理2.5。

2.6. 证明一有向图G的任一切割和任一回路的公共边数总是偶数。应用此结果证明如果一个切割与某一回路具有2k条公共边，则其中k条边在该切割和该回路中具有相同的相对方向，而其它的k条边在切割中具有一种方向而在回路中具有相反的方向。

2.7. 证明定理2.6。

2.8. 写出定理2.9证明的详细过程。

2.9. 证明如果一有向图G具有几个连通片，则我们能够对G的节点和边重新编号使A_a正好是这几个片的关联矩阵的和。

2.10. 证明如果G是含有c个连通片的n-节点有向图，则当且仅当Q的一个(n-c)阶子阵的列对应于这些片的c个树的一个节点不相接的并集即G的一个林时，则该子矩阵是非奇异的。

2.11. 证明推论2.4。

2.12. 证明由将节点分成V_1和V_2所定义的一连通图的切割，当且仅当由集合V_1和V_2定义的两个局部子图都是连通子图时，则该切割是一割集。

2.13. 对一非连通有向图定义一f-割集集合和一f-回路集合。

2.14. 证明推论2.8。

2.15. 导出式(2.49)和(2.50)给出的恒等式。

2.16. 设A是以节点k为基准节点的有向图G的基本关联矩阵。又设G^*是使G中节点i与节点k短接后获得的有向图。证明如果A_{-i}是从A中删去第i行后获得的子矩阵，则A_{-i}是G^*的一个基本关联矩阵。

2.17. 设$Z_m=[z_{ij}]$是一RLC网络G的回路阻抗矩阵，证明：

$z_{ii}=\sum$(回路i中的所有支路阻抗) (2.290 a)

$z_{ij}=\sum$(回路i和j以相同方向经过的所有公共支路的阻抗)

$-$(回路i和j以相反方向经过的所有公共支路的阻抗)

(2.290 b)

其中$i\neq j$，对E_m的元素规律是什么？

2.18. 写出证明推论2.11的详细过程。

2.19. 设$Y_c=[y_{ij}]$是一RLC网络G的切割导纳矩阵。证明：

$y_{ii}=\sum$(切割i中所包含的所有支路导纳)

(2.291 a)

$y_{ij}=\sum$(切割 i 和切割 j 以相同方向经过它们的所有公共支路的导纳)—(切割 i 和切割 j 以相反方向经过它们的所有公共支路的导纳)

(2.291 b)

其中 $i\neq j$。对 J_c 元素的规律是什么?

2.20. 应用习题2.17中给出的规律，写下对应于如图2.16所示网络中回路的回路方程组。将其结果与式(2.69)进行比较。

2.21. 证明习题2.19中对 Y_c 元素给出的规律，当用的是关联切割时能够简化如下：

$y_{ii}=\sum$(与节点 i 相关联的所有支路导纳)

(2.292 a)

$y_{ij}=-\sum$(连接节点 i 和 j 之间的所有支路导纳)

(2.292 b)

其中 $i\neq j$。换言之，一RLC网络的节点导纳矩阵的元素能够如上获得。

2.22. 应用习题2.21中给出的规律，对如图 2.17 所示网络写下节点方程组。

2.23. 证明推论2.12。

2.24. 证明推论2.13

2.25. 对推论2.16和2.17给出一详细的证明。

2.26. 证明当且仅当大子矩阵 $B(I_n)$ 和 $Q(J_t)$ 的逆的各项分别都是整数时，则k(B)和k(Q)都是 1。

2.27. 证明f-回路和f-割集系统从一种变换成另一种必须包含一个具有行列式的值等于 1 或 —1 的矩阵。

2.28. 证明一RLC网络G的某一节点导纳矩阵的行列式，当与G的每条边相联系的导纳是单位1时，则该行列式的值能够被认为是G中树的总数。

2.29. 证明一连通有向图的树数为(detBB′)/k(B)。

2.30. 证明如果一个网络的单向转移导抗不能构成任何闭合回路，

那么我们总可以对网络的支路重新编号，用这样的方法使它对应的支路阻抗矩阵是三角形矩阵。

2.31. 证明恒等式(2.169 a)和(2.169 b)。

2.32. 应用式(2.78)导出公式(2.189)。

2.33. 应用式(2.83)导出公式(2.191)。

2.34. 证明一网络G的网络行列式对于G的节点和边的标号是不变量。换言之，交换B(Q)的行或列和Z(Y)的相应行和列，网络行列式是不变量。

2.35. 证明习题2.34中给出的陈述也适用于网络矩阵元素的广义代数余子式。

2.36. 证明一个网络的回路阻抗矩阵或切割导纳矩阵元素的广义代数余子式对于该网络关联函数的选择是不变量。

2.37. 证明引理2.11。

2.38. 证明推论2.50。

2.39. 导出定理2.32中给出的恒等式。

2.40. 对由网络中的独立电压源或独立电流源释放的虚功导出类似于式(2.277)中给出的二次型(提示：应用式(2.275)的虚部)。

2.41. 证明一连通平面图G的每条回路边包含在G的两个而且仅仅是两个网孔之中，其中包括由外部区域的边界形成的网孔。

2.42. 对在§3.2和§3.3中已经求得的解利用网络的线性和叠加原理，对同时含有电压源和电流源的网络导出用支路电压源和支路电流源矢量表示的支路电压和支路电流矢量的公式。

2.43. 证明一连通图G的子图当且仅当它不含有回路时，则能构成G的某一树的一部分。

2.44. 证明一连通图G的子图当且仅当它不含有G的切割时，则能构成G的某一补树的一部分。

2.45. 设B是有向图G的基本回路矩阵。证明当F是阶数为 $r\times b$，秩为r，各项分别为1，-1和0的矩阵且满足 $\mathbf{BF}'=0$ 时，则F的每一行对应G的一个切割。

2.46. 设Q是有向图G的基本切割矩阵，证明当F是阶数为 $m\times b$，秩为m，各项分别仅为1，-1和0的矩阵且满足 $\mathbf{QF}'=0$ 时，则F的每一行对应一个回路或一个边不相接回路的并集（SESHU和REED[1961]）。

2.47. 应用定理2.10求如图2.2所示有向图的基本关联矩阵的某一大子矩阵的逆。

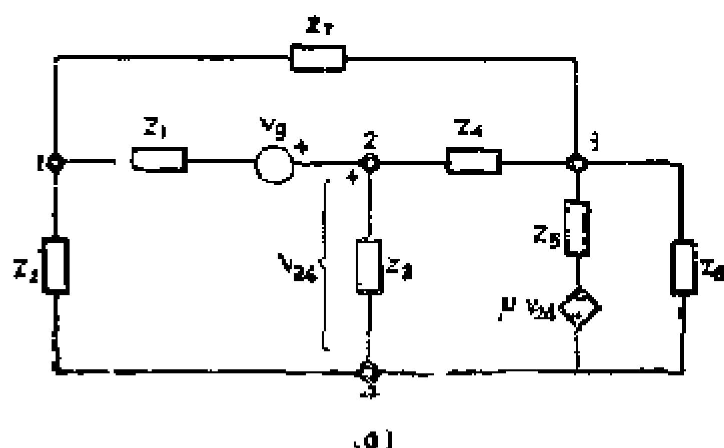
2.48. 设Z是一具有非负实数项的对角线矩阵。证明网络矩阵 $\mathbf{B}_f\mathbf{Z}\mathbf{B}_f'$ 和形式为 $\mathbf{PB}_f\mathbf{ZB}_f'\mathbf{P}'$ 的任意矩阵（这里P是各项分别为1，-1和0的置换矩阵）不能包含大于3阶的、离开对角线的各项均为负的主子阵（BROWN[1968]）。

2.49. 在习题2.48中，如果 $\mathbf{B}_f\mathbf{Z}\mathbf{B}_f'$ 中的所有项均为非零，则存在一各项分别为1，-1和0的置换矩阵P。这使

$$\mathbf{PB}_f\mathbf{ZB}_f'\mathbf{P}'=\begin{bmatrix}\mathbf{R}_1 & \mathbf{R}_2\\ \mathbf{R}_2' & \mathbf{R}_3\end{bmatrix} \tag{2.293}$$

式中 $\mathbf{R}_1$ 和 $\mathbf{R}_3$ 包含所有的正项，$\mathbf{R}_2$ 的任意行中的所有项具有相同的符号（BROWN[1968]）。

2.50. 图2.37表示一简单的反馈放大器及其等效网络、应用该网络



(a)

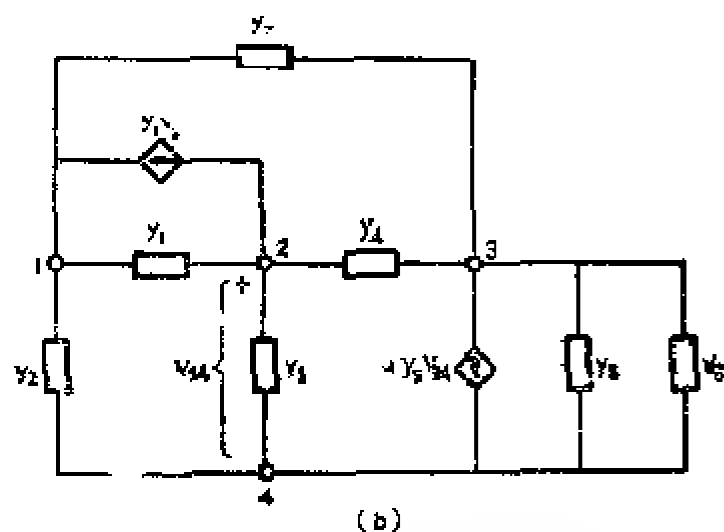


图 2.37 反馈放大器及其等效网络

验证推论2.28。

2.51. 证明如果M是各项分别为1，−1和0的任一方阵，它的每一列或行中含有偶数个非零项，则detM为零或为一偶整数。

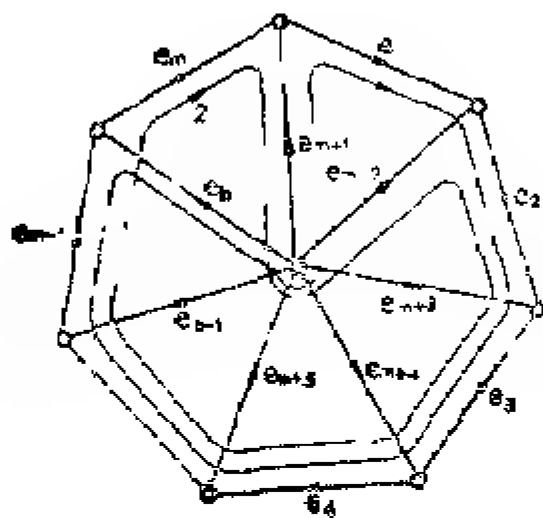


图 2.38 习题2..2中考虑的m个回路

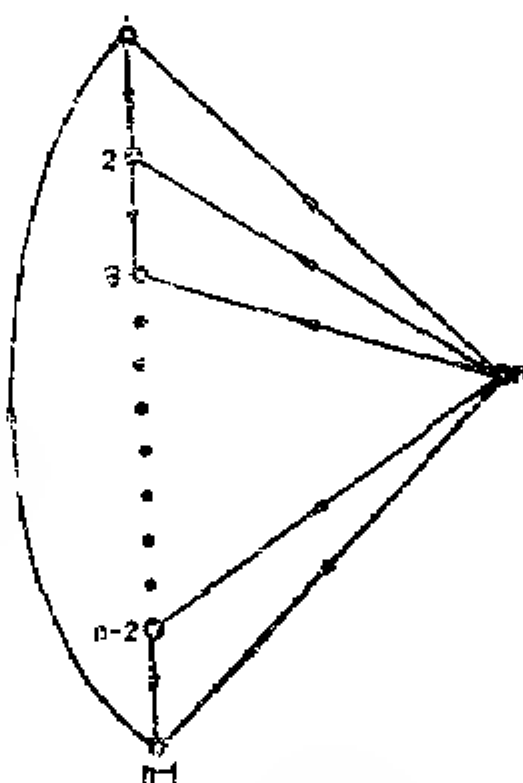


图 2.39 一平面有向图

2.52. 设**B**是如图2.38中所示平面有向图的基本回路矩阵，对应的m个回路如图中所指出。证明 $k(\mathbf{B})=(m-1)^2$。(Brown和Budner, 1965)。

2.53. 在图2.39中，设有向图G的节点集合分成不相接的子集 $V_k=\{k, n\}$和 $\overline{V}_k$，这里$\overline{V}_k$是 V_k在$\{1, 2, \cdots n\}$中的补集，又设C_k是G的割集，它将G的节点分成两个子集V_k和$\overline{V}_k$，C_k的方向是从 V_k指向 $\overline{V}_k$。证明如果Q是对应于G的$(n-1)$个割集 C_k 的基本割集矩阵，则$k(Q)=(n-2)^2$，式中$k=1, 2, \cdots, n-1$。

2.54. 对一连通RLC网络，设 z_x 是与它的边 e_x 相联系的阻抗。证明当Z_x 是从边 e_x(包括 e_x 在内)看进去的策动点阻抗函数时，则

$$\sum_{x=1}^{b}(z_x/Z_x)=m \tag{2.294}$$

2.55. 在习题2.54中，证明如果Y_x是从 e_x 的两个端点看进去的策动点导纳函数，则

$$\sum_{x=1}^{b}(y_x/Y_x)=r \tag{2.295}$$

式中$y_x=1/z_x$。

2.56. 证明如果某网络G对它的支路电流和支路电压矢量具有唯一解，那么G存在这样一种树 t，使独立的和非独立的电流源都为补树$\bar{t}$的弦，独立的和非独立的电压源都是 t 的树支(Sesnu和Reed[1961])。(提示：见式(2.272)下面的讨论并应用定理5.4)。

2.57. 证明在一有向或无向图G中存在(2^m-1)个非空回路和边不相接回路的并集。问G必须是连通图吗？

2.58. 证明如果F是全单位模矩阵，那么F′，交换 F 的行和列后得到的矩阵，所有F 的子矩阵，以及用－1 乘 F 的行或列后得

到的矩阵也是全单位模矩阵。

2.59. 当$u_1 = v_1$或v_2，或者$u_2 = v_1$或v_2的情况下，证明定理2.30

2.60. 证明式(2.2)的完全解是βx，这里β是一实常数，x仅由元素1组成。(提示：应用引理2.1及其证明的第一句中陈述的结果。)

2.61. 对于由两个充有不同电压的完全相同的电容并联连接构成的网络，我们知道能量是不守恒的。在这种情况下，定理2.16会发生什么变化?

2.62. 鉴于习题2.61，给出另一个能量不守恒网络。如果可能，给出这样网络的简单特性。

2.63. 证明以下三个公设

$$\mathbf{Q}\mathbf{I}(t)=\mathbf{0},\ \mathbf{B}\mathbf{V}(t)=\mathbf{0},\ \mathbf{I}'(t)\mathbf{V}(t)=\mathbf{0} \tag{2.296}$$

其中任何两个应该包含有第三个。

第三章　线性代数方程组的有向图解法

线性系统的分析最终归结为求解一组联立线性代数方程组，不同于求解系统的一般常用的代数法，有可能通过研究与系统相关联的某些有向图的性质，来获得系统的解。方程组中的未知量对应于图的一个节点，它们之间的线性关系用连接节点的有向边的形式来表示。在分析工程技术问题中，尤其是线性问题，这种有向图法特别有用，因为在很多情况下，无需首先建立有关方程组，可以通过观察物理系统的结构，直接建立伴随有向图。它提供了一种看得见的结构，在其中各变量间的因果关系可清楚地显示出来并进行对照。

用一个有向图与一组线性方程式相联系的基本概念，首先是由MASON[1953]提出的，这样的图被称为信号流图。后来COATES[1959]提出另一种称之为流图的有向图来描述线性方程组。按实际情况而论，这两种形式的图在有向图的形成和求解过程或拓扑公式上有着非常密切的联系。由于信号流图在文献上也称为流图，为了避免可能的混淆，这里将信号流图称为MASON图，流图称为COATES图，以示区别。

本章主要介绍这一问题的基本概念，而不涉及这些图对于物理系统的专门应用。关于MASON图应用的许多例子可在CHOW和CASSIAGNOL[1962]以及TRUXAL[1953]有关书刊中找到。本章侧重在这些方法的证明上。

如前所述，加权有向图是这样的一个有向图，它的每条边都赋有一个权。我们用f(i, j)来表示G的边(i, j)有关的权。如果G_s是G的一个子图，如$G_s \neq \phi$(ϕ表示空图)，则$f(G_s)$表示为

$$f(G_s) = \Pi f(ij) \qquad (3.1a)$$

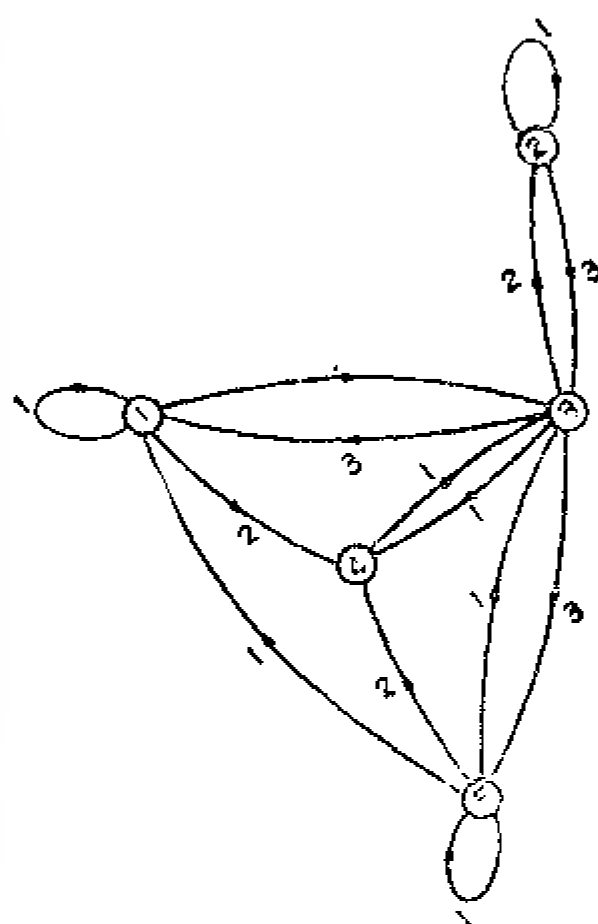


图 3.1 加权有向图

式中乘积取遍所有 G_s 中可能的边(i,j)，并令

$$f(\phi)=0 \qquad (3.1b)$$

换言之，如果G的权是取之于一个数域中的值，则函数 f 被看作为具有范围在所有子图集中，以及取值范围在数域中的映射函数，这样对于G的每个子图 G_s 来说，式(3.1)成立。

例如在图 3.1 中，令 G_s为包括边(3.1)、(2.2)、(5, 4) 和(3, 5) 的子图，则，

$$f(G_s)=f(3,1)f(2,2)f(5,4)f(3,5)=3\cdot1\cdot2\cdot3=18$$

对于G的一种特殊类型的子图 Guv，符号

$$\sum_{Guv} f(Guv) \text{ 或 } \sum_{uv} f(Guv)$$

表示对这一类型所有可能的子图 Guv 求和。

§ 1. 伴随 COATES 图

行列式的展开项和对应的伴随有向图的子图之间对应关系的基本概念并不是新的。KONIG [1916] 是应用图论方法来求行列式值的第一个人，从那时候起，许多作者为了各自的目的采用过这一方法(例如参看 LUCE 和 PERRY[1949]、KAC 和 WARD [1952]，

HOHN 和 SCHISSLER[1975]以及 COPI[1958])。我们的目的是根据 CHEN[1967 a]的研究成果，对这些对应关系给出一个既严格又系统的推导。

定义 3.1：COATES 图。

对于一个 n 阶的方阵 $A=[a_{ij}]$，其伴随 COATES 图用符号⊖ $G_c(A)$ 或简单地用 G_c 表示，它是一个具有 n 个节点、加权、加标的有向图，节点从整数 1 到 n 依次标号。如 $a_{ij}\neq 0$，则从节点 i 到 j 之间有一个有向边，该边的权为 a_{ij} ($i, j=1, 2, \cdots n$)。为了方便起见，有时对于不在 $G_c(A)$ 中的边看成为 $G_c(A)$ 中其权为零的边。

以上描述的过程表明怎样从矩阵得到 COATES 图。从 COATES 图得出伴随矩阵的相反过程是非常简单而直接的，无需进一步详细描述。作为例子，如矩阵

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.2}$$

它的伴随 COATES 图如图 3.1 所示，反之，如给定图 3.1，$G_c(A)$ 的伴随矩阵 A 也很容易得到。因此，矩阵和 COATES 图之间存在一一对应的关系。按 HARARY「1962 a」所用的变元邻接矩阵的确切提法，COATES 图 G_c 的伴随矩阵不过是其变元邻接矩阵的变换，或者按 HOHW[1957]等人的意思，是基本原邻接矩阵的变换。

1.1 求行列式值的拓扑法

在这一节中，我们将论证矩阵 A 的行列式展开项和 $G_c(A)$ 的

⊖ 与第二章中所用的符号相比较，A 不表示有向图的基本关联矩阵，这不会产生任何混淆，因为它不出现在这一章中。

某类子图之间的密切关系。它们是由KONIG[1916]首先提出的，并由COATES[1959]利用有向图的关联矩阵作为工具，严格而系统地推导出来。COATES公式的一个简单推演是由DESOER[1960]给出的。

定义 3.2：1-因子。

有向图G的1-因子是G的一个生成子图，它是度数为1的正则图。

在线性系统的一般拓扑分析中，1因子在各种应用中起着相当大的作用。更直观地说，1因子是包括G中全部节点的节点不相接有向回路集。有时，1因子在工程文献上也称为连接或P-集圈(*DESOER*[*1960*]，*SESHO*和*REED 1931*]*§10.2*)，但是，由于术语1因子更直观，而且在术语连接或P-集圈使用之前早就使用

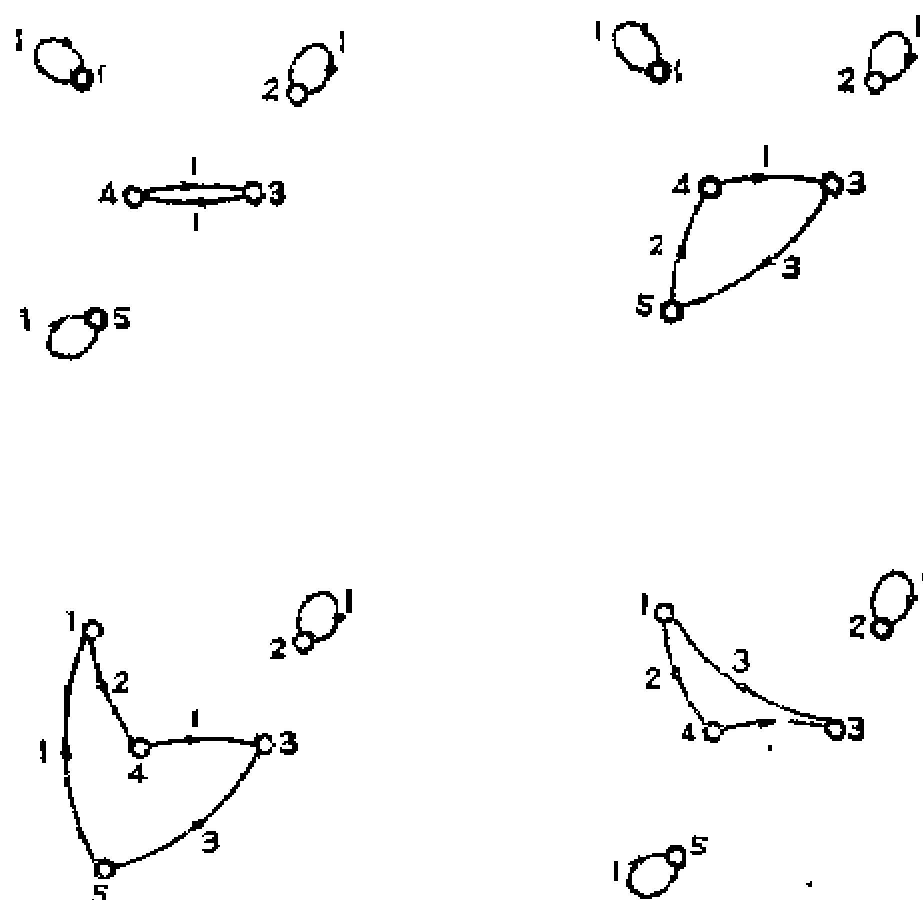


图 3.2　图3.1COATES图的1因子集合

了（例如参见 TUTTE 1953），所以我们更愿意使用上面的术语。为了说明它的意义，图 3.1 的四个 1 因子示于图 3.2 中。

矩阵 A 的行列式和 COATES 图 $G_c(A)$ 之间的基本联系可以参考行列式的定义得到：

$$\det A = \sum_{(j)} \varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n} a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (3.3)$$

其中 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是 1，2，…，n 的一个排列，和号 $\sum_{(j)}$ 是取遍所有这种排列的和，而当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是偶排列时，$\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是 1；当 $j_1 j_2 \cdots j_n$ 是奇排列时 $\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 是 -1。

定理 3.1： 设 $G_c(A)$ 是 n 阶矩阵 A 的伴随 COATES 图，则

$$\det A = (-1)^n \sum_h (-1)^{L_h} f(h) \qquad (3.4)$$

其中 h 是 $G_c(A)$ 中一个 1 因子，L_h 表示 h 中有向回路数。

证明：设某一个排列，

$$a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \neq 0 \qquad (3.5)$$

显然，对应于这一非零项的 G_c 的子图 h 包括边 $(j_1, 1)$，$(j_2, 2)$，…及 (j_n, n)。由于每个 k 在序列中恰好出现两次，在某些有序偶中，一次为第一元素，另一次为第二元素，由此得出，h 的每个节点的入度和出度都是 1。因此，h 是 G_c 的一个生成子图，它是度数为 1 的正则图，也就是 G_c 的 1 因子。反过来说，显然对于每个 G_c 的 1-因子 h 都有式(3.3)中唯一的一个非零项与之相对应。因此，式(3.3)中的非零项和 G_c 的 1-因子之间存在一一对应关系。还需证明 $\varepsilon_{j_1 j_2 \cdots j_n}$ 的符号由 L_h 来确定。

设

$$(i_1, i_2) \cup (i_2, i_3) \cup \cdots \cup (i_w, i_1) \qquad (3.6\text{a})$$

是 h 中长度为 w 的一有向回路，组成一个 $(2 \times w)$ —数列如下：在第一行中，节点以 i_1，$i_2 \cdots i_w$ 的序列排列，而在第二行中，排列成 i_2，i_3，…，i_1。显然只要 $(w-1)$ 次置换足以把第二行的次序换成

第一行的次序。因此，如果 h 具有由 w_1，$w_2 \cdots w_{L_h}$ 条边组成的 L_h 个有向回路，则总的置换数为

$$(w_1-1)+(w_2-1)+\cdots+(w_{L_h}-1) \tag{3.6b}$$

在对应于 h 的非零项 f(h) 中足以使列标的次序整理为与行标次序相同。结果，这一排列的符号是$(-1)^{w_1+w_2+\cdots+w_{L_h}-L_h}=(-1)^{n-L_h}$

(3.6c)

定理证毕。

上面的结果实际上是度数为 n 的对称群理论中一个著名结果的变形，它阐明每一个排列都能分解成为不相接"圈"的族，而且这种分解是唯一的(例如，参见 MACLANE 和 BIRKHOFF[1967])。

另外，式(3.4)中项的符号可以由对应的 1-因子的偶片数来确定。

定义 3.3：偶(奇)片。

如果有向图G的一个片含有的边数为偶(奇)数，就称为偶(奇)片，孤立节点认为是偶片。

推论 3.1： $(-1)^{n+L_h}f(h)=(-1)^{q_h}f(h)$ (3.7)

其中 q_h 是 1-因子 h 中的偶片数。

这个结果在按照有向回路的长度是奇数还是偶数来确定1-因子的每个有向回路是冠以正符号还是负符号中是有用的。

在线性系统分析中常需要计算符号系统函数，也就是函数以字母而不是数值形式作为元。例如，在电网络的频域分析中，网络矩阵的元通常是复变量 s 的有理函数，系统函数是 s 的多项式之比。虽然，其行列式可以由常用的高斯消去法或主元消去法来求得，但是过程缓慢而且复杂。有向图法对问题提供了一个有效的解法。但是，它的效果取决于用它产生有向图的 1-因子的效率。对于一个复杂的 COATES 图来说，由于它的 1-因子数通常是很大的，最好有一个简单的公式预先确定 1-因子的数目，以便在式(3，4)的展开式中所有项都不会遗漏掉。解决这个问题的一个方法如下（CHEN

[1965 a])。

对于一个给定的方阵，除了矩阵的行列式外，还存在另一个使用比较少的量——矩阵的恒式。一个方阵 A 的恒式用符号 perA 来表示，它的定义除展开的各项均取正号外，其它都与矩阵行列式的定义相同：

$$\text{per}\,A = \sum a_{1j_1} a_{2j_2} \cdots a_{nj_n} \qquad (3.8)$$

恒式的某些性质在习题 3.62 中给出。求恒式的一个计算机程序最近已由 SHRIVER et.al[1969]写出。

对于一个 n 节点的有向图 G，令 $C(G)=[c_{ij}]$，为表示 G 的连接的 n×n 阶矩阵，而且仅当 G 中有 k 条边从节点 i 指向 j，则 $c_{ij}=k$，否则，$c_{ij}=0$。显然，C(G)是一个非负整数的矩阵。现在可以表明 $C(G_c)$的恒式等于 G_c 中 1 因子的数目。

推论 3.2：COATES 图中 1 因子的数目等于矩阵 $C(G_c)$ 的恒式值。

证明：设 A 是 G_c 的伴随矩阵，易于检验 $C(G_c)$是用 1 替换 A 的每个非零元素所得矩阵的转置。由于矩阵的恒式等于其转置的恒式，根据定理 3.1，在式(3.8)的求和中，G_c 的每个 1-因子贡献一个 1。因此，$C(G_c)$的恒式表示 G_c 的 1-因子的总数目。这样推论得到证明。

由于 $C(G_c)$是元素为 1 和 0 的矩阵，其恒式在计算上对于求值是不难的。作为一个例子，考虑图 3.1 所示的 COATES 图，G_c 的 1-因子数目由下式给出

$$\text{per}C(G_c) = \text{per}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 4 \qquad (3.9)$$

从图3.2中所示的四个G_c的1-因子，有

$$\det A \quad a_{11}a_{22}a_{33}a_{43}a_{55} + a_{11}a_{22}a_{34}a_{13}a_{45} - a_{22}a_{41}a_{54}a_{55}a_{13} + a_{21}a_{42}a_{34}a_{13}a_{55}$$

$$-1+6\quad 6+6\quad 5 \tag{3.10}$$

1.2 求余子式值的拓扑法

矩阵元素的余子式值，其求法类似于行列式。不过有必要先介绍一个定义。

定义 3.4：1-因子连接。

有向图G中从节点i到j的一个1因子连接是G的一个生成子图，它包含(1)从节点i到j的一条有向路径；(2)包括G的全部节点(已在(1)中的除外)的一组节点不相接的有向回路。

图3.1的G_c中从节点1到节点4的1因子连接集例示于图3

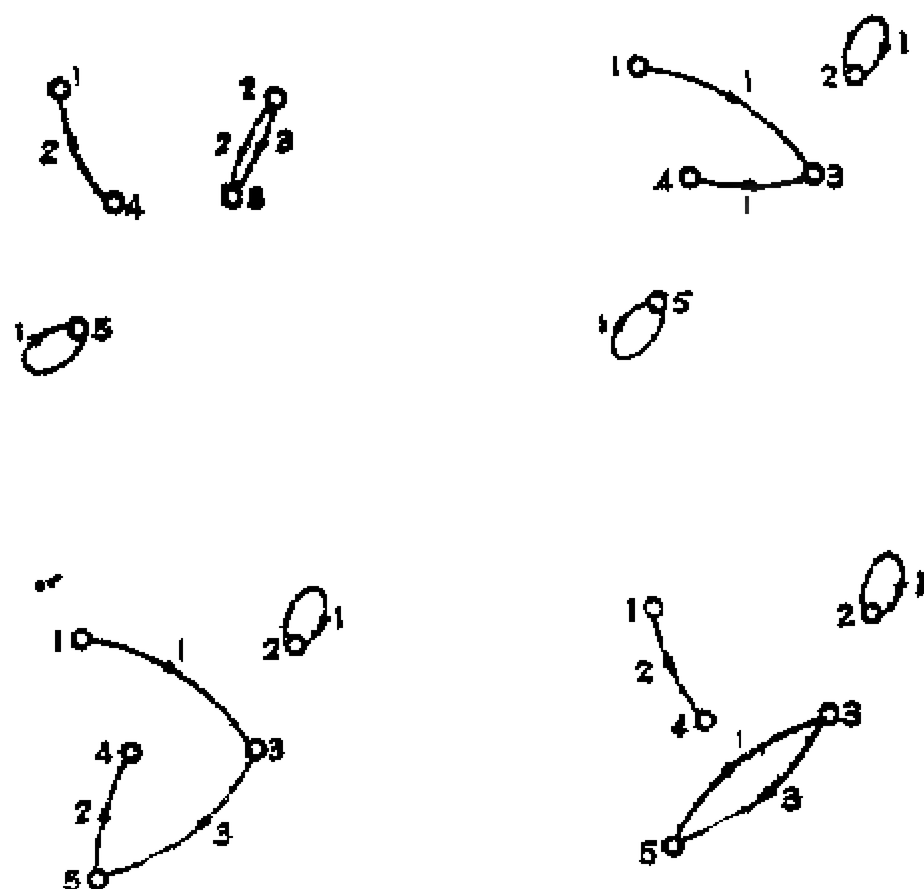


图 3.3 图3.1的COATES图中从节点1到j的1因子连接集

3。1 因子连接也称为单连接(COATES[1959])。

定理 3.2：设 $G_c(A)$ 是 n 阶矩阵 A 的伴随 COATES 图，则

$$\Delta_{ii}=(-1)^{n-1}\sum_{h'}(-1)^{L'_h}f(h')=\sum_{h'}(-1)^{q'_h}f(h') \tag{3.11}$$

$$\Delta_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_{H_{ij}}(-1)^{L_H}f(H_{ij})=\sum_{H_{ij}}(-1)^{q_H-1}f(H_{ij})\quad(i\neq j) \tag{3.12}$$

式中 Δ_{ij} 是 A 的元素⊖(i，j)的代数余子式；h' 是 $G_c(A_{ii})$ 中的 1-因子；H_{ij} 是 $G_c(A_{ij})$ 中从节点 i 到节点 j 的 1 因子连接；L'_h 和 L_H 分别是在 h' 和 H_{ij} 中的有向回路数；A_{ij} 是从 A 中划去第 i 行、第 j 列后所得的矩阵；而 q'_h 和 q_H 分别是在 h' 和 H_{ij} 中的偶片数。

证明：我们仅仅证明式(3.12)的第一部分，其余的可直接从定理 3.1 和推论 3.1 中得出。

为了证明式(3.12)的第一部分，注意到 Δ_{ij} 是从 A 中用一个零列去替换 A 的第 j 列(除了第 i 行元素为 1 以外)的行列式。设新产生的矩阵用符号 A_α 表示。为了用拓扑法求 A_α 的行列式值，注意到伴随 COATES 图 $G_c(A_\alpha)$ 可以从 $G_c(A)$ 中得到，只需简单移去所有以节点 j 为起点的边(包括在节点 j 的自环)，然后加一条从节点 j 指向 i 而且权为 1 的边，所得的图就是 $G_c(A_\alpha)$。根据定理 3.1 有

$$\begin{aligned}\Delta_{ij}=\det A_\alpha&=(-1)^n\sum_{h_\alpha}(-1)^{L_\alpha}f(h_\alpha)\\&=(-1)^n\sum_{H_{ij}}(-1)^{L_H+1}f(H_{ij})\end{aligned} \tag{3.13}$$

式中 h_α 是 $G_c(A_\alpha)$ 中的 1 因子，L_α 是 h_α 的有向回路数。第二行是根据下面理由而得，由于在 $G(A_\alpha)$ 中每个 h_α 必定含有权为 1 的附加边，而且把这条边移去并不影响边权的乘积，由此可见，在

⊖ 我们指的是在 A 的第 i 行和第 j 列上的元素。

$G_c(A_r)$中的 h_α 和 $G_c(A)$ 中的 H_{ij} 之间存在一一对应关系，所以 $f(h_\alpha)=f(H_{ij})$。由于 H_{ij} 的有向回路数比 h_α 的有向回路数少 1，所以有 $L_H=L_\alpha-1$。定理证毕。

还有一个符号问题，我们可以把 H_{ij}（在目前情况下，不是有向回路就是有向路径）的每个片，根据片是奇数还是偶数而赋予正符号或负符号联系起来，那么 $(-1)^{L_H}f(H_{ij})$ 不过是 H_{ij} 的有符号的边权乘积。

推论 3.3：在 COATES 图 G_c 中从节点 i 到 j 的 1 因子连接的数目等于从矩阵 $C(G_c)$ 中划去第 j 行和第 i 列所得的矩阵 $C(G_c)_{ji}$ 的恒式值。

由于矩阵行列式等于它的转置矩阵的行列式，显然如果我们用 $G_c(A')$ 替换 $G_c(A)$（这里"′"表示矩阵的转置），那么定理 3.1 和 3.2 仍然成立。唯一的例外是我们必须把 H_{ij} 理解为从节点 j 到 i 而不是节点 i 到 j 的 1 因子连接。这就是为什么在定义 3.1 中，我们定义：如果 $a_{ij}\neq 0$，则在 G_c 中存在一条从 i 指向 j的边而不是 $a_{ji}\neq 0$。因此，我们也可以利用定理 3.1 和 3.2 来求变元邻接矩阵（HARARY[1962 a]）的行列式值或有向图和其它元素余子式的连接矩阵（HONN et. al[1957]）的行列式值。

再一次考虑图 3.1 的 COATES 图 $G_c(A)$，从节点 1 到 4 的 1 因子连接数由下式给出

$$\mathrm{per}C(G_c)_{41}=\mathrm{per}\begin{bmatrix}0&1&1&0\\1&1&0&0\\1&0&1&1\\0&1&1&1\end{bmatrix}=4 \tag{3.14}$$

根据图 3.3所示的四个$G_c(A)$的1因子连接，有

$$\Delta_{14}=a_{12}a_{32}a_{23}a_{34}+a_{31}a_{41}a_{22}a_{35}-a_{31}a_{53}a_{44}a_{22}+a_{41}a_{33}a_{13}a_{22}$$
$$=12+1-6+6=13 \tag{3.15}$$

1.3 求线性代数方程组解的拓扑法

现在我们应用以上结果来解系统的联立（独立）线性代数方程组，用矩阵形式写出系统方程组是方便的：

$$AX=B \tag{3.16}$$

式中$A=[a_{ij}]$是n阶系数矩阵，而X和B是列矢量。X和B的转置分别由$[x_1, x_2, \cdots, x_n]$和$[b_1, b_2, \cdots, b_n]$给出。

定理 3.3：如果系数矩阵A是非奇异的，则式(3.16)的解由下式给出。

$$x_k=\frac{\sum_{H_{(n+1)k}}(-1)^{L_H}f(H_{(n+1)k})}{\sum_{h'}(-1)^{L'_h}f(h')},(k=1,2,\cdots,n) \tag{3.17}$$

式中$H_{(n+1)k}$是$G_c(Au)$中从节点n+1到k的1-因子连接，而Au是从A由对A的右边添加一列B，然后在所产生的矩阵的底部加一行零而得到的增广矩阵；h'是$G_c(A)$中的1-因子；L_H和L'_h分别是在$H_{(n+1)k}$和h'中的有向回路数。

证明：由于系数矩阵A是非奇异的，系统方程式(3.16)的解由下式给出：

$$x_k=\frac{\sum_{i=1}^{n}b_i\Delta_{ik}}{\det A} \tag{3.18}$$

式中Δ_{ik}是detA中a_{ik}的余子式，如果有必要交换Au的列，不难看到，式(3.18)的分子可以用Au的子式来表示。

$$\sum_{i=1}^{n}b_i\Delta_{ik}=(-1)^{n+1+k+1}(-1)\det(Au)_{(n+1)k} \tag{3.19}$$

式中$(Au)_{ij}$是从Au中划去第i行和第j列所得的矩阵。利用定理 3.2连同式(3.19)一起有

$$\sum_{i=1} b_i \Delta_{ik} = (-1)^{(n+1)+1} \sum_{H_{(n+1),k}} (-1)^{L_H} f(H_{(n+1),k}) \tag{3.20}$$

由定理3.1有

$$\det A = (-1)^n \sum_{h'} (-1)^{L'_h} f(h') \tag{3.21}$$

将式(3.20)和(3.21)代入式(3.18)，我们就得到所希望的结果。定理证毕。

这里，某些说明可能是必要的。我们可以不考虑系统(3.16)，而考虑下面的等效系统。

$$AuX'' = 0 \tag{3.22}$$

式中X″的转置是$[x_1, x_2 \cdots, x_n, x_{n+1}]$，其中$x_{n+1} = 1$，解$x_k$可以再一次写为式(3.19)对(3.21)之比。

由于$G_c(Au)$的节点与 Au 的列或行有关，分别把变量$x_1, x_2, \cdots, x_n, x_0$分配给$G_c(Au)$的节点1，2，…，n+1是适宜的。这些变量可以认为是与COATES图的节点有关的权或信号。为了方便起见，我们将不严格地说与节点权或信号x_k有关的节点k而就称为节点x_k。最后一个节点$x_0 = x_{n+1}$是与输入变量x_0相联系的，它取为1，而且称为源节点，因为在应用中，它相当于源而且没有边指向它。边权也称为传输量㊀，在这一章中，边权和传输量作为同义词。实际上，我们可以把节点看作为反馈环路断开的高增益运算放大器。因为在那种情况下，如果输出电压处于放大器的线性范围内，则流入输入节点的电流和必定是非常接近零的。因此系统方程式可以由每个节点c(不包括源节点）的射入边的传输量和射入边的起点变量的乘积之和等于零而得到。大概这是命名为信号流图的一个原因。最后应当指出，如果$G_c(A)$是给定的，$G_c(Au)$可以简单地由$G_c(A)$添加一个源节点x_0而得到，这样如果$b_k \neq 0$，则从源节点指向k有一条传输量为$-b_k$的边。

㊀ 有时，其他作者称此为边增益。

例3：考虑下面系统线性方程

$$\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & a_{13} & 0 & a_{15} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & 0 & a_{34} & a_{35} \\ a_{41} & 0 & a_{43} & 0 & a_{45} \\ 0 & 0 & a_{53} & 0 & a_{55} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ b_5 \end{bmatrix} \tag{3.23}$$

让我们求解x_4。伴随COATES图$G_c(Au)$如图3.4所示。除了权以外，$G_c(A)$的所有1-因子都列举于图3.2、$G_c(Au)$中从x_0到x_4所有的1-因子连接集示于图3.5。根据定理3.3有：

$$\begin{aligned} x_4 = (\; & b_1a_{41}a_{32}a_{23}a_{55} \;[illegible]\; b_1a_{31}a_{43}a_{22}a_{55} + b_1a_{31}a_{53}a_{45}a_{22} \\ & [illegible]\; b_5a_{45}a_{35}a_{51}a_{22} \;[illegible]\; b_5a_{41}a_{13}a_{32}a_{21} \;[illegible]\; b_5a_{45}a_{13}a_{31}a_{22} \\ & - b_5a_{35}a_{14}a_{41}a_{22} \;[illegible]\; b_5a_{35}a_{13}a_{41}a_{22} + b_5a_{15}a_{41}a_{32}a_{23} \\ & + b_1a_{51}a_{31}a_{43}a_{22})/(a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}a_{55} - a_{11}a_{22}a_{34}a_{45}a_{53} \\ & + a_{22}a_{41}a_{34}a_{53}a_{15} \;[illegible]\; a_{22}a_{41}a_{34}a_{13}a_{55}) \end{aligned}$$

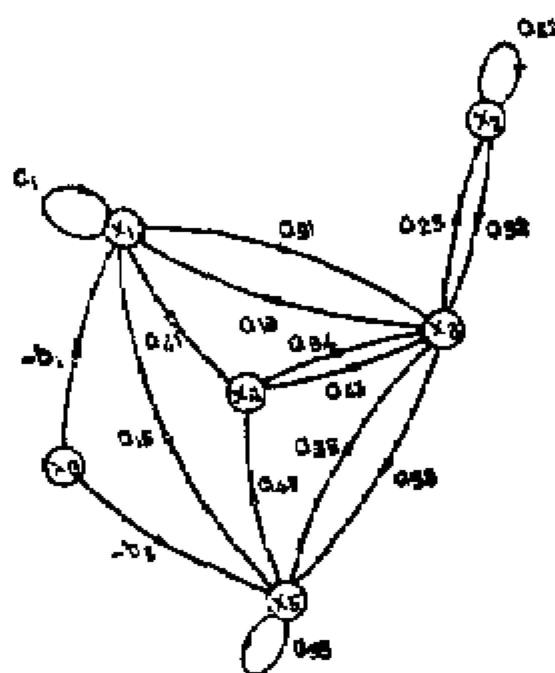


图 3.4 系统方程式(3.23)的伴随图

在线性系统分析中，特别在电网络中，在许多情况下，伴随COATES图可以直接从网络图得出，不必首先建立矩阵形式的方程组

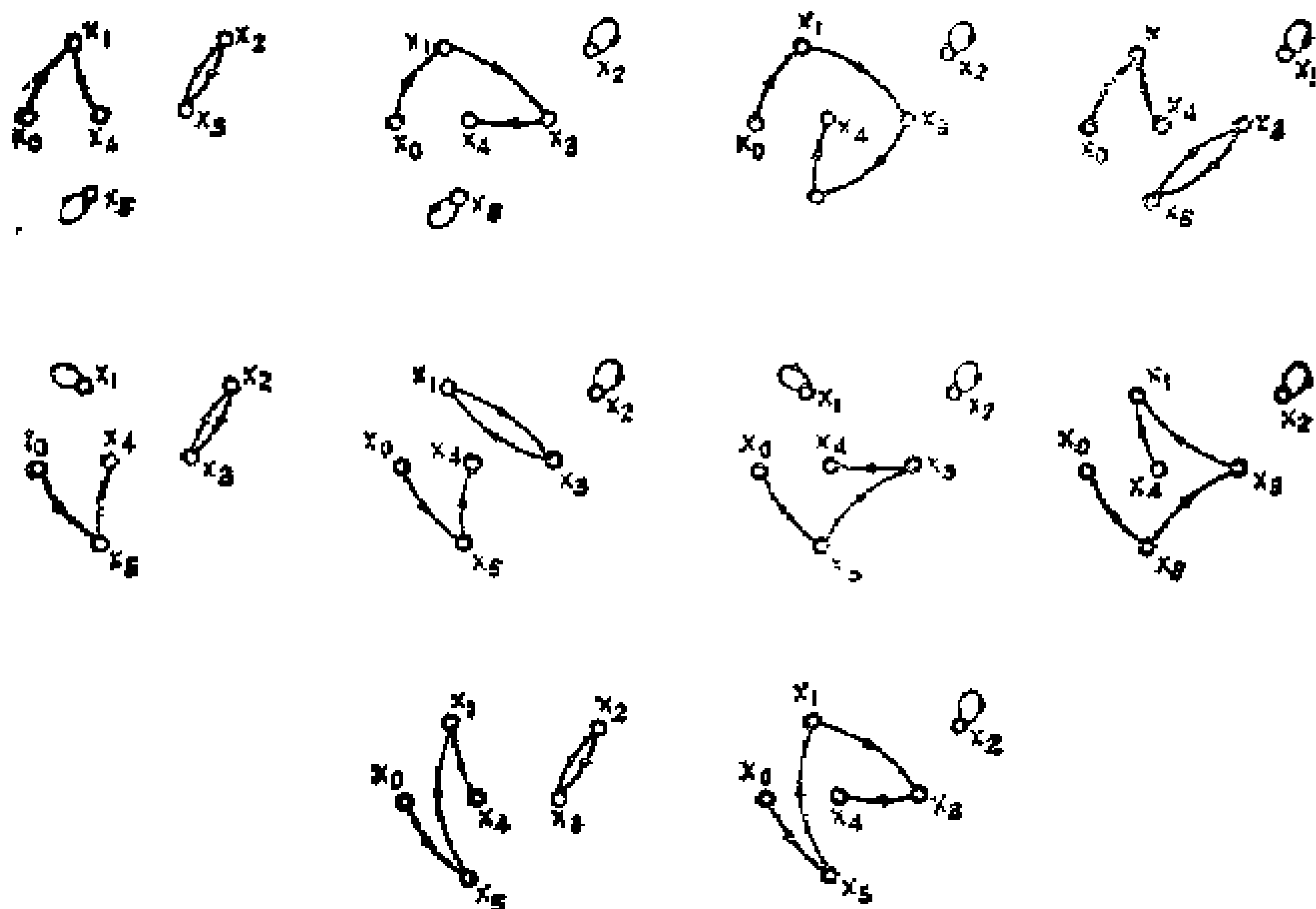


图 3.5　图3.4的COATES图中从X_0到X_4的1-因子连接集

(CHEN[1967b])。用下面例子(一般类型的晶体管反馈放大器)来说明这个问题。

例3.2：图3.6(a)为一晶体管放大器，(b)是它的等效网络。为了说明起见，系统的节点方程式给出如下：

$$\begin{bmatrix} G_b+g_b & g_b & -G_b \\ -g_b & g_b+g_a+g_c-\alpha g_e & -g_c \\ -G_b & -g_c+\alpha g_e & G_b+g_c+G_d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{3.24}$$

式中v_1、v_2和v_3是节点电压变量。矩阵Au的伴随COATES图 $G_c(Au)$如图3.7所示。将图3.6(b)所示的等效网络与$G_c(Au)$相比较，不难

看出，$G_c(Au)$可以直接从等效网络得出，不必首先写出节点方程式。假设需要求放大器的电流增益函数I_3/I_1，
那么

$$\frac{I_3}{I_1}=\frac{G_d V_3}{I_1}=\frac{G_d \sum_H (-1)^{L_H} f(H_{03})}{I_1 \sum_h (-1)^{L_h} f(h)}$$

$$=\frac{G_d[-(-I_1)(-G_b)a_{22}+(-I_1)(-g_b)(\alpha g_e-g_e)]}{I_1[a_{22}G_bG_b-a_{33}g_bg_b+a_{11}g_e(g_c-\alpha g_e)-G_bg_b(\alpha g_e-g_e)-g_eg_bG_b-a_{11}a_{22}a_{33}]}$$

$$=\frac{G_d[g_b(g_c-\alpha g_e)+G_b(g_b+g_e+g_c-\alpha g_e)]}{G_bg_bg_e+(1-\alpha)g_eG_bG_d+g_bg_e(G_b+g_c+G_d)+G_bg_eg_c+g_bG_d(g_c-\alpha g_e)} \qquad (3.25)$$

式中$a_{11}=G_b+g_b$，$a_{22}=g_b+g_e+g_c-\alpha g_e$和$a_{33}=G_b+G_d+g_c$，$H_{03}$是$G_c(Au)$中从$x_0$到$v_3$的1-因子连接，$h$是$G_c(A)$的1-因子，而$L_H$和$L_h$分别是$H_{03}$和$h$中的有向回路数

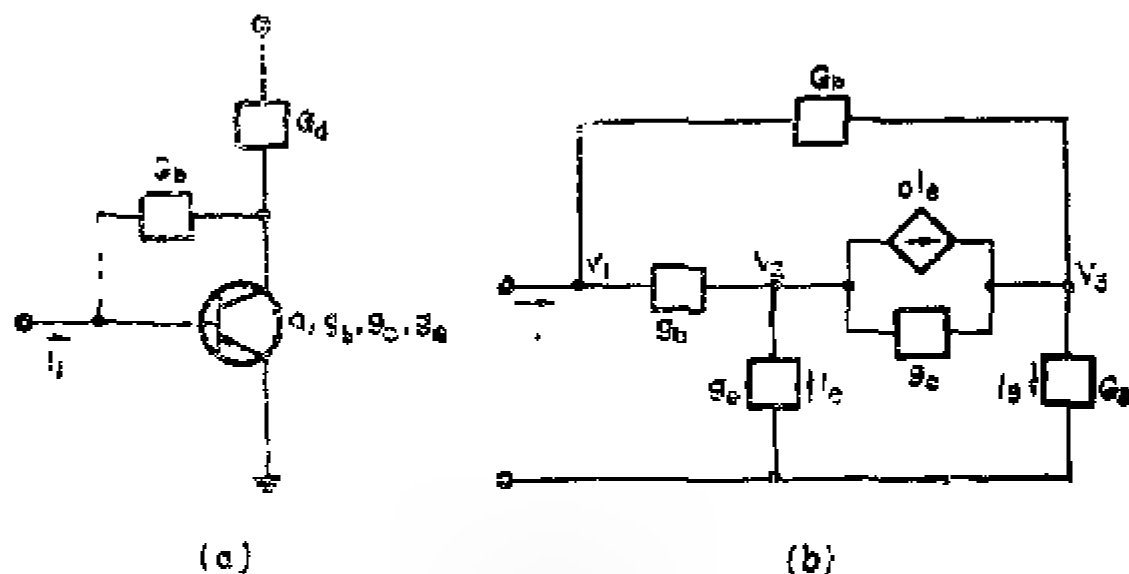


图 3.5 晶体管反馈放大器及其等效网络

这个例子需要略加一些非常重要的说明。如果源节点x_0指定为权I_1而不是1，而且如果如图3.13所示从节点x_0到v_1的传输量从$-I_1$改变为-1，那么在分子上每一项所出现的电流源变量I_1可以取

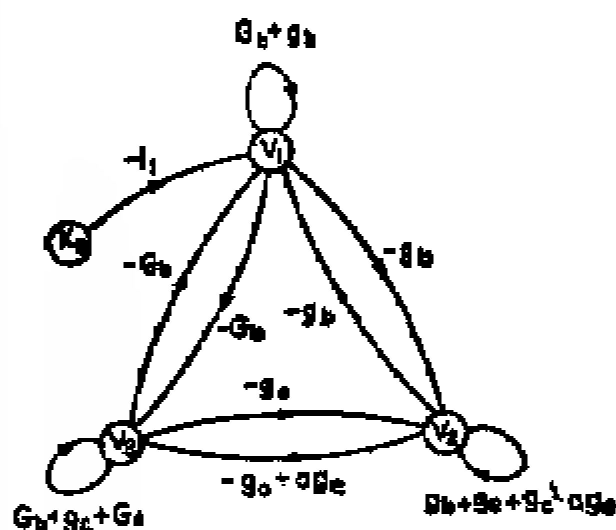


图 3.7　图3.6放大器的伴随COATES图

消。由于这些修改，那么解以v_3/I_1而不仅仅是以v_3给出。因此，一般来说，如果x_0选定为信号源，那么如式(3.17)右边所示，系统方程式(3.16)的解将以x_k/x_0给出，而不是单独的x_k。比值x_k/x_0称为G_c(Au)中从节点x_0到x_k的流图传输系数。下面正式下定义为：

定义3.5：G_c的流图传输系数。

设G_c是仅含有一个信号源节点x_0（入度为零的节点）的具有$(n+1)$个节点的柯特图，从节点x_0到$x_k(k=1, 2, \cdots, n)$的流图传输系数定义为如下的比值

$$\frac{x_k}{x_0}=\frac{\sum\limits_{H_{0k}}(-1)^{L_H}f(H_{0k})}{\sum\limits_{h'}(-1)^{L'_h}f(h')} \tag{3.26}$$

式中H_{0k}是G_c中从x_0到x_k的1-因子连接；h'是从G_c中移去源节点x_0所得图的1-因子，而L_H和L'_h分别是H_{0k}和h'中的有向回路数。

这个外观上简单的新概念是非常有用的，在大多数工程问题上需要计算符号系统函数（它定义为具有以字母而不是以数值形式给出系统参数的两个函数之比），可以用它代替常规的求解系统线性代数方程组。因此，这种方法的优点是明显的，我们一有机会就使用这种方法。从数学上看，根据x_0求x，式(3.26)所确定的流图传输系数的求值与求解以下系统方程式是等效的。

$$AX=x_0B \tag{3.27}$$

在定义上，要求G_c仅含有单个信号源，但这不是一个严格的限制，因为如果G_c具有多个信号源，可以按单个信号源分别计算其流图传输系数，而将其它所有信号源移去。

其次，如果我们所研究的系数矩阵中所有元素是不同的，一般说来在式(3.17)中不会出现对消项。但是在许多工程应用中，正如以上给出的例子中所看到的那样，这并不总是存在的。因此在这意义上，公式(3.17)并不具有很高的效率，但是通过COATES图的简单改进，它能够做到效率更高，这将在§3中进一步讨论。最后应当指出，对于每个如式(3.16)那样的系统方程，有一个唯一的对应伴随COATES图$G_c(A_a)$，反之亦然。但是如果出现于式(3.16)中方程式的次序改变，由于矩阵A_a跟着改变，伴随COATES图也明显地改变，因此一组方程式与COATES图的唯一对应性只有当这组方程式处于确定的序列下才是有意义的。

1.4 等效和变换

一旦给出COATES图，有可能直接写出从源节点到其它任何节点的流图传输系数的解。但是在应用前面导出的一般公式之前，对图先进行某些变换和简化，通常是有利的。对此，有一系列的方法可以利用，每种方法都类似于线性方程组的一般代数运算。

(A) 消去节点

求解线性方程组，使其中一组变量表示为另一组变量的函数，标准的代数方法是有条理地逐步减少方程数和变量数，直到得到仅包含所需要变量的一组方程为止。对于代数法中这样的一种方法，有一个与之对应的与方程式有关的有向图上的拓扑简化法，使得与简化后的图有关的方程式就是应用代数约化法得出的方程式。为了达到这个目的，COATES[1959]给出了怎样得到比原图少一个节点的等效COATES图的方法。这个步骤可以重复进行，直到需要移去的节点都被移去为止。在下面我们将介绍COATES法的一般规则，这一规则可以被认为是对COATES图的多重节点吸收算法，是由CHE

N[1964a]首先提出来的。

为了简便起见，G_c的图行列式用$\det G_c$表示，意思是与COATES图 G_c 有关的矩阵行列式，回想在第一章中对有向图的局部子图所规定的定义和符号(定义1.15和第一章的§5.1)，有了这些准备以后，现在开始讨论COATES图的简化方法。

设V_c是COATES图G_c节点集V的一个非空真子集，设G_{c1}是由下列步骤从G_c中得到的简化COATES图：

(i) 从G_c中移去局部子图$G_c[V_c]$，也就是移去与V_c中任一节点相关联的所有节点和边。

(ii)对于在$V-V_c$中所有的i和j，G_{c1}中与边(i, j)有关的权或传输量 C_{ij}由下式给出㊀。

$$
\begin{aligned}
C_{ij} &= (-1)^{\alpha}(1/k_c)\sum_{H_{ij}''}(-1)^{L_H''} f(H_{ij}'') \\
&= (1/k_c)\sum_{H_{ij}''}(-1)^{q_H''} f(H_{ij}'')
\end{aligned} \tag{3.28}
$$

式中H_{ij}''是局部子图$G_c[V_c^{ij}]$中从节点i到j的1-因子连接，其中V_c^{ij}是集V_c和{i, j}的并集；α，L_H''和q_H''分别是H_{ij}中节点，有向回路和偶片的数目，而k_c是局部子图$G_c[V_c]$的行列式，其值可由下面的公式求得：

$$
k_c = \det G_c[V_c] = (-1)^{\beta}\sum_{h''}(-1)^{L_h''} f(h'') \tag{3.29}
$$

式中h''是$G_c[V_c]$中的1-因子，而β和L_h''分别是V_c和h''中节点和有向回路的数目。当i=j时，$G_c[V_c^{ij}]$简化为$G_c[V_c^{i}]$，而从节点i到i的1-因子连接H_{ii}由定义变为$G_c[V_c^{i}]$中的1-因子。

幸好，实现以上所概括的步骤比用语言描述它更容易些，这只要稍微考察一下它的拓扑结构便可得到证实。在下面我们将证明在式(3.28)中给出的传输量G_{ij}能够解释为在G_c的某些改进的局部子图中的流图传输系数(CHEN[969a])。

㊀ 不在G_c中的边认为是具有零权的边，因此，可以有在G_{c1}中但不在G_c中的边。

对于 $i \neq j$，设 $G_c^{ij}[V_c^1]$是从局部子图 $G_c[V_c^1]$中先移去所有终止于节点 i 的边及所有从节点 j 出发的边，然后在节点 j 附加传输量为 -1 的自环而得到的 C_{OATES}图。于是，c_{ij} 仅仅是在 $G_c^{ij}[V_c^1]$中从节点 i 到 j 的流图传输系数。

对于 $i = j$，有类似的物理解释，在局部子图 $G_c[V_c^1]$中，我们首先用两个不同的节点 i' 和 i'' 替换节点 i，使 $G_c[V_c^1]$中所有原来从节点 i 出发的边现在都从节点 i' 出发，而所有原来终止于节点 i 的边现在都终止于节点 i''。然后在节点 i'' 附加传输量为 −1 的自环。设所得的流图用符号 $G_c^{ii}[V_c^1]$来表示。传输量 c_{ii} 仅仅是在 $G_c^{ii}[V_c^1]$中从节点 i' 到 i'' 的流图传输系数。上面用两个不同的节点 i' 和 i'' 代替节点 i 的步骤称之为节点分裂技术，这在反馈系统中是非常有用的（例如参见 H_{OSKINS}[1956]）。

对于以上物理解释的证明是不难导出的，证明留作练习（习题 3.5）。

定理3.4：如果 K_c 是非零的，那么

$$\det G_c = K_c \det G_{c1} \tag{3.30}$$

证明：设 A 是 G_c 的伴随矩阵，由于 G_c 的节点重新标号对应于同时交换 A 的行和对应的列，不失一般性，可以假定矩阵 A 以这样的一种方式分割致使 A_{11} 对应于节点集 V_{c1}：

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} \tag{3.31}$$

式中 A_{11} 和 A_{22}分别是阶为 β 和 $n-\beta$ 的子方阵，n 是 G_c 中的节点数，而由于假设 K_c 是非零的，A_{11} 是非奇异的（注意：A_{ij} 不再表示从 A 中划去第 i 行和第 j 列所得的子矩阵，这应当不会产生任何混淆。）

同样，很容易证明以下恒等式成立：

$$
\begin{bmatrix} U_{\beta} & 0 \\ -A_{21}A_{11}^{-1} & U_{n-\beta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}
$$

$$
= \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} \end{bmatrix} \tag{3.32a}
$$

和

$$
\det A = (\det A_{11})\det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}) \tag{3.32b}
$$

式中 U_x 是 x 阶的单位矩阵以及 0 是相应阶的零矩阵，而 A_{11}^{-1} 表示 A_{11} 的逆矩阵。

对于 $k, t = 1, 2$，设

$$
A_{kt} = [a_{ij}^{kt}] \tag{3.33}
$$

式中下标 i 和 j 是行和列的标记，并有

$$
A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12} = (1/K_c)[c''_{uv}] \tag{3.34}
$$

式中 $K_c = \det A_{11}$。从而对于 $u, v = 1, 2, \cdots, n-\beta$ 有

$$
c''_{uv} = K_c a_{uv}^{22} - \sum_{K_1, K_2} a_{uk_1}^{21} \Delta_{k_2 k_1}^{11} a_{k_2 v}^{12} \tag{3.35}
$$

式中 $\Delta_{k_2k_1}^{11}$ 是 A_{11} 的元素(K_2, K_1)的余子式，而 K_1 和 K_2 的范围从 1 到 β。根据定理 3.2，对于 $K_1 = K_2$ 显然有

$$
\Delta_{K_2K_1} = \sum_{h^{11}} (-1)^{q_{11}} f(h^{11}) \tag{3.36}
$$

而对于 $K_1 \neq K_2$ 有

$$
\Delta_{K_2K_1} = \sum_{H_{K_2K_1}^{11}} (-1)^{q'_{11}} f(H_{K_2K_1}^{11}) \tag{3.37}
$$

式中 h^{11} 和 $H_{K_2K_1}^{11}$ 分别是在 $G_c[V_c - \{K_1\}]$ 和 $G_c[V_c]$ 中从 K_2 到 K_1 的 1-因子和 1-因子连接，而且 q_{11} 和 q'_{11} 分别是在 h^{11} 和 $H_{K_2K_1}^{11}$ 内偶片的数目。

设 $i = u+\beta$ 和 $j = v+\beta$，从式(3.34)—(3.37)，有 $c''_{uv} =$

$$
\sum_{h''}(-1)^{q''} f(h'') f(j,i) + \sum_{\substack{K_1, K_2 \\ K_1 \neq K_2}} \sum_{H_{K_2K_1}^{11}} (-1)^{q'_{11}+1} f(j,k_2) f(H_{K_2K_1}^{11}) f(k_1, i) + \sum_{k_1}\sum_{h^{11}}(-1)^{q_{11}+1} f(j,k_1) f(h^{11}) f(k_1,i) \tag{3.38}
$$

式中 q'' 表示在 h'' 中的偶片数。注意：我们使用了以下恒等式：

$$(-1)^{g+L''}f(h'')=(-1)^{q''}f(h'') \quad (3.39)$$

其次，注意 $G_c[V_c]$ 中的 1-因子和 $G_c[V_c^{ji}]$ 中的 1-因子连接 H''_{ij} 之间的一一对应关系，$G_c[V_c^{ji}]$ 的有向路径 P''_{ij} 包括一条唯一的边 (j,i)；并注意在这情况下，$q''_{H}=q''$。

另外当 $K_1\neq K_2$ 时，注意 $G_c[V_c]$ 中的 1-因子连接 $H^{11}_{k_2k_1}$ 和 $G_c[V_c^{ji}]$ 中的 1-因子连接 H''_{ij} 之间的一一对应关系，$G_c[V_c^{ji}]$ 的有向路径 P''_{ij} 包括边 (j,k_2)，$H^{11}_{k_2k}$ 的有向路径 $P^{11}_{k_2k_1}$ 和边 (k_1,i)；而偶片数之间的关系仍然是 $q''_{H}=q'_{11}$。

最后，当 $k_1=k_2$ 时，注意 $G_c[V-\{K\}]$ 的 1-因子和 $G_c[V_c^{ji}]$ 的 1-因子连接 H''_{ij} 之间的一一对应关系，$G_c[V_c^{ji}]$ 的有向路径 P''_{ij} 包括两条边 (j,k_1) 和 (k_1,i)，而在该情况下，$q''_{H}=q_{11}+1$。

现在由于每个 $G_c[V_c^{ji}]$ 的 1-因子连接 H''_{ij} 是以上三种类型之一，从而有

$$c''_{uv}=\sum_{H''_{ij}}(-1)^{q''_{H}}f(H''_{ij}) \quad (3.40\,a)$$

$$=(-1)^{a}\sum_{H}(-1)^{L_{H}}f(H''_{ij}) \quad (3.40\,b)$$

第二行是直接根据推论 3.1 得出的。

目前，显然简化的 COATES 图 G_{cr} 实际上是式 (3.34) 中所定义的矩阵 $(1/K_c)[c''_{uv}]$ 的伴随 COATES 图。因此，根据式 (3.32 b) 和 (3.34) 有

$$\det G_c=\det A=K_c\det\{(1/K_c)[c''_{uv}]\}=K_c\det G_{cr}$$

定理证毕。

在 V_c 仅含有单个节点的特殊情况下，以上所概括的步骤能够被简化，并且由以下给出。

推论 3.4：如果 w_{ij} 是与 G_c 的边 (i,j) 有关的权并有 $w_{kk}\neq0$，则

$$\det G_c=w_{kk}\det G_{cr} \quad (3.41)$$

式中 G_{cr} 是通过下面的步骤从 G_c 中得出的：

(i) 从 G_c 中移去节点 k。

(ii) 在 G_{cr} 中与边(i, j)有关的权 c_{ij} 由下式给出

$$c_{ij} = w_{ij} - w_{ik}w_{kj}/w_{kk} \tag{3.42}$$

定理 3.4 的用途其实在于下面(同样参见习题 3.55)。

定理 3.5：如果 G_{cr} 是 G_c 的简化 COATES 图，并有 $K_c \neq 0$ 和 $i \neq j$，则对于不在 V_c 中的所有 i 和 j

$$\sum_{H_{ij}} (-1)^{L_{ij}} f(H_{ij}) = K_c \sum_{H'_{ij}} (-1)^{L'_{ij}+\beta} f(H'_{ij}) \tag{3.43}$$

或

$$\sum_{H_{ij}} (-1)^{q_{ij}} f(H_{ij}) = K_c \sum_{H'_{ij}} (-1)^{q'_{ij}} f(H'_{ij}) \tag{3.44}$$

式中 H_{ij} 和 H'_{ij} 分别是在 G_c 和 G_{cr} 中从 i 到 j 的 1 因子连接，L_{ij} 和 L'_{ij} 分别是在 H_{ij} 和 H'_{ij} 中的有向回路数，q_{ij} 和 q'_{ij} 分别是 H_{ij} 和 H'_{ij} 中的偶片数，而 β 和 K_c 是由式(3.29)所定义的。

证明：设 G_c^* 是从 G_c 中通过删去以节点 j 作为起始点的所有边以及以节点 i 作为终点的所有边，然后从节点 j 到 i 附加一条权为 1 的边而得到的 COATES 图。同样，设 G_{cr}^* 是从 G_c^* 中采用前面所提出的步骤，通过移去 $G_c^*[V_c]$ 而得到 G_c^* 的简化 COATES 图。则

$$\det G_c^* = K_c \det G_{cr}^* \tag{3.45}$$

由于与 G_c^* 和 G_{cr}^* 有关的矩阵行列式分别等于与流图 G_c 和 G_{cr} 有关的矩阵元素(i, j)的余子式。根据定理 3.2，$\det G_c^*$ 和 $\det G_{cr}^*$ 分别是能够由 G_c 和 G_{cr} 的子图求得，经过简单的代换，定理随之得出。

现在让我们应用以上结果来求解(3.16)的系统方程式。设 $G_c = G_c(A_a)$，假定源节点 x_0 不在 V_c 中，那么有

推论 3.5：对于所有与 V_c 中节点无关的变量，系统方程式(3.16)的解可以在 G_c 中也可以在 G_{cr} 中求得。

推论 3.6：对于所有不在 V_c 中的节点，从源节点 x_0 到任何其

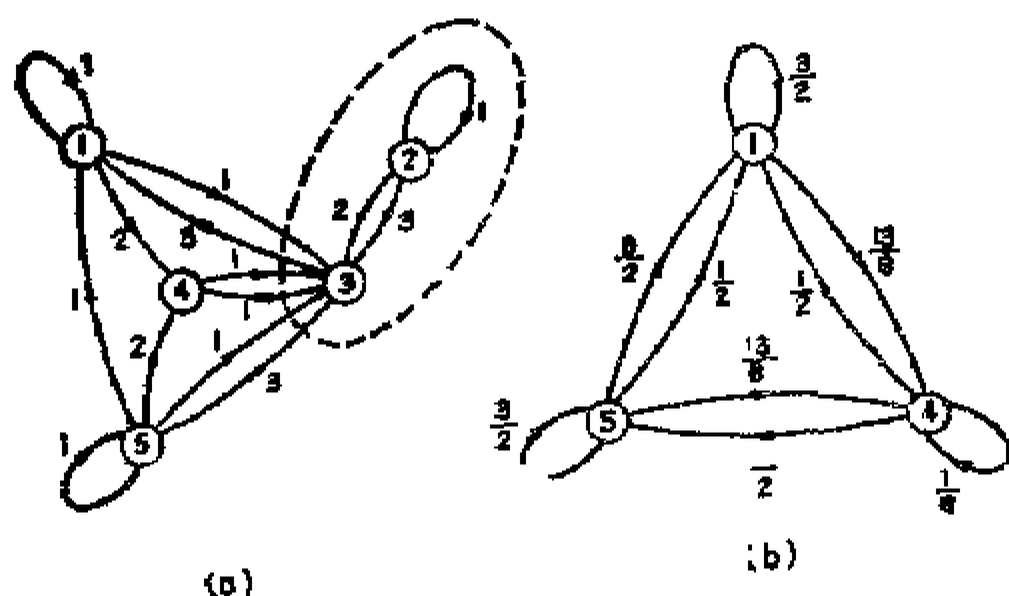


图 3.8 说明COATES图简化步骤的一个例子

它节点的流图传输系数在 G_c 和 G_{cr} 中都保持相同。

我们用下面的例子来说明简化步骤。

例 3.3. 考虑如图 3.8(a)所示的 COATES 图。图的虚线部分是被移去的局部子图 $G_c[2,3]$。图 3.8(b)是 G_c的简化 COATES图 G_{cr}。为了说明应用，我们来计算 G_{cr} 的与两类典型边(5,1)和(4,4)有关的权。局部子图 $G_c[1,2,3,5]$以及 $G_c[1,2,3,5]$ 中从节点 5 到 1 的所有 1 因子连接 $H_{51}^{\prime\prime}$如图 3.9(a)所示。因此，w_{ij} 是 G_c中边(i，j)的权，与具有 w_{ij} 的 G_{cr} 的边(5.1)有关的权 c_{51}由下式给出

$$c_{51} = (-1)^4(1/K_c)[(-1)^1 w_{53}w_{31}w_{22} \quad (-1)^1 w_{51}w_{23}w_{32}]$$

$$= \frac{1}{6}(1\cdot3\cdot1 + 1\cdot3\cdot2)$$

$$= \frac{3}{2}$$

式中 K_c -6。类似局部子图 $G_c(2,3,4)$以及在 $G_c[2, 3, 4]$ 中所有的 1 因子如图 3.9 (b)所示，那么在 G_{cr} 中与自环(4.4)有关的权 C_{44}如下得出：

$$c_{44} \quad (\quad 1)^3(1/K_c)[(-1)^2 w_{34}w_{43}w_{22}]$$

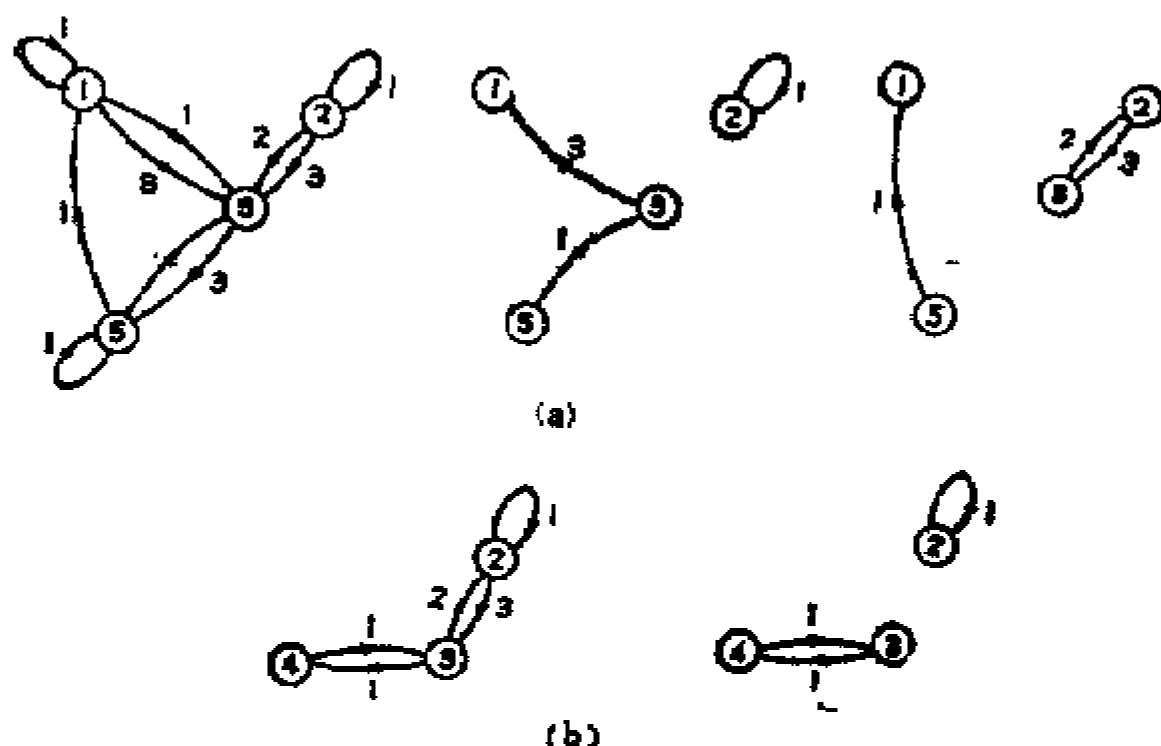


图 3.9 计算传输量 C_i 和 C_{44}的局部子图及其 1-因子连接

$$\frac{1}{6}(1\cdot1\cdot1) \quad \frac{1}{6}$$

G_{cr} 的图行列式可由定理 3.1 所给的公式计算，其值等于$-\frac{5}{6}$。 G_c 的图行列式在式(3.10)中已计算出等于 5。因此我们有

$$\det G_c \quad (\quad 6)\det G_{cr} \tag{3.46}$$

另外，G_{cr} 的传输量 c_{ij} 也能如在 $G_c^{ij}[V_c^{ij}]$中从节点 i 到 j 的流图传输系数那样来计算。例如，c_{51} 和 c_{44} 分别是在 COATES 图 G_c'' [1,2, 3, 5]和 G_c [2, 3, 4] 中，从节点 5 到 1 和从节点 4′到 4″的流图传输系数、如图 3.10 所示。为了说明问题，我们计算这两个流图传输系数如下：

根据式(3.26)，c_{51} 的分子不过是在图 3.10 (a)中从节点 5 到1 的 1 因子连接有关的所有权乘积的代数和，由下式给出：

$$(-1)^1 w_{53}w_{31}w_{22} + (\; -1)^1 w_{51}w_{23}w_{32} \qquad 9$$

c_{51} 的分母是从图 3.10 (a)中移去源节点 5 所得的 COATES 图的所有 1-因子权乘积的代数和，由下式给出

$$(-1)^2 w_{11} w_{33} w_{32} = -6$$

因此，$c_{51} = -9/(-6) = \frac{3}{2}$。类似地，$c_{44}$的分子和分母能够从图3.10(b)中得出，分别给出如下。

$$(-1)^2 w_{4'4'} w_{3''3''} w_{22} = -1$$

和 $$(-1)^2 w_{4''4''} w_{23} w_{32} = -6$$

因此，$c_{44} = -1/(-6) = \frac{1}{6}$。注意：这里 w_{ij} 表示在图3.10中与边(i, j)有关的权。

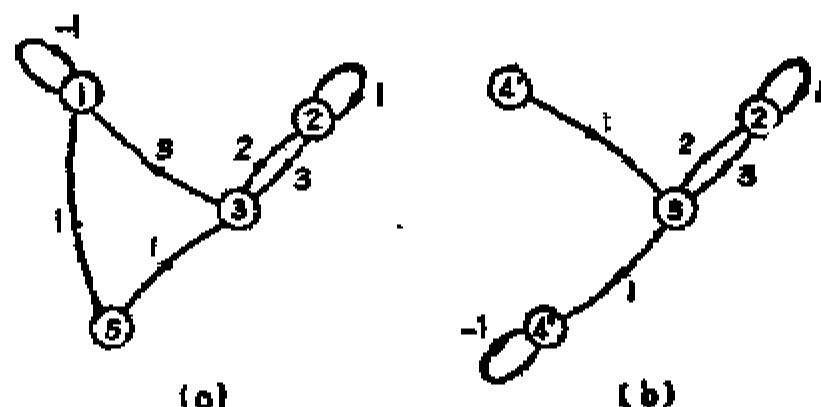


图 3.10 利用流图传输系数求传输量 c_{51} 和 c_{44} 的流图

从以上讨论中，我们断定在COATES图中用来求流图传输系数的公式也能够用来求与简化COATES图有关的传输量。唯一的差别是现在是应用于原COATES图的某些变型的局部子图。

(B) 分解为子图

在许多情况下，COATES图 G_c 可以分解为不连通子图，使 G_c 的图行列式等于子图的图行列式乘积，此处，由定义，$f(\Phi)=0$。

定义 3.9：可分解的 COATES 图。

如果COATES图 G_c 的伴随矩阵 A 能被分割为如下形式，则 G_c 认为是可分解的。

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & 0 \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix} 或 \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ 0 & A_{22} \end{bmatrix} \tag{3.47}$$

式中 A_{11} 和 A_{22} 是方子阵。如果有必要，可交换 A 的行和列，这些行和列不要求同时交换。

定义 3.7：差和逆差。

由节点集的子集 V_c 所表示的有向图 G 的差（逆差）是 $\alpha-w(V_c)$ $(\alpha-w^*(V_c))$，此处 α 是 V_c 中的元素数，$w(V_c)$ $(w^*(V_c))$ 表示 G 中起始（终止）节点在 V_c 中的边的终止（起始）节点数。

作为说明，考虑如图 3.11 所示的 COATES 图 G_c。设 $V_c=\{3, 4\}$，起始节点在 Vc 中的边的终止节点集是 $\{2, 3\}$，而终止节点在 V_c 中的边的起始节点集是 G_c 的节点集。因此，$\alpha=2$，$w(V_c)=2$ 及 $w^*(V_c)=5$。由节点 3 和 4 所确定的 G_c 的差和逆差分别是 0 和 -3。

定理 3.6： 当且仅当 COATES 图存在一个节点集的非空真子集，且其差或逆差是非负时，它是可分解的。而且如果差及逆差中只有一个是正时，则 G_c 的图行列式等于零。

证明：假定存在一个非空真子集 V_c，且有

$$\alpha-w(V_c)\geqslant 0$$

式中 α 和 $w(V_c)$ 的定义和定义 3.7 中相同，就 G_c 的伴随矩阵 A 的行和列而论，A 是 n 阶的，$w(V_c)$ 是在 A 中至少具有一个非零元素且与在 V_c 中相应元素的一个列相同的行数。如果 i 是在 $(V-R(V_c))$ 中，而 j 在 V_c 中，则 A 的元素 a_{ij} 为零，此处 $R(V_c)$ 表示起始节点在 V_c 中的边的终止节点集，而 V 是 G_c 的节点集。但是，由假设

$$(n-w(V_c))+\alpha\geqslant n$$

因此，由于 n，$w(V_c)$ 和 α 分别是在 V，$R(V_c)$ 和 V_c 中的元素数，在 A 中总存在一个阶为 $(n-w(V_c))\times\alpha$ 的零子矩阵。所以，G_c 是可以分解的。反过来同样是正确的。类似地我们可以证明非负逆差的情况。

如果差是正的，那么 $(n-w(V_c))+\alpha$ 大于 n。这就意味着如果

由拉普拉斯展开式沿与零子矩阵相对应的行或列展开 A 的行列式，则每个子式至少含有一个零行或零列。因此，$\det A=0$。相类似，对于正的逆差，这也是成立的。这样定理证毕。

到目前为止，我们仅仅描绘了可分解的 COATES 图。定理的使用主要取决于 COATES 图能分解为子图的效率。后面，我们将讨论一种分解步骤。

A 的任何两行 i 和 j 的交换对应于将 $G_c(A)$ 边集中终止节点为 j 的移置到 i，而将终止节点为 i 的移置到 j，同时保持所有起始节点和边权不变。同样，也包括没有边终止于节点 i 或 j 的情况。为了简单起见，这种类型的步骤仍称为 $G_c(A)$ 中节点 i 和 j 的入边交换。同样，A 的任何两列 i 和 j 的交换与在 $G_c(A)$ 中节点 i 和 j 的出边交换相对应。因此，如果 V_c 是 G_c 的具有零差非空真子集，则节点 i 和 j（i 在 $V_c-(V_c\cap R(V_c))$ 中，而 j 在 $R(V_c)-(R(V_c)\cap V_c)$ 中）的一系列入边交换，将使 G_c 交换为没有从 V_c 中一个节点指向 $V-V_c$ 中任何节点的边的 COATES 图（自行证明）。从而，所有形式 (u, v) 的边，只要 u 在 $(V-V_c)$ 中，而 v 在 V_c 中，都可以从 $G_c(A)$ 中移去，不会改变其图行列式。这个过程至少分解 G_c 为两个分量 G_{c1} 和 G_{c2}，这样，分量的节点集并就是 V，而且有

$$\det G_c=(-1)^{\beta}(\det G_{c_1})(\det G_{c_2}) \tag{3.48}$$

式中 β 是入边交换数。如果 V_c 具有零逆差，可以得到一个类似步骤（习题 3.54）。

例 3.4：考虑图 3.11 给出的 COATES 图 G_c，由于集合 $V_c=\{3, 4\}$ 是零差，于是根据定理 G_c 能分解为片，在 G_c 中节点 2 和 4 的入边交换结果形成 COATES 图 G_c^*。G_c^* 没有边从 V_c 中任何节点指向 {1、2、5} 中的任何节点，因此，边 (5, 3)，(2, 4) 以及 (1,4) 可以从 G_c^* 中移去，而不会改变其行列式。这个过程分解 G_c 为两个片 G_{c_1} 和 G_{c_2}，如图 3.12 所示，这样有

$$\det G_c=(-1)^1(\det G_{c_1})(\det G_{c_2})$$

有一个与不含于 G_c 任何有向回路中的边有关的附带结果。显

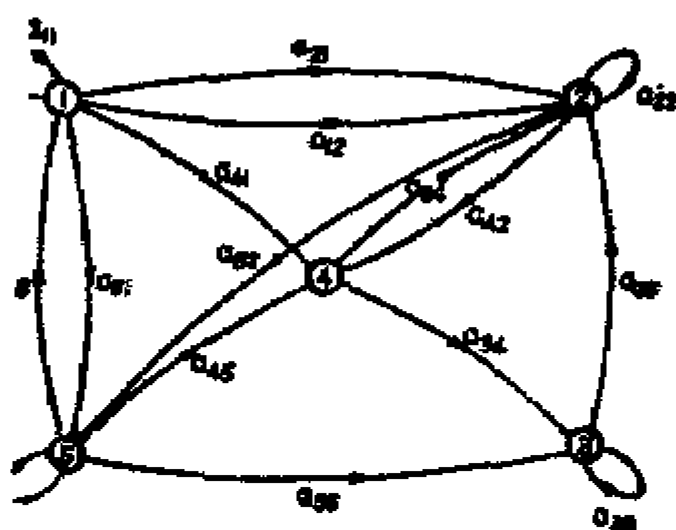


图 3.11 可分解的 COATES 流图

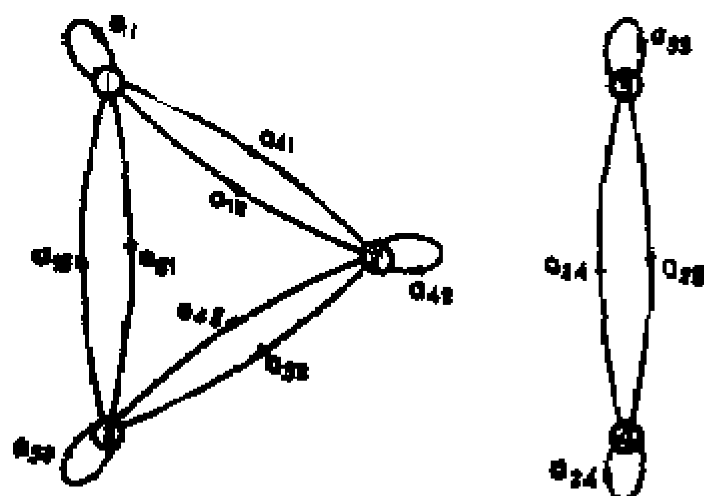


图 3.12 所分解的片

然 G_c 的这些边不能含于 G_c 的任何 1 因子中被移去不会影响其图行列式。另一方面，对于包含于 G_c 的有向回路中的边，以上步骤表明如何使这些边中有些还能被移去而不影响其图行列式。更具体地说，我们表述为下列推论，其证明留作练习(习题 3.47)。

推论 3.7 设 V_s 是 G_c 的节点集 V 的一个非空真子集，如果 V_s 是零差的，则边 (i, j) 的集合（i 在 $(V-V_s)$ 中，而 j 在 $R(V_s)$ 中）能从 G_c 中移去而不影响其图行列式。类似地，如果 V_s 是零逆

差的，则边(i，j)的集合(i在$R^*(V_c)$中，而j在$(V-V_c)$中)能从G_c中移去而不影响其图行列式，此处，$R(V_c)$和$R^*(V_c)$分别是在V_c中具有起始和终止节点的边的终止和起始节点的集合。

(C) 转换

在上述内容中，我们已经使用交换两节点的入边运算来分解COATES图为片。在这一节中我们将表明这种类型的运算怎样用来转换有向路径或回路，并且计算任何两节点之间的流图传输系数。

设G_c是具有单个源节点x_0的COATES图，从x_0到G_c中任何其它节点X_k的图传输系数定义为x_k对x_0之比。假定我们希望计算x_2对x_1之比，为了达到这要求的一种方法只不过是首先计算从源节点x_0到x_2和x_1的图传输系数，然后取比值就可以了。由于这些图传输系数具有同样的分母，所以它完全不必计算。由CHEN [1969 b]提出的另一种方法如下：首先交换节点x_0和x_1的入边，然后在所得的图中计算从x_1到x_2的图传输系数。这是容许的，因为x_1现在在得出图中是源节点。由于x_0在G_c中是源节点，所以交换

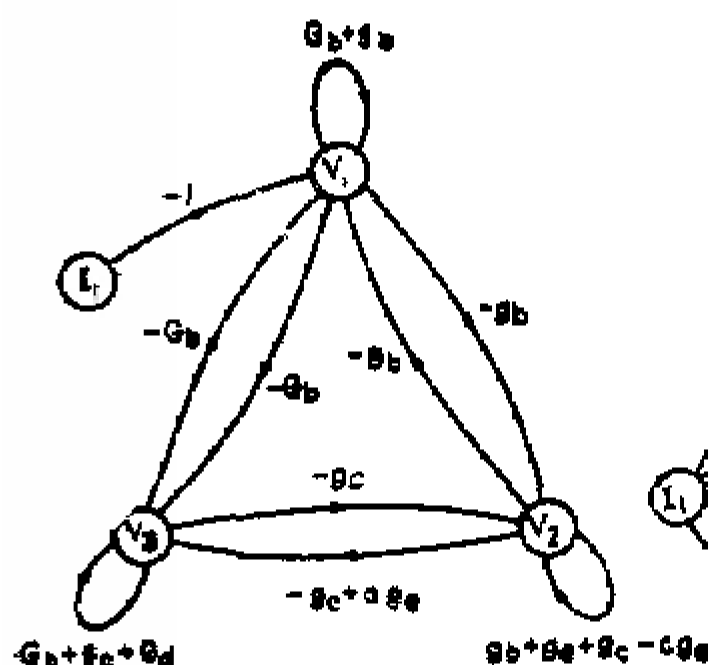


图 3.13 式(3.24)的COATES流图

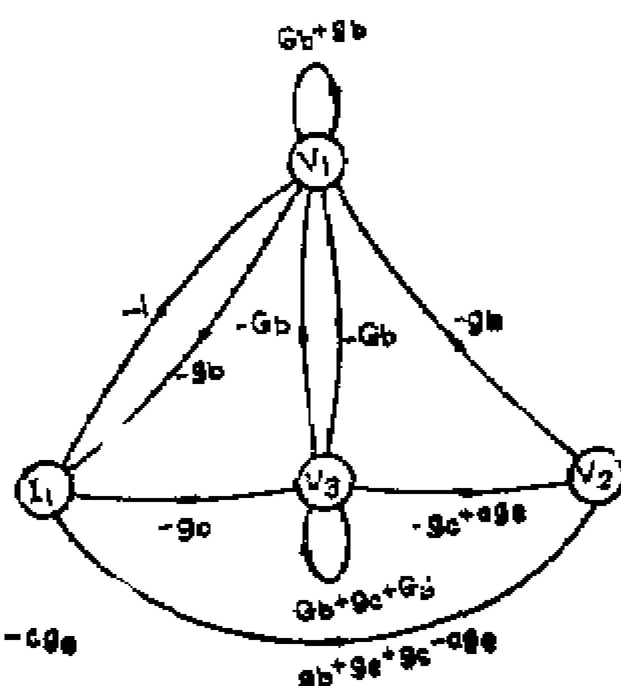


图 3.14 节点V_2变换为源节点

节点 x_0 和 x_1 的入边相当于把原本终止于节点 x_1 的所有边移动到终止于新的节点 x_0，同时保持所有边传输量不变。对于这个问题的理由是在 G_c 中两节点入边的交换对应于与 G_c 有关的方程式重新排列，因此这不会改变系统的解。

作为一个例子，考虑如图 3.6 所示的反馈放大器，假定我们要求 V_3 与 V_2 的电压比。式(3.24)的 COATES 图 $G_c(A_c)$ 如图 3.13 所示。因为我们希望计算 V_3/V_2 的比值，让我们把终止于节点 V_2 的所有边移到终止于节点 I_1，结果形成一个新的 COATES 图如图 3.14 所示。在新的柯特图中从 V_2 到 V_3 的图传输系数由式 (3.26) 得出如下：

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{(g_c-\alpha g_e)g_b+(g_b-g_e+g_c-\alpha g_e)G_b}{(G_b+G_d+g_c)g_b+G_d g_c} \tag{3.49}$$

在分子内的各项对应于在新的 COATES 图中从 V_2 到 V_3 的 1 因子连接，而分母内的项对应于在新的 COATES 图中节点 V_2 被移去之后的 1-因子。

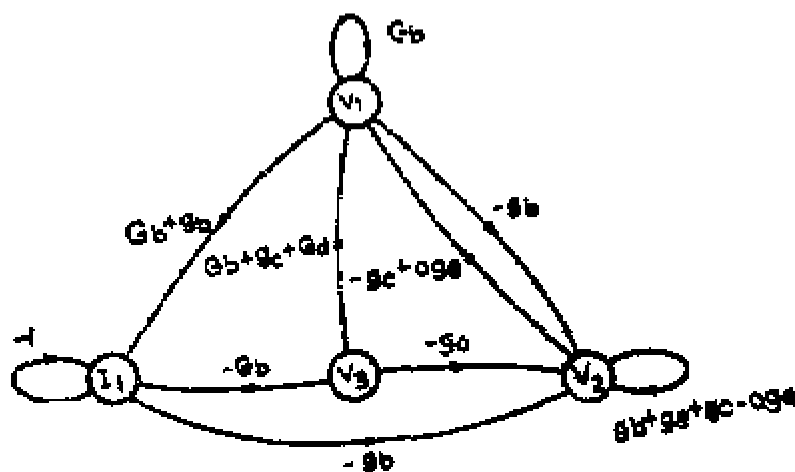


图 3.15 通过变换图 3.13 的 COATES 图中有向路径所得 COATES 图

最后，如果交换两节点入边的运算连续应用于起始于源节点的有向路径或有向回路，则在很多情况下(但并不是所有的情况)，有向路径或回路以转换形式出现。例如，如果在图 3.13 中，运算连续应用于节点 I_1 和 V_1，然后 V_1 和 V_3，则在所得的COATES图中原来的路径被转换如图 3.15 所示。自然，从 V_3 到 I_1 的流图传输

余数是式(3.25)中所给式子的倒数(自行证明)。另一方面，如果将自环(V_1, V_1)从原来的图中移去，那么在所得的 COATES 图中，对应的有向路径会被破坏。

§ 2. 伴随 MASON 图

存在另一种把有向图与给定的矩阵联系起来的方法，称为信号流图。信号流图的概念最初是由 SHANNON (1942)在论及模拟计算机时提出的。信号流图的系统描述和组织方面主要归功于 MASON[1953、1956]，他表明怎样利用信号流图技术以比较简单的方式去解某些困难的电子学问题 因为最初应用于电子学问题以及与电信号和系统的流程图相联系，所以采用术语信号流图。自1956 年以来，在系统地阐述信号流图方面已经取得相当大的进展，并且扩展它们的应用于统计学、力学、热传导学、气体力学、微波系统和多环反馈系统（LORENS [1964] 以及 RIEGLE 和 LIN [1972]），在此，信号流图称为MASON图，以与另一类称为COATES 图的流图相区别。

定义 3.8：MASON 图。

对于一个给定的 n 阶方阵 A，A 的伴随 MASON 图用符号 $G_m(A)$或简单地用 G_m 来表示，这是 A－U_n 的伴随 COATES 图，此处 U_n 是 n 阶的单位矩阵。

因此，为了从给定的 MASON 图得到 COATES 图，我们只需从每个自环的传输量去掉 1，并且对MASON 图没有自环的每个节点加进传输量为－1 的自环。反之，如果 COATES 图给定，为了得到对应的MASON图，只需简单地对每个存在自环的传输量加 1，而对于 COATES 图中没有自环的每个节点加进传输量为 1 的自环。

使用 MASON 图的理由是它比 COATES 图更加自然地表示了

物理系统。信号流图表示了信号在整个物理系统中流动的连续图象，并且容许给出直接计算值和某些定理的启发性证明。像COATES图一样，在许多情况下，物理系统的伴随MASON图可以直接从系统方框图画出，而不必首先建立矩阵形式的方程式(CHEN[1976 b])。

考虑式(3.16)线性方程组，它可以用稍微不同的形式写成如下：

$$(\mathbf{A}_a+\mathbf{U}_{n+1})\mathbf{X}''=\mathbf{X}'' \tag{3.50}$$

式中 $\mathbf{A}_a$ 与在定理3.3中所定义相同，而 $\mathbf{X}''$ 的转置是$[x_1,x_2,\cdots,x_n,x_{n+1}]$($x_{n+1}=1$)。现在能把以上系统方程式

$$(a_{kk}-1)x_k-b_kx_{n+1}+\sum_{\substack{j=1\\j\neq k}}^{n}a_{kj}x_j=x_k \quad k=1,2\cdots n \tag{3.51}$$

理解为$G_m(\mathbf{A}_a)$中的信号流动。由于$G_m(\mathbf{A}_a)$的节点与$\mathbf{A}_a$的列或行有关，可以象COATES图那样，把变量x_1，x_2，$\cdots$，x_{n+1}分别给予$G_m(\mathbf{A}_a)$的节点1，2，$\cdots$，$n+1$，有关的节点权可以认为节点信号x_k，那么，每个方程或赋予节点的信号为由各入边入信号的代数和，每个入信号是边传输量和该边起点信号的乘积。由于在给定节点上的信号是入信号之和，出边的存在并不直接影响该点的信号。特别是在$G_m(\mathbf{A}_a)$中信号的流动被解释为如图3.16所示那样的情况，这个解释是直接从方程式(3.51)得出的。源节点信号$x_0=x_{n+1}$看作为在代数方程中的独立变量，并且所有其它变量都能够用独立变量来表示。因此，对于一个大的物理系统来说，表示方法是非常方便的和直观的。正因为这样，MASON图及其公式比COATES图更为流行。

MASON图$G_m(\mathbf{A})$的图行列式用$\det G_m(\mathbf{A})$来表示，意思是矩阵$\mathbf{A}$的行列式。换言之，$G_m(\mathbf{A})$的图行列式与$G_c(\mathbf{A})$的相同，但是求值公式是完全不同的。

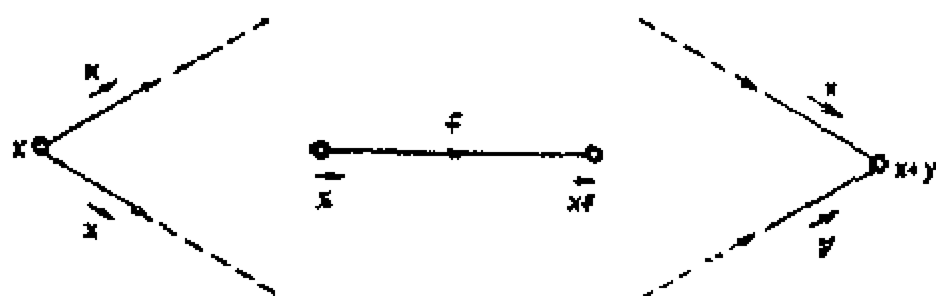


图 3.16 MASON 图的物理解释

2.1 求行列式值的拓扑法

求 MASON 图的图行列式值的规则是由 SHANNON[1942]首先提出的，并利用数学归纳法证明的，甚至于在 MASON 于 1953 年发表了第一流研究成果之后，他的研究成果基本上仍然无人知道。三年以后，MASON[1956]通过研究行列式值以及当变量被加到图上时它如何变化，再次揭示这些规律，并予以证明。接着第三种证明由 *LORENS*[*1964*]得出，他证明了这些规则和求线性代数方程组的 CRAMER 法则之间的关系。但是，在这些推导中所采用的论据是启发式的，而且有时非常迂迴曲折。严格的证明是由 ASH [1959]和 NATHAN[1962]根据某些与有向图有关的行列式的简单性质给出的。在下面我们将根据 COATES 图提出另一种 $\det G_n$ 的简单拓扑推导法。

至今我们所考虑的 COATES 图是没有并联边的有向图。很容易证明(习题 3.7)如果 G_c 的某些边(i,j)由并联边$(i,j)x$ $(x=1,2,\cdots,k_{ij})$来代替(包括 $i=j$ 的情况)，这样

$$f(i,j)=\sum_{x=1}^{k}f((i,j)x) \tag{3.52}$$

那么所得的 COATES 图和 G_c 具有同样的图行列式和图传输系数。在证明许多后述定理中，这一推广被发现是非常有用的，而且每当合适场合，我们就采用这种方法。

例如在前面所述的与 MASON 图G_m 对应的 COATES 图 G_c 很容易从 MASON 图的每个存在自环的传输量中减 1 和对 G_m 没有自环的每个节点加进传输量为 −1 的自环而得到。可以等同地说成：简单地对 G_m 的每个节点加一个传输量为 −1 的自环就得到了与之对应的 G_c。因此、G_c 在它的每个节点至多含有两个自环和至少含有一个自环。

有了这些准备之后，现在我们着手证明这一节的主要定理。

定理 3.7：设 G_m(A)是 n 阶方阵 A 的伴随 MASON 图，那么

$$\det A = (-1)^n\left[1 + \sum_{\substack{u,v\\ v>0}}(-1)^v f(C_{uv})\right] \tag{3.53}$$

式中 C_{uv} 是 G_m 中 v 个节点不相接有向回路的第 u 个子图。

证明：设 G_c 是从 G_m 中对 G_m 的每个节点加一个传输量为 −1 的自环而得到的对应 COATES 图。如果 h_{ij} 是 G_c 中第 i 个 1 因子，(G_c 含有 j 个附加的传输量为 −1 的自环)，而且如果 Q_{ij} 是在 j 个附加自环移去的情况下从 h_{ij} 所得的子图，那么，对于 j = 0,1,⋯，n−1，有

$$f(h_{ij}) = (-1)^j f(Q_{ij}) \tag{3.54 a}$$

以及对于 j = n，有

$$f(h_{ij}) = (-1)^j \tag{3.54 b}$$

由定理 3.1 和习题 3.1，h_{ij} 与适当的符号一起的总体恰好是 A 的行列式，

$$\det A = (-1)^n \sum_{i,j}(-1)^{L_Q} f(h_{ij})$$

$$= (-1)^n\left[1 + \sum_{i}\sum_{j=0}^{n-1}(-1)^{L_Q} f(Q_{ij})\right] \tag{3.55}$$

式中 L_Q是 Q_{ij} 中的有向回路数。由于在 G_c 中对 Q_{ij} 的每个选择，在 G_m 中对应于一个具有 v = L_Q 的唯一的子图 C_{uv}，反之亦然，从而A

的行列式值能够由 G_m 中的子图 C_{1v} 而不是由 G_c 中的 Q_{ij} 求得。只要重新安排式(3.55)的项，我们可以得到另一个更有名的展开式

$$\det A=(-1)^n\left[1+\sum_{\substack{uv\\ i>0}}(-1)^i f_i C_{iv}\right] \tag{3.56}$$

定理证毕。

象 COATES 图那样，要求预先知道式(3.53)中的项数，这样可以避免在展开式中丢失一项的可能性（习题 3.53）。

推论 3.8：在式(3.53)中的项数等于矩阵 $C(G_m)+U_n$ 的恒式值，此处，$C(G_m)$的定义与推论 3.2 中的定义相同。

作为一个例子，考虑式(3.2)的矩阵，其伴随 MASON图$G_m(A)$在图3.17中给出。如果用公式(3.53)来求 A 的行列式值，那么在式(3.53)中所要求的项数仅仅是矩阵 $C(G_m)+U_5$ 的恒式值，由下式给出

$$\mathrm{per}[C(G_m)+U_5]=\mathrm{per}\begin{bmatrix}2&0&1&1&0\\0&2&1&0&0\\1&1&2&1&1\\0&0&1&2&0\\1&0&1&1&2\end{bmatrix}=78 \tag{3.57}$$

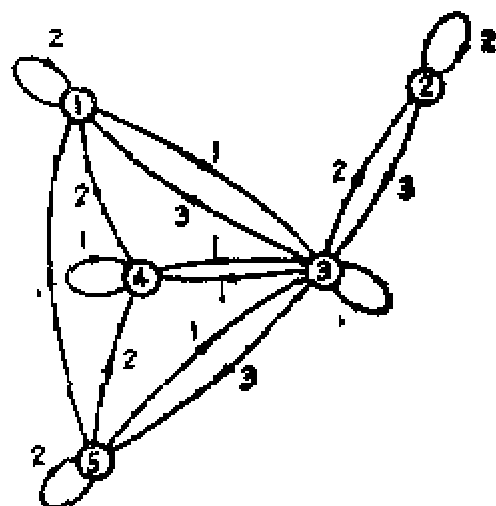


图 3.17　式 3.2 矩阵的伴随MASON 图

此数大约是相对应 COATES 图的项数的 20 倍，这就说明了非常重要的一点，在行列式的计算中，MASON 图具有大量无用的冗余项，而利用 COATES 图的方法，这些是可以避免的。但是，正如我们将看到的那样，只要对自环传输量作适当的变换，就有可能大大减少冗余项的数目。因此，在 COATES 图和 MASON 图之间的优缺点不能简单地从这个原因来确定。在工程分析中，特别当我们考虑

某个物理反馈系统时，对于宁愿采用 MASON 图而不用 COATES 图，是有一些重要的根据的。在这种情况下，正如前面所提到的那样，MASON 图通常能直观地反映反馈过程(例如，参见 TRUXAL [1955])。在实际应用中，反馈环的数目通常是少的，而且，矩阵的元素以字母而不是以数值的形式给出。因此 MASON 图公式的优点是明显的。上面给出的数值例子目的仅是作为例证。矩阵元素通常是以复变量 s 的有理函数给出的。

2.2 求余子式值的拓扑法

利用伴随 MASON 图中的某些子图来求矩阵元素的余子式的公式，可以类似于求行列式余子式的方式导出。

定理 3.8：设 $G_m(A)$ 是 n 阶 $(n\geq 2)$ 方阵的伴随 MASON 图，那么，对于 $i\neq j$，有

$$\Delta_{ii}=(-1)^{n-1}\left[1+\sum_{\substack{u,v\\ v>0}}(-1)^v f(C^i_{uv})\right] \qquad (3.58\text{a})$$

$$\Delta_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_k f(P^k_{ij})\left[1+\sum_{\substack{s,t\\ t>0}}(-1)^t f(D^k_{st})\right] \qquad (3.58\text{b})$$

式中 Δ_{ii} 是 A 中元素 (i,j) 的余子式，C^i_{uv} 是 $G_m(A_{ii})$ 中 v 个节点不相接有向回路的第 u 个子图；P^k_{ij} 是 $G_m(A)$ 中从节点 i 到节点 j 的第 k 个有向路径；D^k_{st} 是 t 个节点不相接有向回路的第 s 个子图，在 $G_m(A)$ 中，此有向回路也是与 P^k_{ij} 节点不相接的，而 A_{ij} 是从 A 中由划去第 i 行和第 j 列所得的子矩阵。

证明：定理的第一部分直接根据定理 3.7 得出，定理的第二部分可以类似于证明定理 3.7 的方式进行证明。

设 $G_c(A)$ 是对 $G_m(A)$ 的每个节点加入传输量为 −1 的自环而得到的 $G_m(A)$ 的对应 COATES 图。如果 H^x_{ij} 是在 $G_c(A)$ 中从 i 到 j 的第 s 个 1-因子连接，$G_c(A)$ 含有传输量为 −1 的 x 条附加自环，且 W^x_{ij} 是从 H^x_{ij} 中移去 x 条附加自环而得的子图，那么对于

$x=0,1,\cdots n-2$,有

$$f(H_{ij}^{x})=(-1)^{x}f(W_{ij}^{x}) \tag{3.59}$$

根据定理3.2和习题3.1，H_{ij}^{x}与相应的符号一起的总和恰好是余因子式Δ_{ij}

$$\Delta_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_{t,x}(-1)^{L_{w}+x}(-1)^{x}f(W_{ij}^{tx}) \tag{3.60}$$

式中L_w是在W_{ij}^{tx}中的有向回路数。如果P_{ij}^{t}是在W_{ij}^{tx}中从i到j的有向路径，而且，如果D_{ij}^{tx}是对应于W_{ij}^{tx}的节点不相接有向回路集的子图，那么式(3.60)能够重新写为

$$\Delta_{ij}=(-1)^{n-1}\sum_{t}f(P_{ij}^{t})\left[1+\sum_{\substack{x\\ L_w\neq 0}}(-1)^{L_w}f(D_{ij}^{tx})\right] \tag{3.61}$$

由于对在$G_c(A)$中P_{ij}^{t}和D_{ij}^{tx}的每个选择，$G_m(A)$中存在P_{ij}^{t}唯一对应的有向路径P_{ij}^{t}以及在$G_m(A)$中存在具有$\ell=L_w$的D_{ij}^{tx}唯一对应的节点不相接有向回路集$D_{ij}^{t\ell}$，反之亦然，从而，余因子式Δ_{ij}能够根据$G_m(A)$的子图P_{ij}^{t}和$D_{ij}^{t\ell}$而不是从$G_c(A)$的子图P_{ij}^{t}和D_{ij}^{tx}来求得，只要在式(3.61)中代入适当的项，我们就能得到所要求的展开式(3.58 b)。定理证毕。

推论 3.9：在展开式(3.58)中的项数等于从矩阵$C(G_m)+U_n$中划去第j行和第i列所得矩阵的恒式值。

因此，在图3.17中，如果用公式(3.58)求Δ_{14}，那么在展开式中所要求的项数仅仅是以下矩阵的恒式值

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \tag{3.62}$$

其值是18，根据定理3.8，有

$$
\begin{aligned}
\Delta_{14} = \; & W_{14}(1 - W_{22} - W_{23}W_{32} - W_{35}W_{53} - W_{55} - W_{33} \\
& + W_{32}W_{23}W_{55} + W_{35}W_{53}W_{22} + W_{22}W_{55} + W_{33}W_{55} \\
& + W_{22}W_{33} - W_{22}W_{33}W_{55}) + W_{13}W_{34}(1 - W_{22} - W_{55} \\
& + W_{22}W_{55}) + W_{13}W_{35}W_{54}(1 - W_{22}) \\
= \; & -13
\end{aligned} \tag{3.63}
$$

式中 W_{ij} 表示在 $G_m(A)$ 中边 (i,j) 的传输量。

2.3　求线性代数方程组解的拓扑法

应用 MASON 图技术来求解线性方程组是简单明了的，推导类似于§1.3 的内容，我们仅陈述结果，而将证明留作为练习（习题 3.46）。

定理 3.9：如果系数矩阵 A 是非奇异的，那么式(3.16) 的解由下式给出

$$
x_j = \frac{\sum_k f(P^k_{(n+1)j}) \left[1 + \sum_{s,t} (-1)^t f(D^t_{s}) \right]}{1 + \sum_{w,v} (-1)^v f(C_{wv})} \tag{3.64}
$$

式中 $P^k_{(n+1)j}$ 是在 $G_m(A_j)$ 中从节点 n+1 到 j 的第 k 条有向路径，D^t_{s} 是 $t(t>0)$ 节点不相接有向回路的第 s 个子图，有向回路也是在 $G_m(A_j)$ 中与 $P^k_{(n+1)j}$ 节点不相接的。A_a 是定理 3.3 中所定义的增广矩阵，而 C_{wv} 是 $G_m(A_a)$ 中 v 节点不相接有向回路的第 w 个子图。

如式(3.51)的物理解释所述，如果 $G_m(A_a)$ 的每个节点 k 与节点信号 X_k 相关联，那么式(3.51) 的每个方程式表示节点信号为由各入边信号的代数和，每个入信号是边传输量和边的起点信号的乘积。因此，式(3.64)的解表示在最终节点 n+1 上信号 x_{n+1} 取为 1 时节点 j 上的信号。另一方面，象 COATES 图那样，如果 x_{n+1} 是任意选定的信号，那么式(3.64)的右边表示在 $G_m(A_a)$ 中 x_j 对 x_{n+1} 之比，比值称为在 $G_m(A_a)$ 中从节点 x_{n+1} 到 x_j 的图传输系数，它正式定义如下。

定义 3.9：G_m 的图传输系数。

设G_m是至少含有一个源节点x_0(具有零入度的节点)的MASON图，在G_m中，从节点x_0到节点$x_j(j=1,2,\cdots,n)$的图传输系数定义为如下比值：

$$\frac{x_j}{x_0}=\frac{\sum_k f(P_{0j}^k)\left[1+\sum_{s,t}(-1)^t f(D_{st}^k)\right]}{1+\sum_{u,v}(-1)^v f(C_{uv})} \tag{3.65}$$

式中P_{0j}^k是在G_m中从节点X_0到x_j的第k条有向路径；D_{st}^k是$t(t>0)$节点不相接有向回路的第s个子图，有向回路也是在G_m中与P_{0j}^k节点不相接的，而C_{uv}是G_m中$v(v>0)$节点不相接有向回路的第u个子图。

在定理3.9中，如果$G_m(A)$给定，则$G_m(A_u)$很容易从$G_m(A)$中得到，仅需对Gm(A)附加一个源节点$x_0=x_{n+1}$，如果$b_k\neq0$，则有一条传输量为$-b_k$的从源节点指向节点k的边，严格地说，我们应当在节点x_{n+1}上加一条传输量为1的自环，这样，按照定义3.8，$G_m(A_u)=G_c(A_u+U_{n+1})$，实际上，是很少这样做的，因为在节点$x_{n+1}$上附加一条传输量为1的自环等效于对式（3.27）增加一个方程式$x_{n+1}=x_{n+1}$，因此它可以从图上删去，而不影响图传输系数。同样，在节点具有零入度的意义上，删去会使节点x_{n+1}确实成为一个源节点，在这章整个余下部分，对所有的$G_m(A_u)$，我们都假定这一点。

我们强调指出式(3.65)只适用于计算从源节点到非源节点的图传输系数。但是它不同于COATES图，在COATES图中，计算图传输系数时，每次只允许有一个源节点，而MASON图在求图传输系数中可以具有n个源节点。

最后，我们要说明，在式(3.64)中，$P_{(n+1)j}^k$也称为正向路径，$f(P_{(n+1)j}^k)$称为路径传输系数。有向回路也称为反馈环路，而它的

权乘积为环路传输系数。由于项

$$1+\sum_{k,l}(-1)^{l}f(D_{kl}^{k}) \tag{3.66}$$

实际上是从 $G_m(A_a)$ 中通过移去所有 $P_{(n+1)}^{k}$ 中的节点和所有与这条路径关联的边所得的 MASON 图的图行列式，通常称它为在 $G_m(A_a)$ 中 $P_{(n+1)}^{k}$ 的余因子式。

例 3.5：考虑图 3.6 给出的晶体管反馈放大器，伴随 MASON 图只需从对应的 COATES 图(图 3.13)中，对每个自环加 1 而得到，如图 3.18 所示。简单的计算表明，式(3.64)的分母中有 16 项，为了减少这些项的数目，以稍微不同的形式重写方程式(3.24)。

$$\begin{bmatrix} -1 & g_b/a_{11} & G_b/a_{11} & 1/a_{11} \\ g_b/a_{22} & -1 & g_c/a_{22} & 0 \\ G_b/a_{33} & (g_c-\alpha g_e)/a_{33} & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ I_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.67}$$

式中 a_{11}、a_{22} 和 a_{33} 的定义与式(3.25)的定义相同，式(3.67)的伴随 MASON 图 G_m 如图 3.19 所示。根据推论 3.8，很容易表明，式

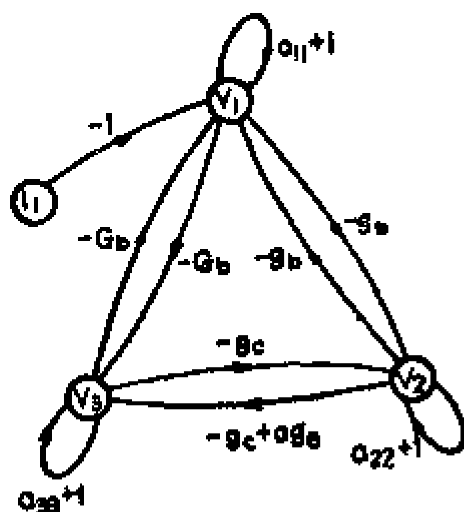


图 3.18 式(3.24)的MASON 流图

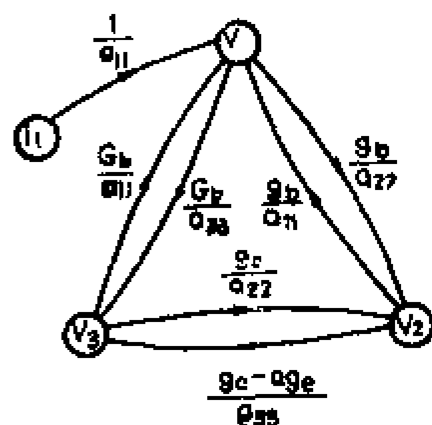


图 3.19 式(3.67)的 MASON 流图

(3.64)的分母中有 6 项，净减少了 10 项。假定要求计算放大器的电流增益函数，它定义为 I_3/I_1，或者 G_dV_3/I_1，根据定理 3.9，从 I_1

到 V_3 的图传输系数由下式给出：

$$\frac{V_3}{I_1}=\frac{(1/a_{11})(G_b/a_{33})+(1/a_{11})(g_b/a_{22})(g_c/a_{33}-ag_c/a_{33})}{1-\frac{G_b}{a_{11}}\frac{G_b}{a_{33}}-\frac{g_b}{a_{11}}\frac{g_b}{a_{22}}-\frac{g_c}{a_{22}}\left(\frac{g_c}{a_{33}}-\frac{ag_c}{a_{33}}\right)-\frac{G_b}{a_{11}}\frac{g_b}{a_{22}}\left(\frac{g_c}{a_{33}}-\frac{ag_c}{a_{33}}\right)-\frac{g_c}{a_{22}}\frac{g_b}{a_{11}}\frac{G_b}{a_{33}}}$$

$$=\frac{a_{22}G_b+g_b(g_c-ag_c)}{a_{11}a_{22}a_{33}-a_{22}G_b^2-a_{33}g_b^2-a_{11}g_c(g_c-ag_c)-G_bg_b(g_c-ag_c)-g_cg_bG_b} \tag{3.68}$$

这与式(3.25)等效。另外，我们注意到，当 a_{11}，a_{22} 和 a_{33} 的对应量代入式(3.68)，在最后的展开式中，许多项将相互抵消。因此，在这个意义上，对电网络问题来说，这公式至少不是非常有效率的，但是对MASON 图简单地改进一下，就能够做到更有效，这个问题将在§3 中进一步讨论。

另外值得一提，通过以式(3.67)形式重新改写原来的方程式系统给出的伴随 MASON 图，其系数矩阵的所有第 ii 元素都是 1，由于其中没有自环出现，HOSKINS［1961］称它为原系统方程式的正则 MASON 图，显然每个 MASON 图都能使之成为正则形式。

2.4 等效和转换

象 COATES 图那样，在应用前面导出的一般公式之前，对 MASON 图进行某些变换和简化，这通常是有利的。这节的推导完全类似于§1.4的内容。

（A）消去节点

对于 MASON 图的节点消去方法完全类似于对 COATES 图的方法，而且可以利用类似于证明定理 3.7 所采用的步骤，从定理 3.4 中直接导出。下面的步骤是 MASON 方法的推广(CHEN［1964 b］)。

设 V_m 是 MASON 图 G_m 的节点集 V 的非空真子集，并设 $G_{m'}$ 是由下面步骤从 G_m 中所得的简单 MASON 图：

(i) 从 G_m 中移去局部子图 $G_m[V_m]$，也就是移去与在 V_m 中任何节点关联的所有节点和边。

(ii) 对所有在 $V-V_m$ 中的 i 和 j，G_m 中与边(i, j)相关的权或传输量由下式给出：

$$m_{ij}=(-1)^{\alpha+1}(\delta_{ij}-K_m)\sum_{K}f(P_{ij}^{\prime K})\left[1+\sum_{s,t}(-1)^{t}f(D_{st}^{\prime K})\right],$$

(3.69)

式中 $P_{ij}^{\prime K}$ 是局部子图 $G_m(V_m^{ij})$ 中从节点 i 到节点 j 的第K个有向路径，其中 V_m^{ij} 是集合 V_m 和 {i, j} 的并集；$D_{st}^{\prime K}$ 是 t (t>0) 节点不相接有向回路的第S个子图，有向回路也是在 $G_m[V_m^{ij}]$ 中与 $P_{ij}^{\prime K}$ 节点不相接的；α 是 V_m^{ij} 中的节点数；δ_{ij} 是克罗内克符号(KRONECKER'S delta)，而 K_m 是局部子图 $G_m(V_m)$ 的行列式，这能由下面公式求得

$$K_m=\det G_m[V_m]=(-1)^{\beta}\left[1+\sum_{u,v}(-1)^{v}f(C_{uv})\right],\quad(3.70)$$

式中 $C_{uv}^{\prime\prime}$ 是 $G_m(V_m)$ 中 v(v>0) 节点不相接有向回路的第 u 个子图，β 是 V_m 中的节点数，当 i=j 时，$G_m[V_m^{ij}]$ 简化为 $G_m[V_m^{i}]$，并且根据定义，第 k 条有向路径 P_{ij}^{K} 变为 $G_m[V_m^{i}]$ 中含有节点 i 的有向回路。

象 COATES 图的简化那样，以上概括的步骤比用语言描述更易体现。下面我们对这个步骤作一简单的物理介绍（CHEN [1969 a]）。

对于 i≠j，$G_m^{\prime\prime}[V_m^{ij}]$ 是从局部子图 $G_m[V_m^{ij}]$ 中移去所有指向节点 i 和从节点 j 离开的边所得的图，m_{ij} 是图 $G_m^{\prime\prime}[V_m^{ij}]$ 中从节点i到 j 的图传输系数。

对于 i=j，有必要在 $G_m[V_m^{i}]$ 中首先分裂节点 i 为两个不同节点 i′ 和 i″，这样，$G_m[V_m^{i}]$ 中所有从节点 i 流出的边，现在都从节点 i′ 流出，而所有原来指向节点 i 的边，现在都指向节点 i″ 那么在

图$G_m[V_m^i]$中，m_{ii}只不过是从节点i'到节点i''的图传输系数。换言之，在简化的MASON图中，求传输量m_{ij}的公式除了现在是应用于变形的局部子图$G_m^{ii}(V_m^{ii})$以外，与求G_m的图传输公式(3.65)是完全相同的。

定理 3.10 如果K_m是非零的，那么

$$detG_m = K_m detG_{mr} \tag{3.71}$$

证明：设G_c是从G_m中对G_m的每个节点加进传输系数为−1的自环而得的相应COATES图。在G_c中，由于所求的图传输系数是与在G_m中所求得的图传输系数(在相同节点对之间)相同的，以及$G_c[V_c^i]$是$G_m[V_m^i]$相应对应的COATES图(此处，$V_c=V_m$)，所以$K_c=K_m$，而且对于$i \neq j$，有$c_{ij}=m_{ij}$，此处c_{ij}是用式(3.28)来定义的。对于$i=j$，有

$$
\begin{aligned}
c_{ii} &= (-1)^a (1/K_c) \sum_{h^*} (-1)^{L_h^*} f(h^*) \\
&= (-1)^a (1/K_c)\Big[\sum_{h_1^*} (-1)^{L_{h1}^*} f(h_1^*) + \sum_{h_2^*} (-1)^{L_{h2}^*} f(h_2^*)\Big] \\
&= (1/K_c)\Big[-K_c + (-1)^a \sum_{h_2^*} (-1)^{L_{h2}^*} f(h_2^*)\Big] \\
&= -1 + (-1)^a (1/K_m)\Big[\sum_K f(P_{ii}^K)\Big\{1 + \sum_{s,t} (-1)^t f(D_{st}^{iK})\Big\}\Big] \\
&= -1 + m_{ii}
\end{aligned} \tag{3.72}
$$

式中h^*是$G_c[V_c^i]$中的1-因子，h_1^*是$G_c[V_c^i]$中节点i上含有传输量为−1的附加自环的1因子，h_2^*是$G_c[V_c^i]$中节点i上不含有传输量为−1的附加自环的1因子，而L_h^*，L_{h1}^*和L_{h2}^*分别是h^*、h_1^*和h_2^*中的有向回路数。第四行是用类似于证明定理3.7的论证方法得出的。

因此，如式(3.28)中所定义的G_{cr}是对应于G_{mr}的COATES

图。根据定理3.4，有

$$\det G_m = \det G_c - K_c \det G_{cr} = K_m \det G_{mr} \tag{3.73}$$

定理证毕。

特别是，当 V_m 只含有单个节点时，则定理简化为与 MASON 所给出[1953]的相同。

推论 3.10：如果 w_{ij} 是 G_m 中与边(i，j)有关的权，以及 $w_{kk} \neq 1$，那么

$$\det G_m = (w_{kk} - 1)\det G_{mr} \tag{3.74}$$

式中 G_{mr} 是由下面步骤从 G_m 得到的：

(i) 从 G_m 中移去节点 K；

(ii) G_{mr} 中与边(i，j)关联的权 m_{ij} 由下式给出

$$m_{ij} = w_{ij} + w_{ik}w_{kj}/(1 - w_{kk}) \tag{3.75}$$

以上定理的用途在下面给出。

定理 3.11：如果 G_{mr} 是 G_m 的简化MASON图，以及 $K_m \neq 0$ 和 $i \neq j$，那么对于所有不在 V_m 的 i 和 j，有

$$(-1)^{\beta}\sum_{K} f(P_{ij}^{k})\left[1 + \sum_{s,t}(-1)^{t} f(D_{st}^{k})\right]$$

$$= K_m \sum_{w} f(P_{ij}^{w})\left[1 + \sum_{u,v}(-1)^{v} f(D_{uv}^{w})\right], \tag{3.76}$$

式中 P_{ij}^{k} 和 P_{ij}^{w} 分别是 G_m 和 G_{mr} 中从 i 到 j 的第 k 和第 w 条有向路径，D_{st}^{k} 和 D_{uv}^{w} 分别是 $t(t>0)$ 和 $v(v>0)$ 节点不相接有向回路的第 s 和第 u 个子图，有向回路也是 G_m 中与 P_{ij}^{k} 和 G_{mr} 中与 P_{ij}^{w} 节点不相接的，而 β 和 K_m 是式(3.70)中所定义的。

此定理是直接从定理3.5中得出的，而且可以用类似于定理3.10那样的方式来证明，细节留作练习(习题3.6)。

推论 3.11：对于所有 V_m 中与节点无关的变量，系统方程式(3.16)的解可以在 G_m 中也可以在 G_{mr} 中求得。

推论 3.12：对于不在 V_m 中的所有节点，从源节点到非源节点

的图传输系数在 G_m 和 G_{mr} 中二者保持相同。

我们将用下面的例子来说明节点消去步骤。

例 3.6：考虑图 3.17 所示的 MASON 图，假设要求从 G_m 中移去局部子图 $G_m[2.3]$，图 3.20 是 G_m 的简化 MASON 图 G_{mr}，为了说明起见，我们来计算与 G_{mr} 的两个典型边 (5.1) 和 (4.4) 有关的传输量，局部子图 G_m $[1.2.3.5]$ 以及所需的子图如图 3.21 所示，w_{ij} 是 G_m 中 (i, j) 的权，由式 (3.69)，G_{mr} 中的边 (5.1) 的传输量 m_{51} 是

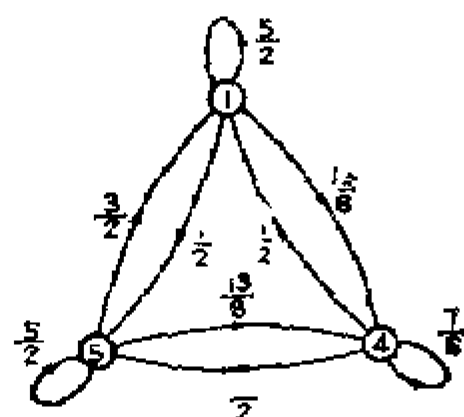


图 3.20 图 3.17 MASON 流图的简化MASON 流图

$$
\begin{aligned}
m_{51} = & (-1)^4(1/K_m)\{w_{53}w_{31}[1+(-1)^1 w_{22}] \\
& + w_{51}[1+(-1)^1 w_{23}w_{32} + (-1)^1 w_{33} \\
& + (-1)^1 w_{22} + (-1)^2 w_{22}w_{33}]\} \\
= & -\frac{1}{6}\{(1\cdot 3)\cdot[1+(-1)^1\cdot 2] + 1[1+(-1)^1(3\cdot 2) \\
& + (-1)^1 + (-1)^1\cdot 2 + (-1)^2(2\cdot 1)]\} \\
= & \frac{3}{2}
\end{aligned}
$$

式中 K_m 是局部子图 $G_m[2.3]$ 的行列式，它可以由公式 (3.70) 求得。

$$
\begin{aligned}
K_m = & (-1)^2[1+(-1)^1 w_{22} + (-1)^1 w_{33} + (-1)^1 w_{23}w_{32} \\
& + (-1)^2 w_{22}w_{33}] \\
= & 1-2-1-6+2 \\
= & -6
\end{aligned}
$$

同样，G_{mr} 中边 (4.4) 的传输量 m_{44} 可以在局部子图 $G_m[2.3.4]$ 上求得，$G_m[2.3.4]$ 以及所有需要的子图如图 3.22 所示，根据式 (3.69) 有

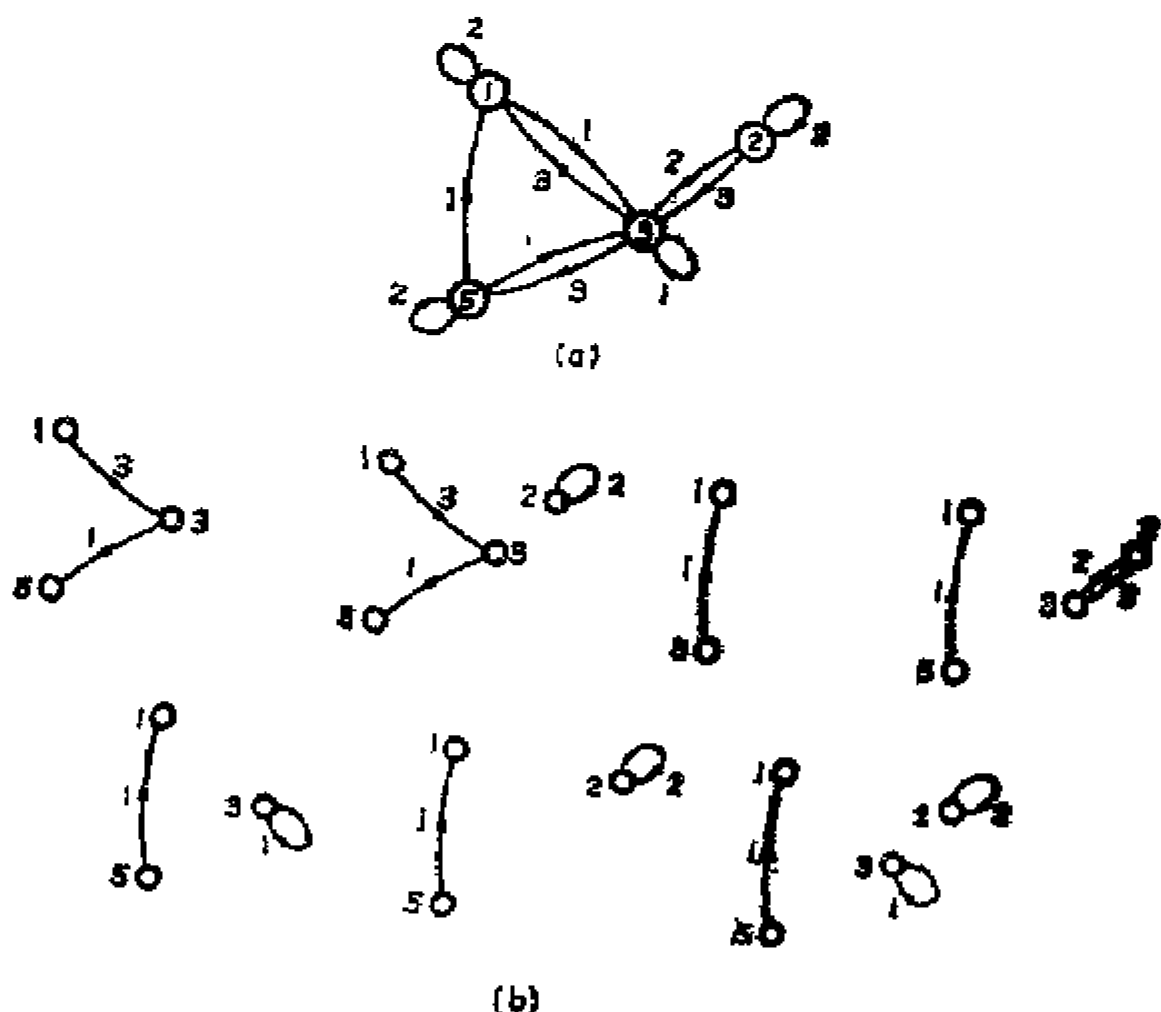


图 3.21　求传输 m_{51} 的局部子图 $G_m[1.2.3.5]$ 及其子图

$$m_{44} = (-1)^{3+1}(1/K_m)\{w_{44}[1+(-1)^1 w_{33}+(-1)^1 w_{22} + (-1)^1 w_{23}w_{32}+(-1)^2 w_{22}w_{33}] + w_{43}w_{34}[1+(-1)^1 w_{22}]\}$$

$$= -\frac{1}{6}[1\cdot(1-1-2-3\cdot2+2\cdot1)+1\cdot1\cdot(1-2)]$$

$$=\frac{7}{6}$$

G_{mr} 的图行列式可以由公式(3.53)来计算，其值等于$-\frac{5}{6}$，因此，

$$\det G_m = K_m \det G_{mr}$$

作为以上步骤的另一种方法，G_{mr} 的边传输量 m_{ij} 可以象在变形局部子图上求图传输系数那样来计算。例如，m_{51} 和 m_{44} 分别是

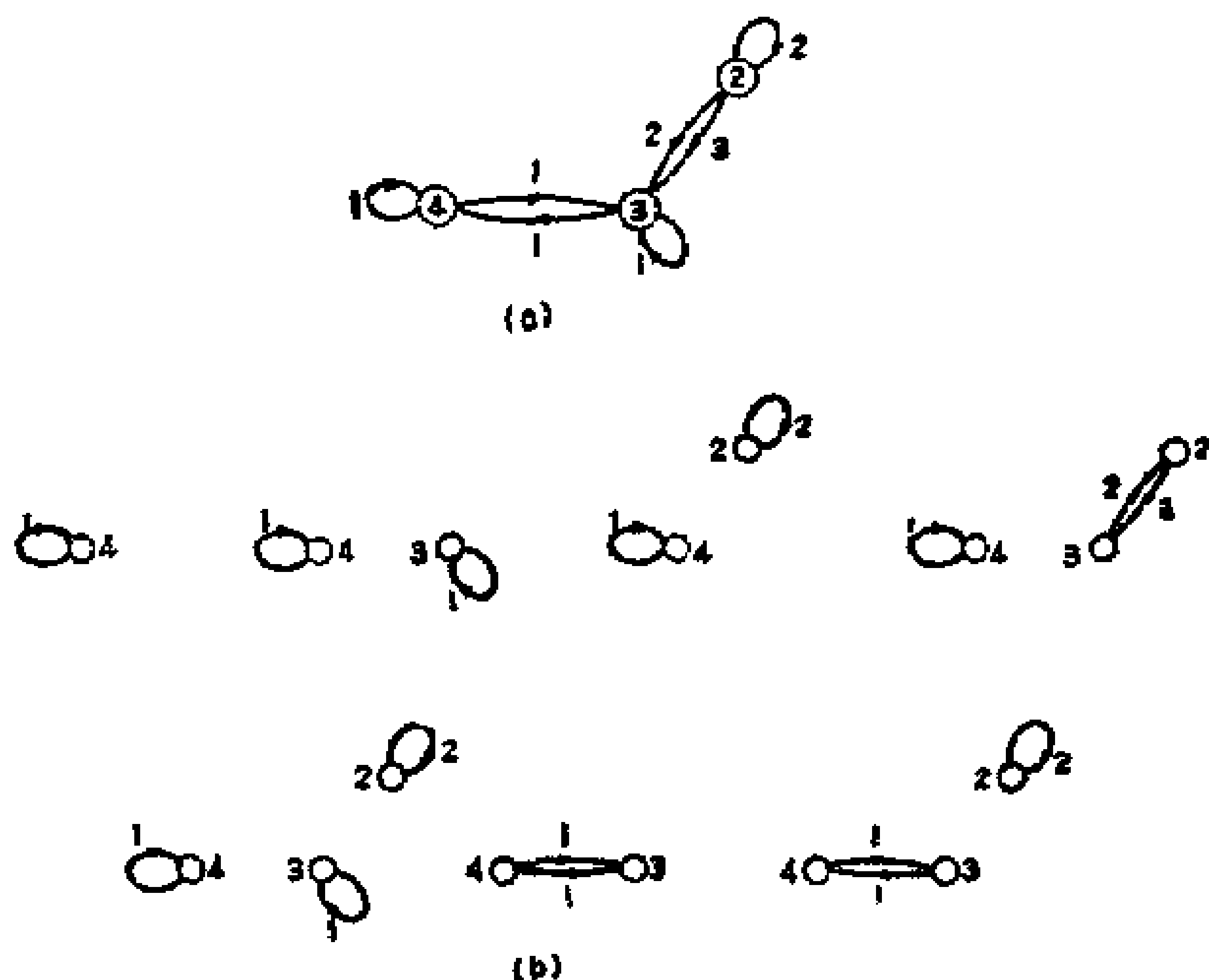


图 3.22 求传输量 m_{44} 的局部子图 $G_m[2.3.4]$ 及其子图

MASON 图 $G''_m[1.2.3.5]$ 和 $G''_m[2.3.4]$ 中，从节点 5 到 1 和从节点 4′ 到节点 4″ 的图传输系数，如图 3.23 所示，为了说明起见，我们来计算下列两个图传输系数：

根据式(3.65)，m_{51} 的分子和分母分别由下式给出：

$$w_{51}[1 \quad w_{22} \quad w_{33} \quad w_{23}w_{32} + w_{22}w_{33}] + w_{53}w_{31}[1 - w_{22}]$$

$$= 1\cdot(1-2 \quad 1-6+2) + 3\cdot(1-2)$$

$$= -9$$

$$1 - w_{22} \quad - w_{33} - w_{23}w_{32} \quad - w_{22}w_{33}$$

$$= 1-2 \quad 1-6+2$$

$$= -6$$

因此，$m_{51} = -9/(-6) = \frac{3}{2}$。同样，$m_{44}$ 的分子和分母分别由下式

给出

$$W_{44'4''}[1-W_{22}-W_{33}-W_{23}W_{32}+W_{22}W_{33}]+W_{44'3}W_{34''}[1-W_{22}]$$
$$=1\cdot(1-2-1-6+2)+1\cdot(1-2)$$
$$=-7$$
$$1-W_{22}-W_{33}-W_{23}W_{32}+W_{22}W_{33}=1-2-1-6+2$$
$$=-6$$

因此 $m_{44}=-7/(-6)=\frac{7}{6}$。

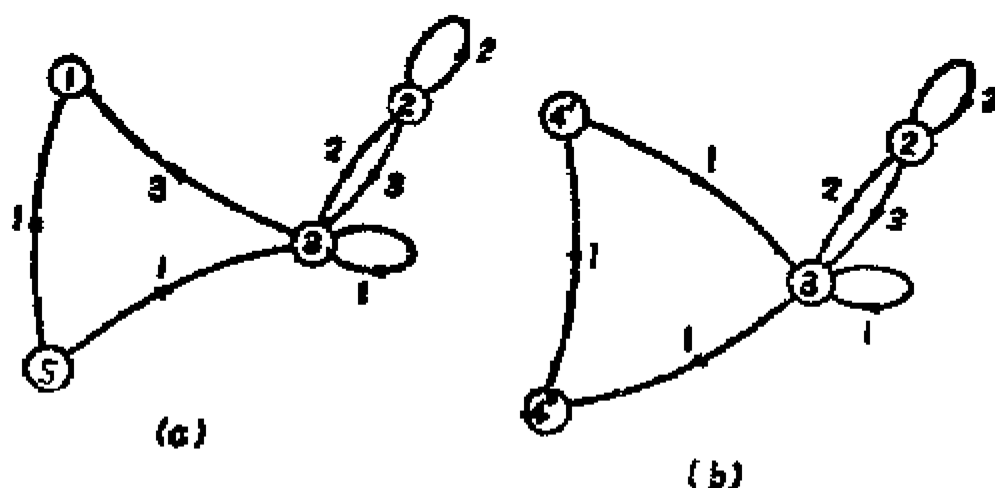


图 3.23 利用图传输系数来求传输量 m_{51} 和 m_{44} 的图

例 3.7：考虑图 3.24(a) 所示的 MASON 图。它是由晶体管放大器产生的。假定要求从 G_m 中移去节点 α、v_2 和 i_5，为了避免多重下标，设 v_8，$i_1 i_8$ 和 v_4 分别用 9、1、3 和 4 表示。G_m 的简化 MASON 图如图 3.24(b) 所示，为了说明起见，我们分别计算 G_m 中与边(i_1, v_4)和(i_1, i_1)有关的传输量 m_{14} 和 m_{11}。

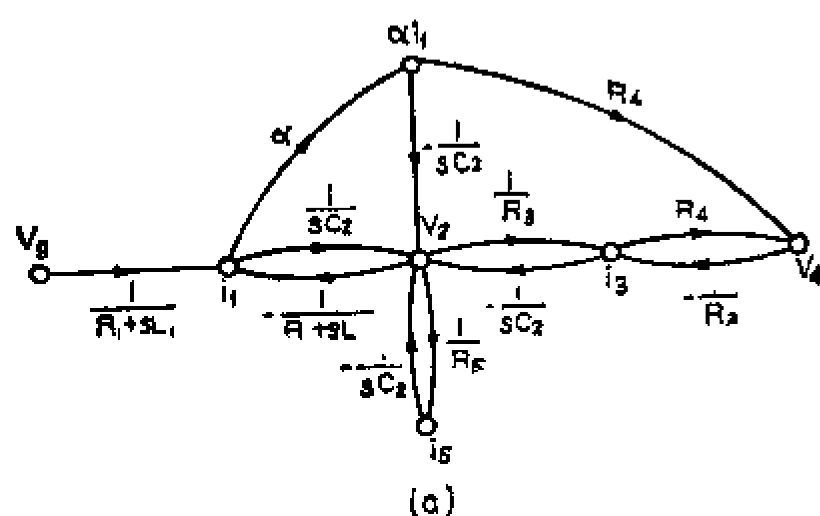
传输量 m_{14} 和 m_{11} 在图 3.24(c) 所示的变型局部子图中分别是从节点 i_1 到节点 v_4 和从节点 i_1' 到节点 i_1'' 的图传输系数，其结果是

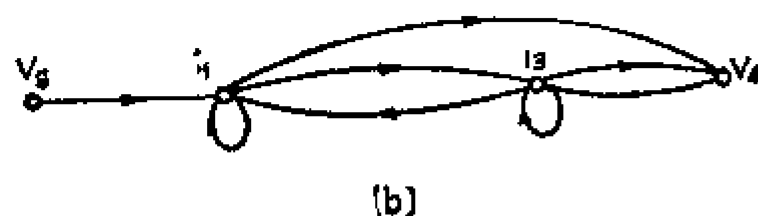
$$m_{14}=\alpha R_4[1-(1/R_5)(-1/sC_2)]/[1-(1/R_5)(-1/sC_2)]$$
$$=\alpha R_4,$$
$$m_{11}=\{\alpha(-1/sC_2)[-1/(R_1+sL_1)]+(1/sC_2)[-1/$$

$$(R_1+SL_1)]\},[1-(1/R_5)(-1/sC_2)]$$
$$=(\alpha-1)R_5/[(R_1+SL_1)(1+sC_2R_5)]$$

类似有：

$$m_{g1}=1/(R+SL_1)$$
$$m_{13}=R_5(1-\alpha)/(R_3+sC_2R_3R_5)$$
$$m_{31}=R_5/[R_1+SL_1)(1+sC_2R_5)$$
$$m_{34}=R_4$$





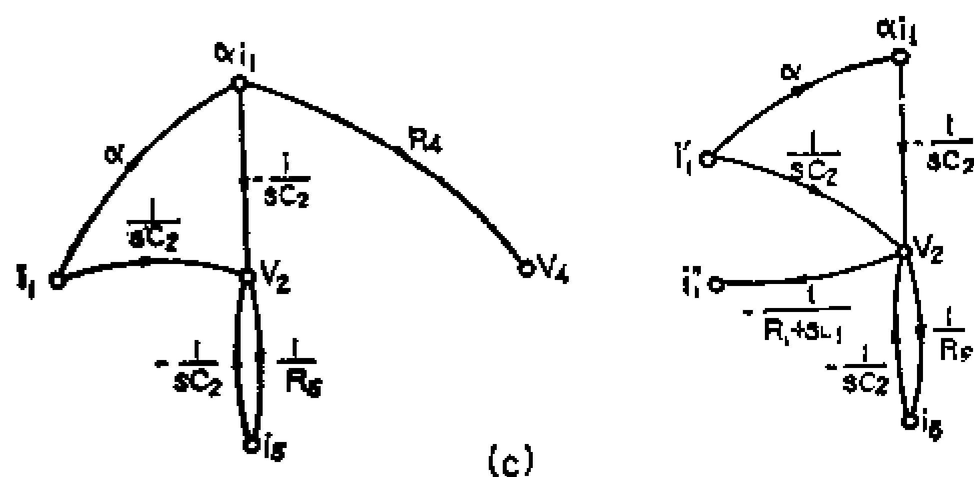


图 3.24 (a) MASON 图。(b) 简化 MASON 图(c) 求 m_{14} 和 m_{1} 的图

$$m_{43} = -1/R_3$$

$$m_{33} = -R_5/(sC_2R_3R_5 + R_3)$$

（B）分解为子图

MASON 图分解为不连通子图和有向路径或有向回路的变换与 COATES 图完全类似。由于对 COATES 图已经详细地讨论过了，几乎没有必要在相同的问题上再次详细讨论。下面我们将只陈述结论，而略去细节。

定义3.10：可分解的 MASON 图。

一个MASON 图，只要其对应的 COATES 图是可分解的，就被认为是可分解的。

由于我们只要仅仅从自环的传输量中通过减 1 和加 1 就能从 MASON 图变换到 COATES 图，及反变换为 MASON 图。我们可以利用在§1.4(B)中所讨论的对于 COATES技术来分解 MASON 图。显然，可分解的 MASON 图的图行列式是各片图行列式的乘积，包括符号在内。象 COATES 图那样，所有被移去的边没有必要一定是不包含于任何有向回路中的边，存在这样的 MASON 图，它所有的边都包含于某些有向回路，然而它们仍然是可分解的。自然，没有被包含于任何有向回路的边总可以从 MASON 图中移去，而不影响其图行列式，这是由于它们不会在式(3.53)的任何边中出现，如果分解后的 MASON 图的一个片是孤立节点，根据定义，由于 $f(\phi)=0$，那么其图行列式是零。

假定图 3.25(a)的有向图是一个给定的 MASON 图 G_m，对 G_m 相对应的 COATES 图 G_c是对 G_m的每个节点通过加进传输量为 -1 的自环得到的，根据定理3.6，由于 G_c的节点集存在零差的子集 {3，4}，故 G_c是可分解的。利用在§1.4(B)中所概述的步骤，能够将 G_c 分解为片，再将这些 COATES 图的片变换成所要求的 MASON 图片，如图 3.25(b)所示，由于在分解的 G_c 中需要对两个节点的入边有一次交换，则 G_m的图行列式只不过是 MASON 图

片图行列式乘积的负值，注意到 G_m 的每条边也包含于某些有向回路之中。

最后我们提一下，如果在 MASON 图 G_m 中，存在一个仅由不在任何有向回路的边所组成的割集，则移去这个割集，G_m 就分解为片，这种类型的分解法 MASON 和 ZIMMERMANN [1960]称之为因式分解。

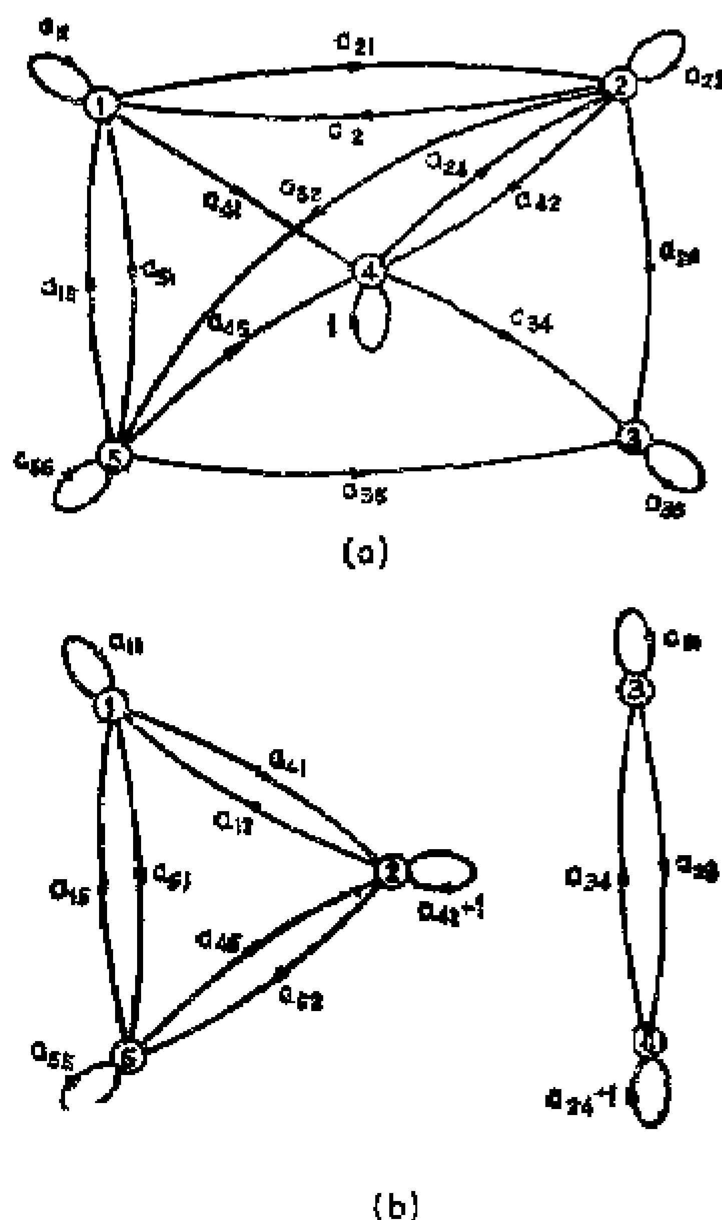


图 3.27 (a) MASON 流图，(b) 可分解的片

(C) 反向变换

如前所述，式(3.65)中所定义的图传输系数的公式仅应用于计

算从源节点 x_0 到任何其他非源节点的图传输系数。但是，在许多应用中，有必要计算从非源节点到另一个非源节点的图传输系数，比如说 x_1 到 x_2。一个办法是先计算出从源节点 x_0 到 x_1 和 x_2 的图传输系数，然后取其比值，由于这两个图传输系数有相同的分母，所以分母根本无需计算。另外一种方法是直接变换节点 x_1 为源节点，或者将从节点 x_0 到 x_1 的有向路径进行反向变换，然后计算所需的图传输系数。

由于 MASON 图很容易化成 COATES 图，再反回来，或许实际上最容易的办法是先将 MASON 图变换为对应的 COATES 图，交换节点 x_0 和 x_1 的入边，最后再把它变回为 MASON 图。记住，在变换为 COATES 图之前，必须先对 MASON 图的节点 x_0 附加传输量为 1 的自环，见下面式(3.65)的讨论。但是，在最终所得的 MASON 图上，在节点 x_1 的传输量为 1 的自环可以移去，并不影响其图行列式。

就式(3.27)中所定义的线性代数方程组而论，以上的运算相当于取变量 x_1 为独立变量，而所有包括 x_0 在内的其它变量都通过式(3.27)以 x_1 的形式表示出来。如果式(3.27)中对应于除 x_1 以外的变量的列是线性独立的，则式(3.27)的解是唯一的，在所得的 MASON 图中，就从 x_1 到 x_2 的传输系数而论，这些列的线性独立表现为它具有非零分母，这分母和符号一起也是图行列式。

在 MASON 图中，另一个相当有趣的运算是移去自环，使图传输系数不会由这种运算而受到影响。实行这种运算如下所示：对于一个 MASON 图 G_m，对 G_m 中所有的(i, j)，设 $W_{ij} = f(i, j)$，如果 $W_{KK} \neq 1$，只需对指向节点 K 的每个边的传输量都乘上如下因子，

$$\frac{1}{1-W_{kk}}$$

节点 k 的自环即可移去(习题 3.7)。因此，如果在 G_m 中没有传输量为 1 的自环，消除每个自环的运算等效于变换给定 MASON 图

为其正规形式的运算(参见§2.3)。

最后，在与给定的 MASON 图相对应的 COATES 图中，如果变换两节点入边的运算连续应用于有向路径或回路，在大多数情况下，MASON 图的有向路径或回路将反向。由于 MASON 图的这一特点，一般的反向规则简单地等同于在对应的 COATES 图中，沿有向路径或回路相继交换两个节点的入边。一般的规则表示如下：

在 G_m 中，为了使从源节点 i 流出的边(i, j)反向，首先移动具有终止节点 j 的边集终止于节点 i，并将因此在节点 i 产生的自环的起始节点移到节点 j，然后，在所得的 MASON 图中用 $1/w_{ij}$ 替换与边(i, j)相关联的传输量 W_{ij}，并对所有其它终止节点已被移动的边的传输量乘以($-1/w_{ij}$)。为了反向变换从源节点流出的有向路径或有向回路，我们只需对那一有向路径或回路中所有的边相继进行反向变换。

此外，具体反向变换一下比用语言描述更容易体会，作一下练习(习题3.9)就不难发现这些规则的正确性。

例 3.8：考虑图 3.26(a)给出的 MASON 图 G_m，假定需要计算从节点 x_3 到节点 x_6 的图传输系数，为了应用公式(3.65)，有必要变换节点 x_3 为源节点，这是很容易做到如下，

与 G_m 相对应的 COATES 图 G_c 如图 3.26(b)所示。在 G_c 中，如果交换节点 x_1 和 x_3 的入边，则有图 3.26(c)所示的 G_c^*，最后，与 G_c^* 相对应的 MASON G_m^* 如图 3.26(d) 所示。注意，为了得到 G_m^*，在节点 x_3 上，已删去传输量为 1 的自环、因此，从节点 x_3 到节点 x_6 的图传输系数由下列给出：

$$x_6/x_3 \quad [\ jgh(1 \quad dm \quad 1-dm\cdot 1)+cde(1\ -1+i-ab\ -i\,1-$$
$$-iab)\ -1\,agh(1 \quad dm)-ckagh-cdpagh\,]/\Delta,$$

式中

$$\Delta \quad 1 \quad (-dm \quad en \quad i\cdot ab \quad 1 \quad kaghnm \quad npagh)$$
$$+(\quad dm\,1 \quad en\,1-i\,1\cdot iab-abdm\ -aben+idm+ien)$$
$$(i\,1\,dm+i\,1\,en \quad abidm+abien)$$
$$=-ab(1+i+dm+en \quad idm+ien)\ \ agh(nmk-np)。$$

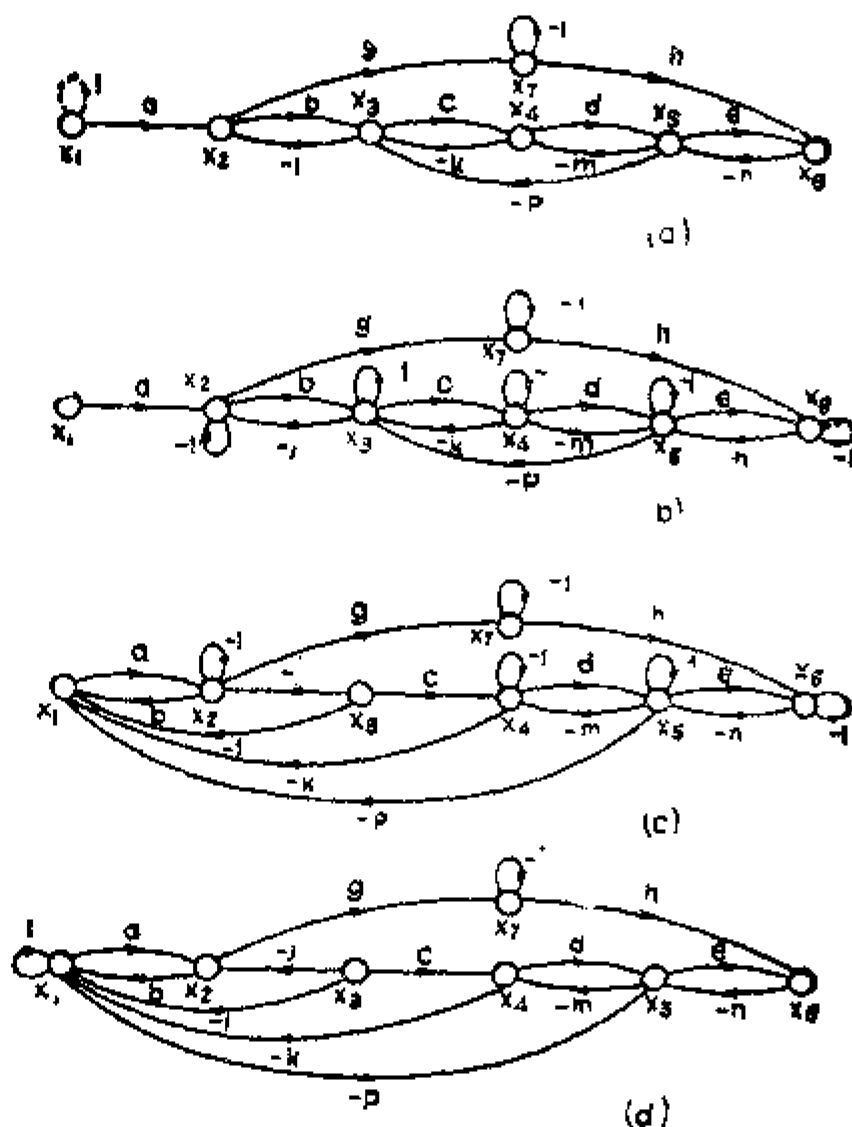


图 3.26 变换节点 x_1 为原节点

与上类似，如果要求求从节点 x_3 到 x_4 的图传输系数，则有

$$x_4/x_3 = [-jghnm(1-1)+c(1+en+i-1-ab+npagh+i1- -en1+iab-aben+ien+i1en+iaben)+aghnm]/\triangle$$

$$= [-abc(1+en+i+ien)-agh(nm+npc)]/\triangle。$$

例 3.9：考虑与图 3.6 晶体管反馈放大器有关的图 3.19 的 MASON 图 G_m，假定需要计算放大器的电压增益函数 V_3/V_2，为了应用图传输系数公式(3.65)，有必要变换节点 V_2 为源节点，为了做到这一步，利用以上所概述的一般规则，在 G_m 中变换由边

(I_1, V_1)和(V_1V_2)所组成的有向路径，所得的 MASON 图如图3.27所示，在新的 MASON 图中，从节点 V_2到 V_3 的图传输系数可以由式(3.65)得出，并由下式给出：

$$\frac{V_3}{V_2}=\frac{(g_c-ag_e)g_b+(g_b+g_e+g_c-ag_e)G_b}{(G_b+G_d+g_e)g_b-G_bg_e} \tag{3.77}$$

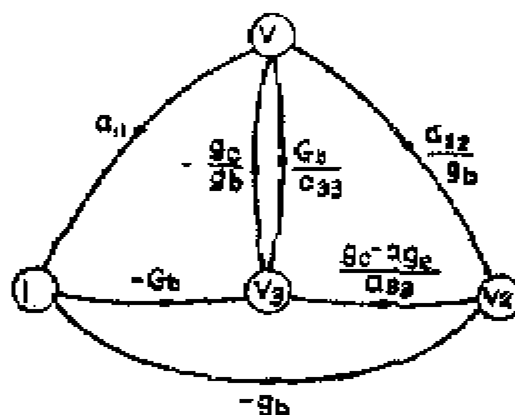


图 3.27 由变换图3.19 MASON 图 p 的有向路径所得的 MASON 图

§ 3. COATES 图和 MASON 图的改进

由于伴随有向图通常由观察系统结构直接建立，而不必首先列出伴随方程组，前面两节所得出的拓扑方法在线性系统分析中是特别有意义的，但是，正如前面所指出的那样，这些公式在计算电网络函数中效率低．其主要原因是存在大量的对消项。在这节中，我们将表明，如果将与 COATES 图或 MASON 图的自环有关的权稍作改进，那么可得到更有效的公式，而且在分析中，当使用节点方程系时，那是特别有效的(参见第二章§3.3和习题3.10、3.11)，推导过程完全是由 CHEN[1965b]得出的。

3.1 COATES 图的改进

考虑图 3.28(a)所示的网络图，与网络的回路阻抗矩阵有关的 COATES 图 G_c如图 3.28(b)所示。根据定理 3.1，回路阻抗矩阵的行列式△由下式给出，

$$\Delta=(Z_1+Z_3)(Z_3+Z_2+Z_4)(Z_4+Z_5+Z_6)-(-Z_3)(-Z_3-Z_2)$$
$$\times(Z_4+Z_5+Z_6)-(-Z_4)(-Z_4)(Z_1+Z_3)$$
$$=Z_1(Z_2+Z_3)(Z_4+Z_5+Z_6)+(Z_1+Z_3)Z_4(Z_5+Z_6) \qquad (3.78)$$

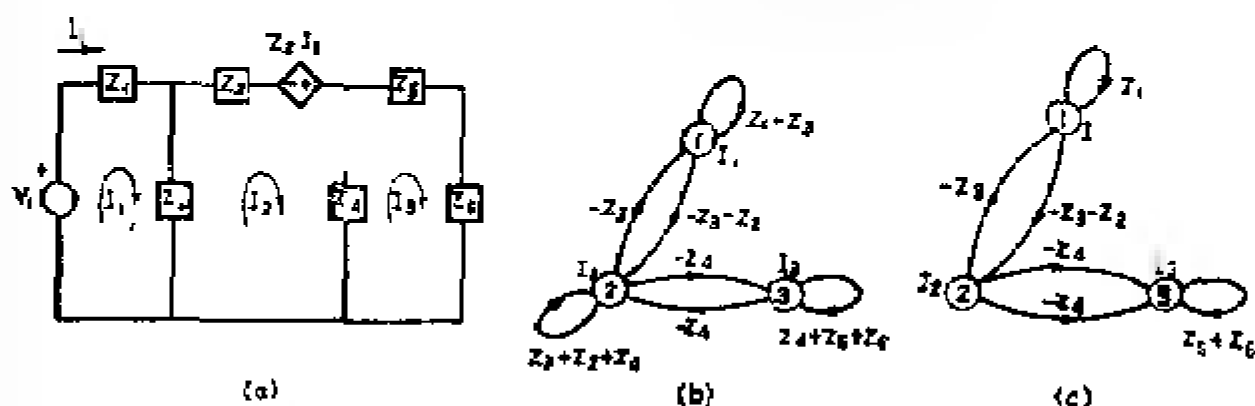


图 3.28 (a) 网络 (b) 其COATES图 (c) 其改进COATES图

仔细检验以上方程表明，这些对消项存在的主要原因是与每个自环有关的权包含着某些以该自环所在节点作为终止节点的边权，对于与网络节点导纳矩阵有关的COATES图来说，这同样是适用的。例如例3.2中给出的情况，为了得到更有效的公式，用下面的方法来改进COATES图。

定义 3.11. 改进的COATES图。

对于一个COATES图G_c来说，其改进COATES图用符号G_c'来表示，它是从G_c通过改变与每个自环(i, i)有关的权为具有节点i作为终止节点的边权之和而得的有向图，同时保持其它所有的边权不变。

数学上的等效说法是：如果w'_{ij}和w_{ij}分别是G_c'和G_c中与边(i,j)有关的权，那么，对于$i\neq j$，

有
$$w'_{ij}=w_{ij} \qquad (3.79)$$
而对于$i=j$，有
$$w'_{ii}=\sum_{k=1}^{n} w_{ki} \qquad (3.80)$$

式中 n 是 G_c 的节点数。例如，图 3.28 (c) 是图 3.28 (b) 的改进 COATES 图. 在图 3.28(c)中，有 $w'_{11}=z_1$， $w'_{22}=0$ 以及 w'_{33} z_5 $+ z_6$。

定义 3.12：部分因子。

有向图的部分因子是一个生成子图，它不含有长度大于 1 的任何有向回路，这样，其每个节点的入度为 1。

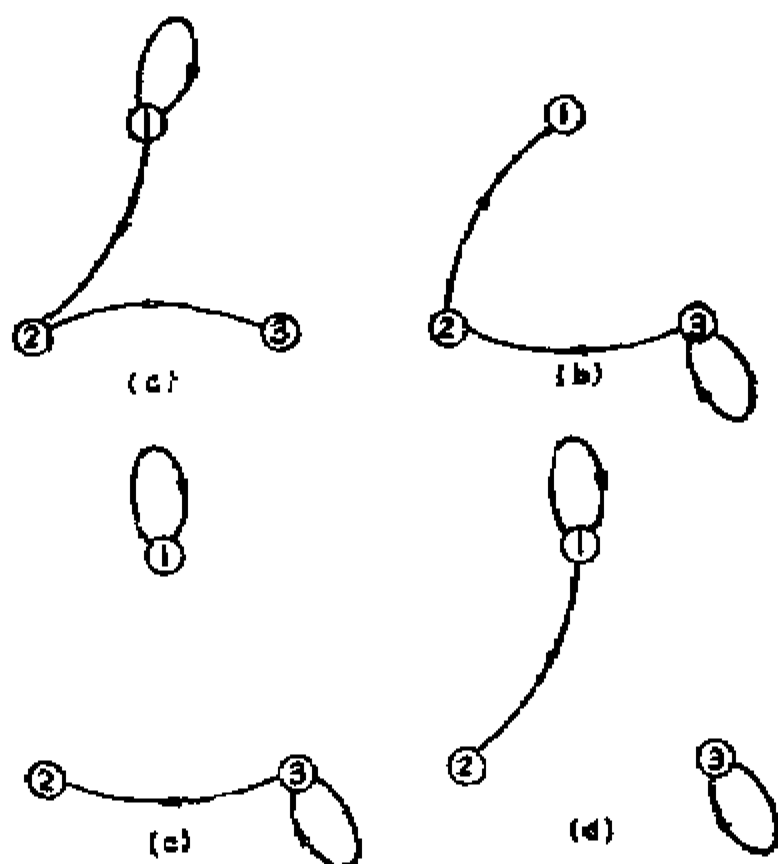


图 3.29 图 3.28 (c)有向图 G 中部分因子的集合

作为说明，图 3.28(c)改进 COATES 图的所有可能部分因子的集合如图 3.29 所示，以上定义的直接结果如下：

引理 3.1：有向图的每个部分因子片恰好含有一个自环，而每个片中的边数和那个片中的节点数相同。

现在，我们来证明下列定理。

定理 3.12：假定 G'_c 是给定 COATES 图 G_c 的改进 COATES

图，如果 A 是与 G_c 有关的矩阵，那么

$$\det A=\sum_{R}(-1)^{q_R}f(R) \tag{3.81}$$

式中 R 是 G_c' 的部分因子，而 q_R 是 R 中的偶片数。

证明：对 G_c' 的边数利用归纳法来证明式(3.81)，不失一般性，假定 A 不包含零行。

如果 G_c' 仅有一条边，显然定理成立。假定对于任何具有 b−1 条边(b≥2)的 G_c'，定理成立。为了进行归纳法，需要表明：对于b条边，定理也成立。

假定在 G_c' 中，存在一条边(k, k)，这样对所有 G_c' 的节点 x 来说，有 $d^-(k)\geq d^-(x)\geq 1$，式中 $d^-(x)$ 表示 G_c' 中节点 x 的入度。对此，如果不是这样，由于 A 的每一行元素之和等于零，则对于这种情况，定理成立。设 G_{c1}' 是从 G_c' 中通过移去边(k, k)所得的有向图，以及 G_{c2}' 是从 G_c' 中通过移去所有的边 (t, k)(t=1, 2, ⋯, k−1, k+1, ⋯, n)所得的有向图，此处 n 是 G_c 或 G_c' 中的节点数，下面考虑两种情况：

情况 1：$d^-(k)\geq 2$，对于 $\alpha=1$ 和 2，设 $G_{c\alpha}$ 是 $G_{c\alpha}'$ 相对应的 COATES 图。同样，设 A_α 是 $G_{c\alpha}$ 的伴随矩阵，由于 G'_α 比 G_c' 具有较少的边，由归纳法假设有

$$\det A_\alpha=\sum_{Q_\alpha}(-1)^{q_\alpha}f(Q_\alpha) \tag{3.82}$$

式中 Q_α 是 $G'_{c\alpha}$ 的部分因子，而 q_α 是 Q_α 中的偶片数。

设 $A=[a_{ij}]$, $A_1=[f_{ij}]$, $A_2=[h_{ij}]$,

从改进 COATES 图的定义中，不难看到对于所有的 $i\neq k$ 有

$$a_{ij}=f_{ij}=h_{ij},$$

而对于 $i=k$ 有

$$f_{kj}=a_{kj},\quad j=1,2,\cdots,k-1,k+1,\cdots,n,$$

$$f_{kk} = a_{kk} - \sum_{x=1}^{n} a_{xx}$$

以及 $h_{kj} = 0$, $j = 1, 2 \cdots, k-1, k+1, \cdots, n$,

$$h_{kk} = \sum_{x=1}^{n} a_{kx}。$$

由于A的第k行等于A_1和A_2的第k行之和，以及由于所有其它A，A_1和A_2的对应行是相同的，从而有

$$\begin{aligned} \det A &= \det A_1 + \det A_2 \\ &= \sum_{Q_1}(-1)^{q_1}f(Q_1) + \sum_{Q_2}(-1)^{q_2}f(Q_2) \\ &= \sum_{R}(-1)^{q_R}f(R) \end{aligned} \tag{3.83}$$

第二行是根据G_{c2}'（G_{c1}'）中部分因子和G_c'中那些部分因子之间存在一一对应关系而得出的，每个部分因子在节点k含有（不含有）自环(k,k)。

情况2：$d^-(k)=1$,这意味着：如果G_c'的节点x上有自环(x,x)，那么，(x, x)是唯一具有节点x为其终止节点的边，因为否则$d^-(k)>d^-(x)>1$就与假设相矛盾。

设A_{kk}是从A中划去第k行和第k列所得的矩阵，设G_{c3}'是A_{kk}的伴随COATES图G_{c3}的改进COATES图，从以上讨论，不难看到：G_{c3}'也能从G_c'中首先移去节点k，然后对G_c'无自环的每个节点j附加权为$-a_{jk}$的自环。注意：与G_c有关的自环(j, j)的权是a_{jj}。由于G_{c3}'具有比G_c'较少的边，由归纳法假设有

$$\det A_{kk} = \sum_{Q_3}(-1)^{q_3}f(Q_3) \tag{3.84}$$

式中Q_3是G_{c3}'的部分因子，而q_3是Q_3中的偶片数。

其次，观察G_{c3}'中的部分因子Q_3和G_c'中的部分因子R之间的一一对应关系，从而有

$$f(R) = (-1)^{\beta_3}a_{kk}f(Q_3) \tag{3.85a}$$

式中β_3是Q_3中权为$-a_{jk}$的附加自环的数目，根据引理3.1，由于Q_3的每个分量恰好含有一个自环，则设G_{3u}($u = 1,2,\cdots,\beta$)是Q_3的片，

不失一般性，让我们假定 G_{31}，$G_{32}\cdots G_{3y}$ $(y-\beta_3)$ 是片，其中每个片都含有权为 a_{jk} 的附加自环（注意 $k\neq j$），显然，$G_{3(y+1)}$，$G_{3(y+2)}\cdots G_{3\beta}$ 也是R的片。如果 n_u 是 G_u 中的节点数，再一次从引理 3.1 得到

$$(-1)^{q_R}=(-1)^{(n_1-1)+(n_2-1)+\cdots+(n_\beta-1)}$$
$$=(-1)^{[(n_1+n_2+\cdots+n_y+1)-1]+(n_{y+1}-1)+\cdots+(n_\beta-1)-y}$$
$$=(-1)^{q_R-\beta_3}, \tag{3.85b}$$

第二行是从R具有$(\beta-\beta_3+1)$个片这一情况得出的，而$(n_1+n_2+\cdots+n_y+1)$是含有G_c'的自环(k, k)的R的片中的节点数，在式(3.84)中代入式(3.85a)和(3.85b)后得到

$$\det A_{kk}=\sum_R(-1)^{q_R}(1/a_{kk})f(R) \tag{3.85c}$$

由于a_{kk}是A的第k行中唯一的非零元素，从而$\det A=a_{kk}\det A_{kk}$，在简单的代换之后，得到所希望的结果，定理证毕。

象 COATES 图那样，如果使 R 的每个片按照片是奇数还是偶数与正号或负号联系起来，则产生的乘积将给出如 $(-1)^{q_R}$ 相同的符号。

考虑图 3.28(c) 的改进 COATES 图 G'_c，其部分因子集合如图 3.29所示，因此，根据以上定理有

$$\det A=z_1(z_3+z_2)z_4+z_3z_4(z_5+z_6)+z_1(z_5+z_6)z_4$$
$$+z_1(z_5+z_6)(z_3+z_2)$$
$$=z_1(z_2+z_3)(z_4+z_5+z_6)+(z_1+z_3)z_4(z_5+z_6) \tag{3.86}$$

值得注意，由于无源元件，对消项不存在；在一般情况下，由于有源元件，可能存在对消项。而在这个特殊例子中，这样的项不出现，但是应当强调指出，公式的有效性在很大程度上取决于所涉及变量的选择，做到这一点的一种方法是从网络的节点导纳矩阵画出对应的COATES图（参见第二章§3.3以及习题 3.10 和 3.11）。特别是对于没有互感耦合的无源网络，这种方法不能象进行 COATES 图和 MASON 图技术那样计算任何多余项。

定义3.13：k 部分因子。

有向图G的一个生成子图在下列情况下称为是G的k 部分因子（用符号 $R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$ 表示）：在将自环 (j_u, j_u) $(u=1, 2, \cdots, k)$ 加于$R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$，所得的图成为对G没有自环的每个节点j_u上附加一个自环所得的有向图的部分因子。

因此，k 部分因子每个分量不是含有自环就是完全没有自环，不含任何自环的分量数恰好是 k。在许多情况下，如果两个指定的节点j_1和i_1需要出现在同一片中，将用到k 部分因子，那么符号 $R(j_1 i_1; j_2; \cdots; j_k)$表示节点$j_1$和$i_1$出现在同一片中的k-部份因子$R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$。注意：在$R(j_1 i_1; j_2; \cdots; j_k)$ 中j_1和i_1的阶是重要的，以及在k 部分因子中，其一个或多个片可以各自由一个孤立节点组成。

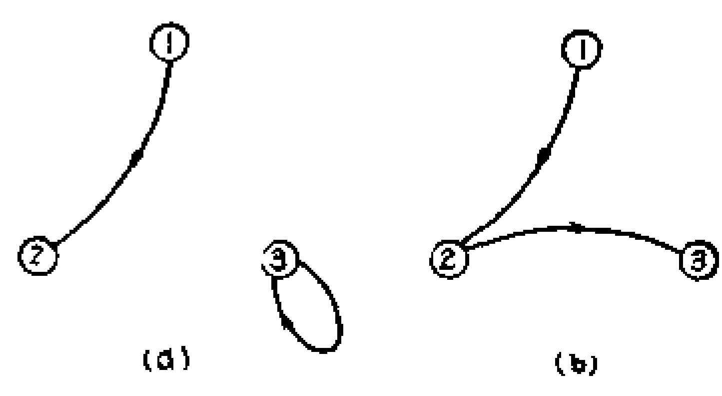


图 3.30　在图3.28(c)的有向图中1 部分因子R(12)的集合

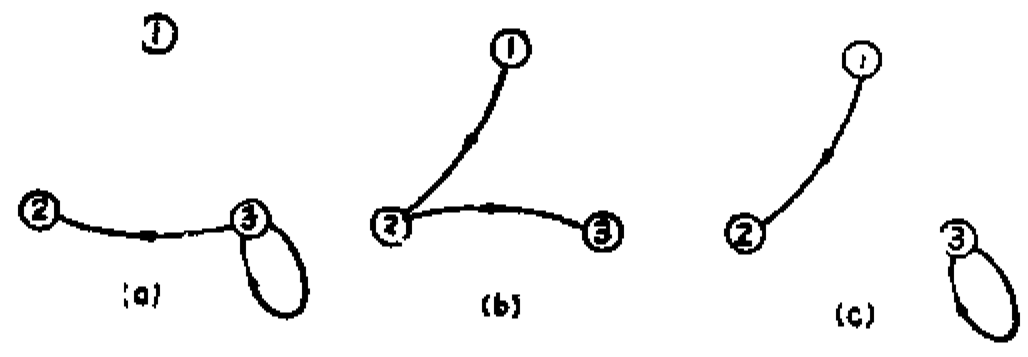


图 3.31　在图3.28(c)的有向图中1-部分因子R(1)的集合

图3.28(c)的1-部分因子R(1)的例子如图3.30或图3.31所示，除了图3.31(a)之外，由于节点1和2都包含在同一片中，所有这些1部份因子也是1部分因子R(12)。

定理 3.13：设G_c'是COATES图G_c的改进COATES图，如果Δ_{ij}是G_c的伴随矩阵元素(i，j)的余子式，那么

$$\Delta_{ij}=\sum_{R(ij)}(-1)^{q_{ij}}f(R(ij)) \qquad (3.87)$$

式中$R(ij)$是G_c'的1部分因子，而q_{ij}是$R(ij)$中的偶片数。

证明：设G_c''是从G_c'中首先移去所有以节点i为终止节点的边，然后对所得的图附加权为1的两条边(i，i)和(j，i)而所得的有向图。同样，设G_c^a是从G_c中首先移去所有以节点i为终止节点的边，然后对所得的图附加权为1的一条边(j，i)而得到的COATES图，不难看到，G_c''是G_c^a的改进COATES图。由于Δ_{ij}与G_c^a的图行列式是相同的，则根据定理3.12，有

$$\Delta_{ij}=\sum_{R''}(-1)^{q''}f(R'') \qquad (3.88)$$

式中R''是G_c''中的部分因子，而q''是R''的偶片数，由于G_c''的每个部分因子R''必定含有边(j，i)或(i，i)，则R''总是能表现为

$$R''=R^*\cup(k,\ i) \qquad (3.89)$$

式中k＝j或i，而R^*和(k，i)表示部分因子R''的补子图，显然，在G_c'中，R^*的对应子图形成G_c'的1部分因子R(i)，从而

$$f(R'')=f(R(i)) \qquad (3.90)$$

其次，考虑在G_c''中具有式$R^*\cup(j,i)$的部分因子。在G_c''中总是存在唯一的部分因子$R^*\cup(i,i)$，从而对于$i\neq j$

$$(-1)^{q_1}f(R^*\cup(j,\ i))=(-1)^{q_2+1}f(R^*\cup(i,\ i)), \qquad (3.91)$$

式中q_1和q_2分别是部分因子$R^*\cup(j,i)$和$R^*\cup(i,i)$中的偶片数。反之，如果$R^*\cup(i,i)$是G_c''的部分因子，这样i和j不含于同一分量中，那么在G_c''中总是存在具有以上性质的唯一部分因子$R^*\cup(j,i)$。因此，出现在Δ_{ij}的最后展开式中的唯一项是具有节点i和j属于同一片

的这些部分因子$R^* \cup (1,i)$。

最后，注意在G''_c中没有对消的部分因子$R^* \cup (i, i)$和G'_c中1-部分因子$R(1, j)$之间的一一对应关系。同样注意：从$R^* \cup (i,1)$中移去边(i, i)，用1增加或减少$R^* \cup (i, 1)$的偶片数，这样有

$$(-1)^{q''} f(R^* \cup (i, 1)) = (-1)^{q_{1j}-1} f(R(1, j)), \qquad (3.92)$$

定理证毕。

作为一个例子，再一次考虑图3.28(C)所示的改进COATES图G'_c。1-部分因子R(12)和R(1)的集合分别如图3.30和图3.31所示，因此有

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \sum_{R(12)} (-1)^{q_{12}} f(R(12)) \\ &= (z_2 + z_2)(z_5 + z_6) + (z_3 + z_2)z_4 \\ &= (z_2 + z_2)(z_4 + z_5 + z_6)\end{aligned} \qquad (3.93)$$

$$\begin{aligned}\Delta_{12} &= \sum_{R(1)} (-1)^{q_{11}-1} f(R(1)) \\ &= (z_5 + z_6)z_4 + (z_3 + z_2)z_4 + (z_3 + z_2)(z_5 + z_6) \\ &= (z_5 + z_6)(z_2 + z_3 + z_4) + z_4(z_3 + z_2)。\end{aligned} \qquad (3.94)$$

现在可以应用这些结果来求解线性方程组，以下给出的定理，可以类似于证明定理3.3的方式来证明，因此仅仅提出概括性的证明。

定理3.14：如果系数矩阵A是非奇异的，那么对于$k = 1,2,\cdots n$，式(3.16)的解由下式给出

$$x_k = \frac{\sum_{R(SK)} (-1)^{q_{SK}-1} f(R(SK))}{\sum_{R} (-1)^{q_R} f(R)} \qquad (3.95)$$

式中$s = n+1$，R(SK)是$G'_c(A_u)$的1-部分因子，R是$G'_c(A)$的部分因子，$G'_c(A)$和$G'_c(A_u)$分别是COATES图$G_c(A)$和$G_c(A_u)$的改进COATES图；q_{SK}和q_R分别是R(SK)和R的偶片数，而A_u是从A中附加$-B$到A的右边，然后在合成矩阵的底部加上

一行零而所得的增广矩阵。

证明：考虑等效的系统方程组

$$A_a X'' = 0 \tag{3.96}$$

式中X''的转置是具有$x_{n+1}=1$的$[x_1, x_2 \cdots x_n, x_{n+1}]$，象在定理3.3的证明中所给出的那样，得出一个类似的结论，系统方程的解可以写为

$$x_k = (-1)^{n+1+k+1}(-1)\det(A_a)_{n+1,k}/(\det A)$$

$$= (-1)^{n+1+k}\det(A_a)_{n+1,k}/(\det A) \tag{3.97}$$

式中的$(A_a)_{ij}$是从A_a中划去第i行和第j列所得的矩阵，在式(3.97)中代入(3.81)和(3.87)的结果之后，立即得出式(3.95)的定理，定理证毕。

3.2 MASON 图的改进

COATES 图的改进推广到 MASON 图是简单明了的，步骤是相同的，因而不必进一步详细讨论。

定义3.14：改进 MASON图。

对于一个 MASON 图 G_m，其改进 MASON图用符号G_m'表示，它是从G_m中改变与每个自环(i,i)有关的权为以节点i 为终止节点的边权之和而所得的有向图，同时保持其他所有边权不变。

定理3.15．设G'_m是有n个节点的MASON图G_m的改进MASON图，那么

$$\det G_m = (-1)^n + \sum_{v=0}^{n-1} \sum_{u} (-1)^{q_{uv}} f(R^{uv}) \tag{3.98}$$

式中R^{uv}是G'_m的第u个v-部分因子，q_{uv}是R^{uv}的偶片数，而R^{u0}定义为G'_m的第 u 个部分因子。

证：设G_c是与G_m相对应的COATES图，同样设G'_c是G_c的改进COATES图，不难看到，G'_c是可以从G_m'通过对G_m'的每个节点附加权为 -1的自环得出。如果 W^{ik} 是含有k个权为 -1 的附加自环的

G'_m的第u个部分因子，那么根据引理3.1，有

$$f(W^{m})=(-1)^{k}\text{以及}$$

$$(-1)^{q}f(w^{uk})=(-1)^{q_1+k}(-1)^{k}f(Q^{uk}) \qquad (3.99)$$

式中k的范围从0到n-1，q和q_1分别是w^{uk}和Q^{uk}中的偶片数；而Q^{uk}是从w^{uk}中移去k个附加自环而得到的，根据定理3.12，具有适当符号的w^{uk}和项$(-1)^n$一起为全体恰好是与G_m有关的矩阵行列式，即

$$\det G_m=(-1)^{n}+\sum_{\substack{u,k\\k<n}}(-1)^{q_1}f(Q^{uk}) \qquad (3.100)$$

显然，在G'_m中Q^{uk}所对应的子图R^{uk}实际上是G'_m的k-部分因子，由于在G'_m中子图Q^{uk}和G'_m中的k-部分因子之间存在一一对应关系，从而可以用R^{uk}来计算G_m的图行列式而不用Q^{uk}，因此，根据式(3.100)，得到所要求的展开式

$$\det G_m=(-1)^{n}+\sum_{v=0}^{n-1}\sum_{u}(-1)^{q_{uv}}f(R^{uv}) \qquad (3.101)$$

定理证毕。

下面的定理直接根据定理3.13得出，而且可以用类似于证明定理3.15的方式来证明，这里仅提出结论，而将细节留作练习(习题3.42)。

定理3.16. 设G'_m是n-节点MASON图的改进MASON图，如果Δ_{ij}是与G_m有关矩阵元素(i，j)的余子式，那么对于$i\neq j$，有

$$\Delta_{ij}=\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{i_2,\cdots,i_v}\sum_{u}(-1)^{q_{uv}+1}f(R^{uv}_{ij}), \qquad (3.102)$$

式中R^{uv}_{ij}是在$i=i_1$时为G'_m的第u个v-部分因子$R(i,j;i_2;\cdots;i_v)$，q_{uv}是R^{uv}_{ij}中的偶片数，而$\{i_1, i_2, \cdots, i_v\}$是$G'_m$的节点集合中含有节点$i=i_1$的子集。

应用以上结论来解线性代数方程组是简单明了的，而公式可以直接根据式(3.97)导出。

定理3.17. 如果方程组(3.16)的系数矩阵A是非奇异的，则对于k=1，2，…，n，方程组的解由下式给出：

$$x_k=\frac{\sum_{v=1}^{N}\sum_{1\le v}\sum_{u}(-1)^{q_{uk}}f(R_{sk}^{uv})}{(-1)^n+\sum_{\substack{x,y\\0<y\le n}}(-1)^{q_{xy}}f(R^{xy})}\tag{3.103}$$

式中$s=n+1$，R_{sk}^{uv}在$i_1=s$时是$G_m(A_u)$的第u个v部分因子R $(i_1k; i_2; \cdots; i_v)$，R^{xy}是$G_m(A)$的第x个y部分因子，$G'_m(A_u)$和$G'_m(A)$分别是MASON图$G_m(A_u)$和$G_m(A)$的改进MASON图，q_{sk}和q_m分别是R_{sk}^{uv}和R^{xy}的偶片数，而$\{i_1, i_2, \cdots, i_v\}$是$G'_m(A_u)$的节点集合中含有节点$s=i_1$的子集（$A_u$是在定理3.14中已定义）。

§ 4. 有向图子图的产生

以上所提出结论的有效性完全取决于从一有向图中产生某些子图例如1因子，1因子连接，部分因子和k-部分因子的效率。在这一节中，我们将提出产生这些子图的系统方法，以下所描述的方法非常适合于数值计算，为了简单起见，假定在这些节中所考虑的所有有向图没有并联边，但是，这里所得的结论都能很容易得到推广，这些推广的细节留作练习（习题3.50和3.51）。

设G是n-节点的有向图，在图中每个边都赋予边标识符号e_k或者e_j，所谓G的变元邻接矩阵，指的是这样一个n阶方阵：当且仅当在G中存在具有边标识符号e_k从节点i指向节点j的一条边，则第ij元素是e_k，否则此项是零，正如在§1中早已指出那样，如果我们把G理解为给定的COATFS图，那么G的伴随矩阵和变元邻接矩阵的转置相同，这里边标识符号认为是G的边权。

定理 3.18： 在一个n节点的无圈有向图中，对所有的$i\neq j$，从节点i到j的所有有向路径P_{ij}由$(U_n-D)^{-1}$的(i, j)元素来表示，此处U_n是n阶单位矩阵，而D是G的变元邻接矩阵。

证明：将G作为一个给定的MASON图，设G_c是与G相对应

的COATES图，如果A是G_c的伴随矩阵，而且如果$\triangle_{ij}$是A元素(i，j)的余子式，那么根据定理3.7和3.8有

$$\det A = (-1)^n \tag{3.104}$$

以及

$$\triangle_{ij} = (-1)^{n-1}\sum_k f(P^k_{ij}) \tag{3.105}$$

式中P^k_{ij}是在G中从节点i到j的第k条有向路径。由于A的转置矩阵A′是

$$A' = D - U_n \tag{3.106}$$

从而有

$$\frac{(-1)^{i+j}\det(U_n - D)_{ji}}{\det(U_n - D)} = \frac{(-1)^{i+j}\det(D - U_n)_{ji}}{\det(D - U_n)}$$

$$= \frac{\triangle_{ji}'}{\det A'} = \frac{\triangle_{ij}}{\det A} = -\sum_k f(P^k_{ij}) \tag{3.107}$$

式中$(D-U_n)_{ji}$是从$(D-U_n)$中划去第j行和第i列所得的矩阵。由于式(3.107)的左边是$(U_n-D)^{-1}$的第ij元素的负数，所以定理随之而得。

作为一个例子，考虑图3.32的有向图G，矩阵U_5-D由下式给出，

$$U_5 - D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -e_4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e_6 & 1 & e_7 & 0 \\ e_3 & -e_5 & 0 & 1 & e_2 \\ e_1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.108}$$

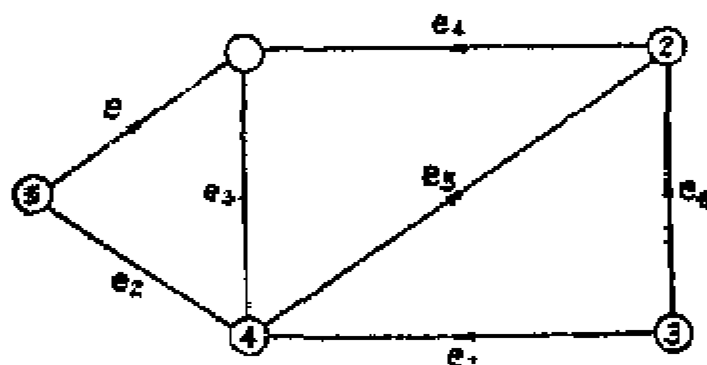


图 3.32　无圈有向图

在G中，所有从i到j的有向路径$P_{ij}(i\neq j)$的集合表示为$(U_5-D)^{-1}$的第ij非对角线元素，这由下式给出：

$$
\begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0\\
e_4 & 1 & 0 & 0 & 0\\
e_3e_7+e_1e_2e_7+e_4e_6+e_4e_5e_7 & e_6+e_5e_7 & 1 & e_7 & e_2e_7\\
e_4e_5+e_3+e_1e_2 & e_5 & 0 & 1 & e_2\\
e_1 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{bmatrix}
\tag{3.109}
$$

4.1 1-因子和1-因子连接的产生

对于一个给定的有向图G，设符号S_i^+和S_i^-分别用来表示以节点i作为起始节点和终止节点的边的边标识符的集合。

定理 3.19：对于一个n-节点的有向图G，从节点i到j的1-因子集合x和1-因子连接集合x_{ij}分别由下式表示

$$x=\left(\prod_{k=1}^{n}S_k^+\right)\cap\left(\prod_{t=1}^{n}S_t^-\right)\tag{3.110}$$

和

$$x_{ij}=\left(\prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n}S_k^+\right)\cap\left(\prod_{\substack{t=1\\t\neq i}}^{n}S_t^-\right)\tag{3.111}$$

式中乘积表示集合的笛卡尔乘积。

证明：不失一般性，对于G的每个节点i，假定$d^+(i)\neq0$和$d^-(i)\neq0$，由于$\prod_{k=1}^{n}S_k^+$的每个元素对应于一个G的生成子图，其中每个节点的出度都是1，而$\prod_{t=1}^{n}S_t^-$的每个元素对应于G的生成子图，其中每个节点的入度都是1，从而，只有G的1因子能出现在x中，这就完成了定理的第一部分的证明。

定理的第二部分直接从以下情况得出，即在G中从i到j的1-

因子连接的集合 X_{ij} 能从G′的1因子集合 X' 中，对 X' 的每一项简单地划去边(j, i)的边标识符 e_{ji} 得出。这里，G′是从G中首先移去所有边(j, u)和(u, i)(u=1, 2, …, n)，然后在所得的图中从节点j到节点i附加一条边 e_{ji} 而得到。由于在G′中有

$$X' = \left(\prod_{k=1}^{n} S'^{+}_{k}\right)\cap\left(\prod_{t=1}^{n} S'^{-}_{t}\right) \tag{3.112}$$

式中对于k=1, 2, …j−1, j+1…n，有

$$S'^{+}_{k} = S^{+}_{k} - \{e_{ki}\} \tag{3.113}$$

以及对于t=1, 2, …i−1, i+1, …, n，有

$$S'^{-}_{t} = S^{-}_{t} - \{e_{jt}\} \tag{3.114}$$

及 $S'^{+}_{j} = S'^{-}_{i} = \{e_{ji}\}$，此处 e_{ji} 是G中边(i, j)的边标识符，那么式(3.111)直接根据式(3.112)和以下关系式得出：

$$\{e_{ji}\}\times X_{ij} = X' \tag{3.115}$$

定理证毕。

对于MASON图，在定理3.7和3.8中所需要的那种类型的子图集合也可以通过利用类似于以上所述的方法得到，唯一的差别是对每一个集合必须加进一个单位元素，用符号 e_0 表示，这样对所有的i和j，有 $e_0e_{ij} = e_{ij}$。

考虑图3.33的有向图G，这与图3.1所示的相同，由于有

$$\prod_{k=1}^{5} S_k^{+} = \{e_5, e_{13}, e_1\}\times\{e_7, e_2\}\times\{e_6, e_8, e_{10}, e_{12}\}\times\{e_9\}\times \{e_3, e_4, e_{11}, e_{14}\}, \tag{3.116}$$

和

$$\prod_{t=1}^{5} S_t^{-} = \{e_1, e_4, e_{12}\}\times\{e_2, e_8\}\times\{e_7, e_9, e_{11}, e_{13}\}\times \{e_5, e_6, e_{14}\}\times\{e_3, e_{10}\}, \tag{3.117}$$

那么所得G的1因子集合X如下所示：

$$X_{??} = \{e_{1}\} \times \{e_{2}\} \times [(\{e_{1}, e_{5}\} \times \{e_{6}, e_{16}, e_{12}\} \times \{e_{3}, e_{4}, e_{11}\}) \cap (\{e_{1}, e_{4}, e_{12}\} \times \{e_{5}, e_{6}, e_{14}\} \times \{e_{3}, e_{13}\})]$$

$$= \{e_{2}e_{5}\} \times (\{e_{3}\} \times [(\{e_{1}, e_{5}\} \times \{e_{6}, e_{12}\}) \cap (\{e_{1}, e_{13}\} \times \{e_{6}, e_{5}\})] \cup \{e_{10}\} \times [\{e_{1}, e_{5}\} \times \{e_{1}, e_{14}\}) \cap (\{e_{1}, e_{4}\} \times \{e_{5}, e_{14}\})])$$

$$= \{e_{1}, e_{9}\} \times \{e_{1}e_{3}e_{6}, e_{3}e_{5}e_{12}, e_{1}e_{10}e_{14}, e_{5}e_{10}e_{4}\} \quad (3.118)$$

应当注意，在使用交运算之前，不完全展开笛卡儿乘积是有利的，同样，在进行用笛卡儿乘积形式表示的两集合的交运算中，如果所有在一个集合而不在另一个集合中的元素预先删去，则大量的工作量可以省去，如上面所用的另一种类型的删去法也可使用。类似，在G中从节点4到节点1的1因子连接的集合X_{41}由下式给出

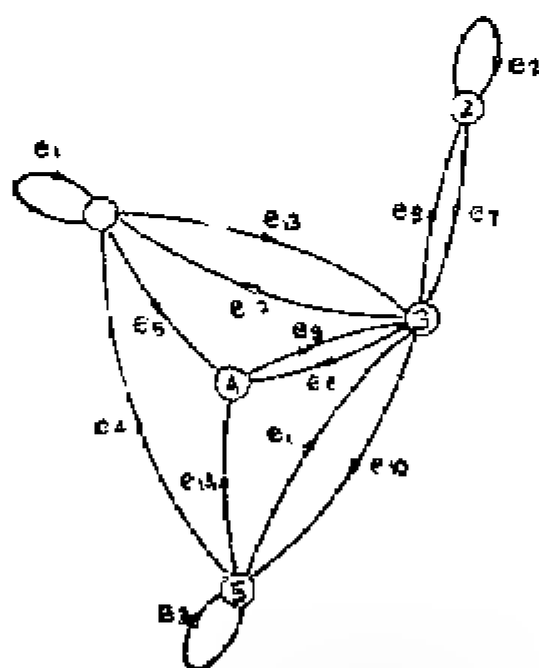


图 3.33 用来说明产生1因子和1因子连接的有向图

$$X_{41} = (\{e_{7}, e_{2}\} \times \{e_{8}, e_{5}, e_{10}, e_{11}\} \times \{e_{9}\} \times \{e_{1}, e_{4}, e_{11}, e_{14}\}) \cap (\{e_{1}, e_{4}, e_{12}\} \times \{e_{2}, e_{8}\} \times \{e_{7}, e_{9}, e_{1}, e_{13}\} \times \{e_{3}, e_{10}\})$$

$$= \{e_{9}\} \times [(\{e_{2}\} \times \{e_{8}, e_{10}, e_{12}\} \times \{e_{3}, e_{4}\}) \cap (\{e_{4}, e_{12}\} \times \{e_{2}, e_{8}\} \times \{e_{3}, e_{10}\})]$$

$$= \{e_{2}, e_{9}\} \times [(\{e_{10}, e_{12}\} \times \{e_{3}, e_{4}\}) \cap (\{e_{4}, e_{12}\} \times \{e_{3}, e_{10}\})]$$

$$= \{e_{2}e_{9}\} \times \{e_{3}e_{12}, e_{4}e_{10}\} \quad (3.119)$$

4.2 部分因子和k-部分因子的产生

在这一节中所介绍的方法是 Wang-代数公式的变型，由于 Wang 代数将在第五章§4.1中正式介绍，对于目前实际应用，我们仅仅阐明关于子图集合的 Wang 乘积运算。

对于一个有向图G，象在第一章§5.1中所定义的G的子图以及定义1.2是G的节点和边的子集，因此，G的子图可能含有孤立节点。另一方面，所定义的两子图集合的 Wang 乘积仅适合于那些不含有任何孤立节点的子图集合，在下面，我们都将假设这一点。

设 S_1 和 S_2 是G的两个子图的集合，子图中的每一个元素都用边标识符来表示，集合 S_1 和 S_2 的 Wang 乘积用符号 $S_1 @ S_2$ 来表示，它定义为

$$S_1 @ S_2 = \{w_1\} \oplus \{w_2\} \oplus \cdots \oplus \{w_\alpha\} \tag{3.120}$$

式中 α 表示集合 $W=\{w_i\}$ 中元素的数目，以及

$$W=\{g_1 \cup g_2,\ g_1 \text{在} S_1 \text{中},\ g_2 \text{在} S_2 \text{中},\ \text{而} g_1 \cap g_2 = \phi\}, \tag{3.121}$$

式中 ϕ 是G的空图，换言之，$S_1 @ S_2$ 是这样得到的，取两个边不相接子图（一个从 S_1 中，而另一个从 S_2 中）的并集，每一个集合仅含有一个元素，然后取所有集合的环和运算。

很容易表明，集合的 Wang 乘积运算符合互易律和结合律，运算的另外一些性质将在第五章§4.1中介绍，因此这里不再详细讨论。

有了以上的定义，我们可以产生G的部分因子和k-部分因子 $R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$ 的集合，以下所描述的方法是对产生"有向树"和"有向k-树"集合的改进方法（CHEN［1966 a］）。由于有向树和有向k-树将在第四章§5.1中详细讨论，在这里我们仅仅阐明结论，而将详细推导留在第四章§5.1之后。

如前所述，设 e_{ij} 是G的边(i, j)的边标识符，为了简单起见，我们不严格地说边 e_{ij} 而不说边(i, j)的边标识符 e_{ij}，再次设 S_i^- 表

示以节点 i 为终止节点的G的边集。

定理 3.20：在一个n-节点的对称有向图G中，设

$$Y = S_1 @ S_2^- @ \cdots @ S_n \tag{3.122 a}$$

$$Y(i_1; i_2; \cdots; i_{n-k}) = S_{i_1} @ S_{i_2} \cdots @ S_{i_{n-k}} \tag{3.122 b}$$

式中$i_1 i_2 \cdots i_{n-k}$和$j_1, j_2 \cdots j_k$是整数1、2、$\cdots$、n的集合的标志补集。只要边e_{ij}和e_{ji}在所有运算中认为是相同元素，那么G的部分因子集和k部分因子集$R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$（包括孤立节点集）分别由Y和$Y(i_1; i_2; \cdots; i_{n-k})$的最后展开式中的元素集表示。

如果G不是对称的，则总是有可能使它成为对称的。设G_s是从G中附加最小数的边给G而得到的对称有向图。为了使附加边能与G中已存在的相识别，用撇号“′”表示。例如，如果(i, j)是在G中，而(j, i)是在G_s中但不在G中，那么在G_s中，(i, j)用e_{ij}来标号，而(j, i)用e'_{ji}来标号。

对于一个任意的有向图G，假设其对应的对称有向图G_s的边已经按照刚才采用的规则标号，只要e_{ij}和e'_{ji}或e_{uv}和e'_{vu}在所有%运算中认为是相同的元素，那么G_s的部分因子和k部分因子的集合由定理3.20所概述的方法所得到，最后，在式(3.120)的最后展开式中，如果消去所有至少含有一个标有撇号“′”字母的这些元素，那么在展开式中所余下的元素就是所要求的部分因子和k部分因子。

我们用下面的例子来说明以上的方法。

例 3.10：考虑式(3.24)的系数矩阵A，它是与图3.6所示的反馈放大器有关的，$G_c(A)$的改进COATES图G'_c如图3.34所示。假定要求计算电流增益函数I_3/I_1，这同样也可用下式表示

$$I_3/I_1 = G_a \triangle_{13}/(\det A) \tag{3.123}$$

式中$\triangle_{13}$是A的元素(1,3)的余子式，这样，G'_c的部分因子集和1-部分因子集R(1)必须预先产生，根据定理3.20，它们分别由下式表示：

$$Y = \{e_{21}, e_{31}\} @ \{e_{12}, e_{22}, e_{32}\} @ \{e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$$

$$\{e_{21}e_{32}e_{33}, e_{31}e_{22}e_{33}, e_{21}e_{22}e_{23}, e_{21}e_{32}e_{13}, e_{31}e_{32}e_{33}$$
$$e_{31}e_{22}e_{33}, e_{31}e_{22}e_{23}, e_{31}e_{12}e_{33}\} \quad (3.124a)$$

$$Y(2;3) = \{e_{12}, e_{22}, e_{32}\} @ \{e_{13}, e_{23}, e_{33}\}$$
$$\{e_{12}e_{13}, e_{12}e_{23}, e_{12}e_{33}, e_{22}e_{13}, e_{22}e_{23}, e_{22}e_{33}, e_{32}e_{13}, e_{32}e_{33}\} \quad (3.124b)$$

所要求G_c'的1部分因子集R(13)是Y(2; 3)的子集，并由下式给出：

$$\{R(13)\} \quad \{e_{12}e_{13}, e_{12}e_{23}, e_{22}e_{33}, e_{32}e_{13}\} \quad (3.125)$$

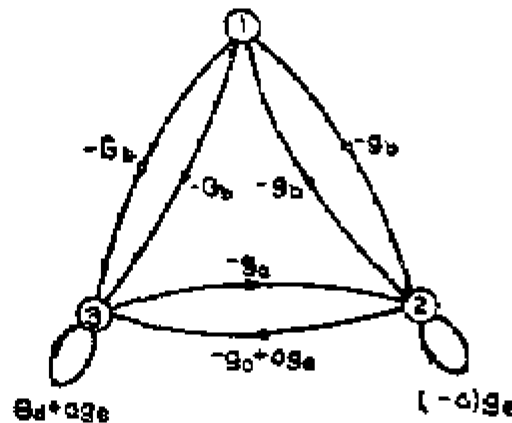


图 3.35 用来说明产生部分因子和1部分因子的有向图

那么放大器的增益函数由下式给出：

$$\frac{I_3}{I_1} = \frac{-G_d \sum_{R(13)} (-1)^{q_{13}} f(R(13))}{\sum_R (-1)^{q_R} f(R)}$$
$$= G_d[g_b G_b - g_a(g_e - ag_e) + (1-a)g_e G_b + g_e G_b]/\Delta \quad (3.126)$$

式中 $\Delta = (1-a)g_e[(G_d + g_c)(g_b + G_b) + g_b G_b] + (G_d + ag_e)[g_c(g_b + G_b) + g_b G_b]$

式中R(13)和R分别是G'_c的1-部分因子和部分因子，而q_{13}和q_R分别是R(13)和R中的偶片数，式(3.125)的增益函数当然与式

(3.25)给出的 COATES 图方法得出的结果相同，但是，这里对消项的数目显然是减少了。

§ 5. 特征值问题

在矩阵 A 特征方程的系数和 $G_c(A)$ 的某种类型子图之间的关系是由 CHEN[1967 a]和 PONSTEIN[1966]研究而提出的。对于一个矩阵的简化，利用图论的方法来求其特征值是由 HARARY [1959]研究提出的。在这一节中，我们概述这些结论，并且用更合适的形式来表示它们。

定理 3.21：设 G_c 是一个给定 n 阶矩阵 A 的伴随 COATES 图，那么有

$$\det(\lambda U_n - A) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n} \lambda^{n-k} \left[\sum_{G_c[V_k]} \sum_{u} (-1)^{L_h} f(h_{uk}) \right] \tag{3.127}$$

及对于 $i \neq j$ 有

$$(-1)^{i+j} \det(\lambda U_n - A)_{ij} = \sum_{k=2}^{n} \lambda^{n-k} \left[\sum_{G_c^{ij}[V_k]} \sum_{v} (-1)^{L_H} f(H_{ij}^{vk}) \right] \tag{3.128}$$

式中 h_{uk} 和 H_{ij}^{vk} 分别是 $G_c[V_k]$ 和 $G_c^{ij}[V_k]$ 中从节点 i 到 j 的第 u 个 1-因子和 v 个 1-因子连接，$G_c[V_k]$ 是 G_c 的 k 节点局部子图，而 $G_c^{ij}[V_k]$ 是 G_c 的 k 节点局部子图，其中节点 i 和 j 总是含于 $G_c^{ij}[V_k]$ 中，L_h 和 L_H 分别是 h_{uk} 和 H_{ij}^{vk} 的有向回路数，而 $(\lambda U_n - A)_{ij}$ 是从 $(\lambda U_n - A)$ 中划去第 i 行和第 j 列所得的矩阵。

证明：由于这些恒等式能够从类似于证明定理 3.7 和 3.8 所给的方式建立，我们仅证明式(3.127)，而将另一式留作练习(习题

3.17)。

设 G_c^α 是从 G_c 中对 G_c 的每个节点加过权为 $-\lambda$ 的自环而得的图。显然，G_c^α 是$(A-\lambda U_n)$的伴随 COATES 图。如果 $h_u^\alpha(n-x)$ 是含有$(n-x)$个权为 $-\lambda$ 的附加自环的 G_c^α 的第 u 个 1-因子，而且如果 $\theta_{u(n-x)}^\alpha$ 是从 $h_{u(n-x)}^\alpha$ 中将$(n-x)$个附加自环移去而得到的图，那么有

$$f(h^\alpha_{un}) = (-1)^n\lambda^n \tag{3.129a}$$

以及对于 $k=1, 2, \cdots, n$，有

$$f(h^\alpha_{u(n-k)}) = (-1)^{n-k} f(Q^\alpha_{u(n-k)})\lambda^{n-k} \tag{3.129 b}$$

根据定理 3.1 和引题 3.1，$h^\alpha_{u(n-x)}(x=0, 1, \cdots n)$与相应符号的全体恰好是$(A-\lambda U_n)$的行列式，因此有

$$\det(A-\lambda U_n) = (-1)^n\left[\lambda^n + \sum_{k=1}^{n}\sum_u (-1)^{L_u+n-k}\right.$$

$$\left.(-\lambda)^{n-k} f(Q^\alpha_{u(n-k)})\right] \tag{3.130 a}$$

或 $$\det(\lambda U_n - A) = \lambda^n + \sum_{k=1}^{n}\sum_u (-1)^{L_u} f(Q^\alpha_{u(n-k)})\lambda^{n-k} \tag{3.130 b}$$

式中 L_u 是 $Q^\alpha_{u(n-k)}$中的有向回路数。由于对于 G_c^α 中每个 $Q^\alpha_{u(n-x)}$的选择，在 G_c 的局部子图 $G_c[V_x]$中对应于一个唯一的 1-因子 h_{ux}，反之亦然，从而得出(λU_n-A)的行列式能够通过 $G_c[V_x]$的 1-因子 h_{ux} 而不是通过 G_c^α 的 1-因子 $h^\alpha_{u(n-x)}$求得，只不过以稍微不同的形式通过重新安排式(3.130 b)中的项，就得到所要求的结论式(3.127)。定理证毕。

特别是如果设 $\lambda=0$，式(3.127)和(3.128)分别简化为式(3.4)和(3.12)，在这意义上，这一定理可以看成为 COATES 图公式的推广、显然，如果 A 是任何 n 节点有向图的伴随变元邻接矩阵，则定理 3.21 仍然是成立的，唯一的差别是 $\det(\lambda U_n-A)_{ij}$ 应当由 $\det(\lambda U_n-A)_{ji}$ 来代替。

其次，我们来考虑稀疏矩阵的特征值，问题是如果可能的话，简化 A 为一些具有低价的矩阵，这样 A 的特征值集只不过是这些低价矩阵特征值的并集(包括相乘)。

定理 3.22，设 G_c 是矩阵 A(或者它的转置)的伴随 COATES 图，如果 G_c 不是强连通的，那么 A 的特征值集是对应于 G_c 的强连通分量的子矩阵的特征值集的并(包括相乘)。

证明：设 A 是 n 阶的，设 G^*_c 是 G_c 中对其每个节点加进权为 λ 的自环所得的有向图，显然 G^*_c 是(A－λU_n)的伴随 COATES 图，同样，设 $G_{cx}(x=1, 2, \cdots k)$ 是 G_c 的强连通片，不难看到，当且仅当 G_{cx} 是 G_c 的强连通片，在 G^*_c 中与 G_{cx} 相对应的局部子图 G^*_{cx} 是 G^*_c 的强连通片。因此，如果 A_{xx} 和 A^*_{xx} 分别是 G_{cx} 和 G^*_{cx} 的伴随矩阵，那么根据习题 3.36，由于 A_{xx} 和 A^*_{xx} 分别是与 G_c 和 G^*_c 的强连通片有关的子矩阵，有

$$\det G^*_c=\det(A-\lambda U_n)=(\det A^*_{11})(\det A^*_{22})\cdots(\det A^*_{kk}) \tag{3.131 a}$$

$$\det G_c=\det(A)=(\det A_{11})(\det A_{22})\cdots(\det A_{kk}) \tag{3.131 b}$$

但 A_{xx} 和 A^*_{xx} 的关系由下式表示：

$$A^*_{xx}=A_{xx}-\lambda U_p \tag{3.132}$$

式中 U_p 是相应阶的单位矩阵，把式(3.132)代入式(3.131 a)中，定理立即得出，这样定理证毕。

例 3.11：假定要求计算下列稀疏矩阵的特征方程和特征值，

$$
\mathbf{A} = \begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}
\begin{array}{cccccccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\
0 & 0 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\
5 & 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{array}
\quad (3.133)
$$

矩阵 A 转置的伴随 COATES 图如图 3.35 所示，所得的特征方程如下：

$$
\begin{aligned}
\det(\lambda U_{10} - \mathbf{A}) = {} & \lambda^{10} + (b_2 - a_{77})\lambda^9 + (b_3 - b_2 a_{77})\lambda^8 \\
& + (b_4 + b_0 - b_3 a_{77})\lambda^7 + (b_1 + b_0 b_2 - b_4 a_{77})\lambda^6 \\
& + (b_0 b_3 + b_1 b_2 - b_0 a_{77})\lambda^5 + (b_0 b_4 + b_1 b_3 \\
& \quad - b_1 b_2 a_{77})\lambda^4 \\
& + (b_0 b_1 + b_1 b_4 - b_1 b_3 a_{77})\lambda^3 + (b_0 b_1 b_2 \\
& \quad - b_1 b_4 a_{77})\lambda^2 \\
& + b_0 b_1 b_3 \lambda + b_0 b_1 b_4 \\
= {} & \lambda^{10} - \lambda^9 - 5\lambda^8 - 3\lambda^7 + 3\lambda^6 - 9\lambda^5 - 3\lambda^4 - 3\lambda^3 \\
& - 4\lambda^2 + 10\lambda + 8,
\end{aligned}
\quad (3.134)
$$

式中 a_{ij} 是 A 的元素(i, j)，而

$$
\begin{aligned}
b_0 &= a_{67} a_{7,10} a_{10,6} = 2 \\
b_1 &= a_{23} a_{38} a_{89} a_{92} = -1 \\
b_2 &= -(a_{44} + a_{55}) = 0 \\
b_3 &= a_{44} a_{55} - a_{45} a_{54} - a_{15} a_{51} - a_{14} a_{41} = -5 \\
b_4 &= a_{41} a_{15} a_{54} - a_{14} a_{45} a_{51} - a_{15} a_{51} a_{44} + a_{14} a_{41} a_{55} = 4
\end{aligned}
$$

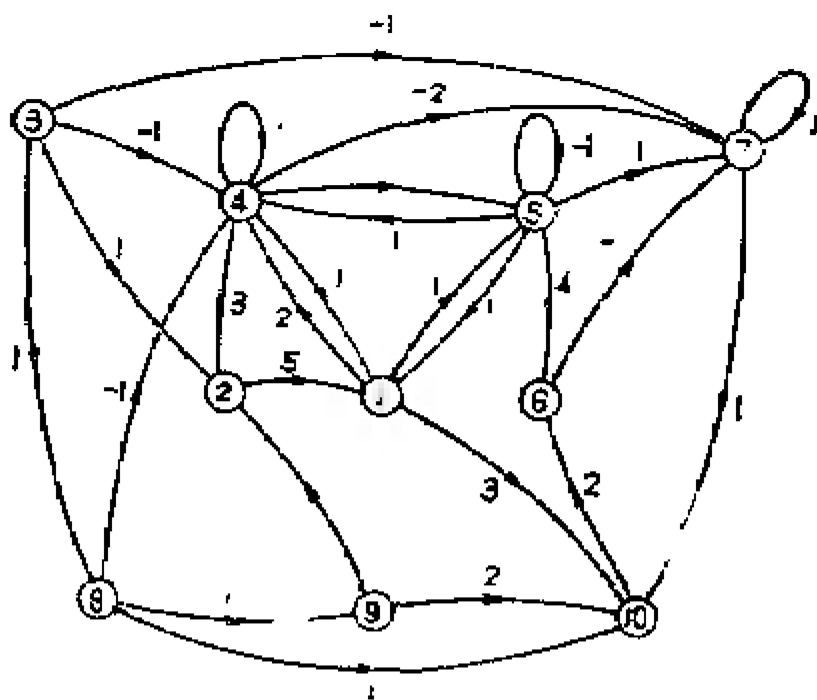


图 3.35　矩阵(3.133)转置的伴随COATES图

在 G_c 中，存在对应于局部子图 $G_c[2, 3, 8, 9]$，$G_c[6,7,10]$ 和 $G_c[1, 4, 5]$ 的三个强连通片，与这些片有关的矩阵 A_{11}，A_{22} 和 A_{33} 分别由下式给出，

$$A_{11}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.135 a}$$

$$A_{22}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.135b}$$

$$A_{33}\begin{bmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix} \tag{3.135c}$$

因此，A 的特征值集只不过是 A_{11}、A_{22} 和 A_{33} 特征值集的并。

在§ 1.1中，我们早已表示，$C(G_c)$ 可以从 A 矩阵的转置中通

过置每个非零元素为1而得，矩阵 $C(G_c)$ 也称为 G_c 的邻接矩阵。必须提出，$C(G_c)$ 的特征值不足以表征 G_c 在同构范围之内，换言之，存在两个非同构的有向图，其邻接矩阵具有相同的特征值（习题3.10）。但是，由穷举法表明，对于具有六个节点及其以下的对称有向图，反例不存在（例如，参见HARARY[1962a]）。对于有关的论述，参见MOWSHOWITZ[1972]。

§6. 矩阵求逆

由于逆矩阵中的每个元素是矩阵元素的余子式和其行列式之比，则应用有向图方法来求矩阵的逆是简单明了的，而且对工程应用上经常出现的以字母而不是以数值形式给出的大型稀疏矩阵特别有用。

早在§1.3和§2.3中，我们已对与线性代数方程组有关的COATES和MASON图定义了图传输系数。它们是以因变量和称为源节点的独立变量之比来定义的。在这一节中，我们把这种概念推广到与任何矩阵有关的COATES图和MASON图，然后表明怎样用于矩阵求逆。

设A是一个方阵，设 $G_c^i(A)$ 和 $G_m^i(A)$ 分别是从 $G_c(A)$ 和 $G_m(A)$ 得到的COATES图和MASON图：它们是对 $G_c(A)$ 和 $G_m(A)$ 附加一个源节附加一个源节点 x_0，然后在所得的图中从节点 x_0 到节点i加进一条传输量为 1的边得出的，有了这种 $G_c(A)$ 和 $G_m(A)$ 的简单变型，下面的推论是很明显的。

推论 3.13：设A是一非奇异矩阵，则A的逆矩阵的元素(i,j)仅仅是在 $G_c^i(A')$ 或 $G_m^i(A')$ 中从节点 x_0 到节点j的图传输系数，此处撇号"'"仍然表示矩阵的转置。

推论 3.14：设 $G_{c'}$ 和 $G_{m'}$ 分别是从 $G_c^i(A')$ 和 $G_m^i(A')$ 中通过式(3.28)和(3.69)中所概述的方法移去节点集 V_c 和 V_m 所得的简化COATES图和MASON图。如果源节点 x_0 不在 V_c 和 V_m 中，那

么 A 的逆矩阵元素(i, j)仅仅是 G_{cr} 或 G_{m} 中(对所有不在 V_c 或 V_m 中的 $j(\neq x_0)$)从节点 x_0 到节点 j 的图传输系数。

采用以上两种方法的结合同样是可能的，设 **A** 划分为如下形式：

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix}\mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12}\\ \mathbf{A}_{21} & \mathbf{A}_{22}\end{bmatrix}=[a_{ij}] \tag{3.136}$$

式中 $\mathbf{A}_{11}$ 是非奇异的 β 阶子矩阵，**A** 矩阵的逆由下式给出：

$$\mathbf{A}^{-1}=\begin{bmatrix}\mathbf{B}_{11} & \mathbf{B}_{12}\\ \mathbf{B}_{21} & \mathbf{B}_{22}\end{bmatrix}=[b_{ij}] \tag{3.137}$$

式中

$$\mathbf{B}_{11}=\mathbf{A}^{-1}_{11}+\mathbf{A}^{-1}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{-1}_{11} \tag{3.138 a}$$

$$\mathbf{B}_{12}=-\mathbf{A}^{-1}_{11}\mathbf{A}_{12}\mathbf{B}_{22} \tag{3.138 b}$$

$$\mathbf{B}_{21}=-\mathbf{B}_{22}\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{-1}_{11} \tag{3.138 c}$$

$$\mathbf{B}_{22}=(\mathbf{A}_{22}-\mathbf{A}_{21}\mathbf{A}^{-1}_{11}\mathbf{A}_{12})^{-1} \tag{3.138 d}$$

设 G_{cr} 是从 $G_c(\mathbf{A}')$ 中移去对应于子矩阵 $\mathbf{A}_{11}$ 的节点集 V_c 而得到简化 COATES 图，同样设 C_{ij} 和 W_{ij} 分别是 G_{cr} 和 $G_c(\mathbf{A}')$ 中边(i, j)的传输量。如果 G^*_c 是从 $G_c(\mathbf{A}')$ 得到的 COATES 图，这样对于都不在 V_c 中的 i 和 j，$W^*_{ij}=C_{ij}$，否则，$w^*_{ij}=w_{ij}$，此处 W^*_{ij} 是 G^*_c 中边(i、j)的传输量，那么在 B_{12} 或 B_{21} 中的元素可以在 G^*_c 中求得。

定理 3.23：对于在式(3.137)的 $\mathbf{B}_{12}$ 或 $\mathbf{B}_{21}$ 中的 b_{ij}，有

$$b_{ij}=(1/K)\sum_{H^*_{ij}}(-1)^{q^*_{ij}}f(H^*_{ij}) \tag{3.139}$$

式中 $K=\det \mathbf{A}$；H^*_{ij} 是 G^*_c 中从 i 到 j 的 1 因子连接，而 q^*_{ij} 是 H^*_{ij} 中的偶片数。

证明：有两种情况需要考虑：b_{ij} 在 $\mathbf{B}_{21}$ 中，以及 b_{ij} 在 $\mathbf{B}_{12}$ 中，由于证明是类似的，则这里只证明 b_{ij} 在 $\mathbf{B}_{21}$ 中的情况。

设 A 是 n 阶的，并且对于 u，v = 1,2，设

$$A_{uv} = [a_{ij}^{uv}] \qquad B_{uv} = [b_{ij}^{uv}] \tag{3.140}$$

式中下标 i 和 j 是元素的行和列标号，同样设 Δ_{ij}^{11} 和 Δ^{11} 分别是 A_{11} 的元素(i，j)的余子式和行列式，根据式(3.138 c)可以得到

$$b_{ij}^{21} = -\sum_{k_1,k_2} b_{ik_1}^{22} a_{k_1k_2}^{21} \Delta_{jk_2}^{11}/\Delta^{11} \tag{3.141}$$

式中 $k_1 = 1,2,\cdots,n-\beta$ 和 $k_2 = 1,2,\cdots\beta$。由于根据式(3.34)和(3.138 d)，G_c 是 $(B_{22})^{-1}$ 的转置的伴随 COATES 图，从而根据定理 3.1 和 3.2 得出

$$b_{ik_1}^{22} = \frac{\sum_{H'_{xy}} (-1)^{q'_H} f(H'_{xy})}{\det G_{cr}} \tag{3.142}$$

式中 $x = i+\beta, y = k_1+\beta$，而 H'_{xy} 是 G_{cr} 中从节点 x 到 y 的 1-因子连接，q'_H 是 H'_{xy} 中的偶片数。记住：G_{cr} 和 G_c^* 是从 A′而不是 A 的伴随 COATES 图中得到的有向图。同样，由于局部子图 $G_c[V_c]$ 是 $(A_{11})'$ 的伴随 COATES 图，从而根据定理 3.1 和 3.2 有

$$\frac{\Delta_{jk_2}^{11}}{\Delta^{11}} = \frac{\sum_{H_{k_2j}^{11}} (-1)^{q_H^{11}} f(H_{k_2j}^{11})}{\det A_{11}} \tag{3.143}$$

式中 $H_{k_2j}^{11}$ 是 $G_c[V_c]$ 中从 k_2 到 j 的 1-因子连接，而 q_H^{11} 是 $H_{k_2j}^{11}$ 中的偶片数。同样，在 G_c^* 中，与边 (yk_2) 有关的权是 a_{yk_2}，这也和 $a_{k_1k_2}^{21}$ 相同，

$$w_{yk_2}^* = a_{yk_2} = a_{k_1k_2}^{21} \tag{3.144}$$

将式(3.142)—(3.144)代入式(3.141)中，并且用下式：

$$K = \det A = \det A' = \det G_c(A') = (\det A_{11})(\det G_{cr}) \tag{3.145}$$

就得到所要求的结果式(3.139)。证明的最后部分的细节留作练习(习题 3.38)，定理证毕。

例 3.12：计算以下矩阵的逆

$$
A=\begin{bmatrix}
0 & 0 & 0 & 0 & b & k & 0\\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & f & 0\\
0 & 0 & 0 & j & 0 & 0 & d\\
0 & e & 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & c & i & 0 & 0 & 0\\
0 & 0 & 0 & g & 0 & h & 0\\
a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0
\end{bmatrix}
\tag{3.146}
$$

伴随 COATES 图 $G_c(A')$ 如图 3.36 所示，所得矩阵 A 的逆的元素 b_{ij} 如下：

$b_{62}=(ge)(abcd)/(abcdefg)=1/f$

$b_{42}=-(e)(h)(abcd)/(abcdefg)=-h/fg$

$b_{46}=(ef)(abcd)/(abcdefg)=1/g$

$b_{24}=(fg)(abcd)/(abcdefg)=1/e$

$b_{52}=(cdakge)/(abcdefg)=k/bf$

$b_{32}=(dabie)(h)/(abcdefg)=hi/cfg$

$b_{36}=(dabief)/(abcdefg)=i/cg$

$b_{76}=-(abcjef)/(abcdefg)=-j/dg$

$b_{17}=(bcd)(efg)/(abcdefg)=1/a$

$b_{51}=(cda)(efg)/(abcdefg)=1/b$

$b_{35}=(dab)(efg)/(abcdefg)=1/c$

$b_{73}=(abc)(efg)/(abcdefg)=1/d$

而所有其它元素均为零。

在许多情况下，矩阵A可以通过同时交换A的行和列而处于式(3.47)的形式。如果这种情况能达到，那么式(3.138)中所给出的求逆公式可以大大的简化，换言之，这一问题等同于求置换矩阵P、使 PAP^{-1} 以块三角形式划分，下面我们描述这样的一种方法，这也是由 HARARY[1962 b]所研究的。

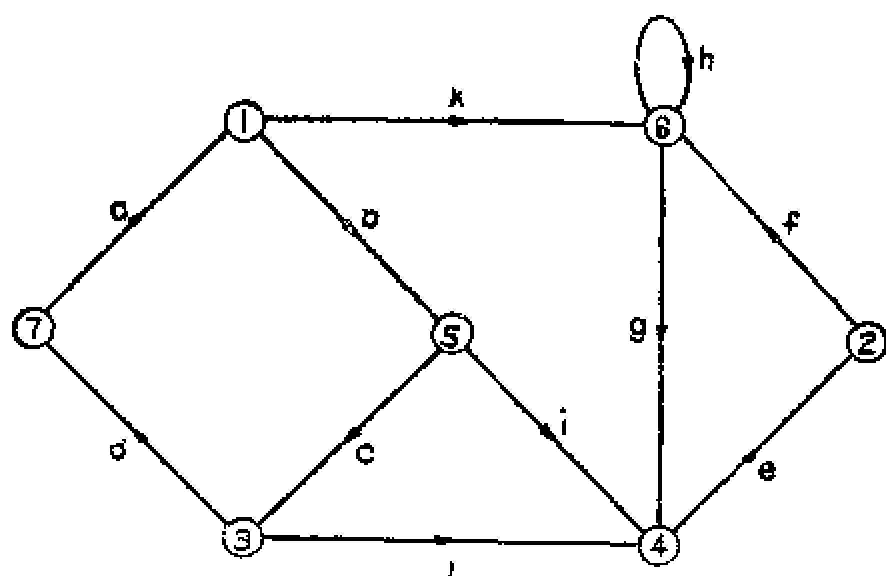


图 3.36 说明伴随矩阵求逆的COATES图

可以表明：当且仅当 A 的伴随 COATES 图 $G_c(A')$ 或 $G_c(A)$ 是不强连通的，A 才具有刚才描述的性质(参见习题 3.35)。假定 $G_c(A')$ 是不强连通的，我们对 $G_c(A')$ 的节点重新标号，使在任何强连通片中的节点以连续的顺序标号，那么置换矩阵 P 能容易地从单位矩阵仅仅交换对应于节点新旧标号的列而得到。作为一个例子，考虑下面的矩阵

$$
\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 11 & 0 & 3 & 4 & 11 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 5 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \tag{3.147}
$$

伴随 COATES 图 $G_c(A')$ 如图 3.37 所示，下面的表表示了根据以上规则重新对 $G_c(A')$ 节点标号的一种可能方法：

旧标号	1	2	3	4	5	6
新标号	2	4	6	3	1	5

根据这张表，置换矩阵 P 可以从 6 阶的单位矩阵 U_6 中分别移动U_6

的列2，4，6，3，1和5到新位置1，2，3，4，5和6而得到。因此，由置换A得到块三角形式的矩阵P由下式给出，

$$
\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (3.148)
$$

由于P的转置等于它的逆（习题3.59），利用$G_c(\mathbf{A}')$的强连通片，$\mathbf{PAP}^{-1}$的划分可以很容易地得到，而由下列给出

$$
\mathbf{PAP}^{-1}=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 3 & -1 & 2 & 1 & 0 \\ 11 & 11 & -4 & 0 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & -1 & 5 & 2 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \qquad (3.149)
$$

利用式(3.138)中给出的公式，$\mathbf{PAP}^{-1}$的逆由下式给出

$$
(\mathbf{PAP}^{-1})^{-1}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & 3 & 8 \\ 3 & 1 & 1 & 11 & 18 & 49 \\ 11 & 3 & 0 & 22 & 42 & 115 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -3 \end{bmatrix}, \qquad (3.150)
$$

由此，A的逆为

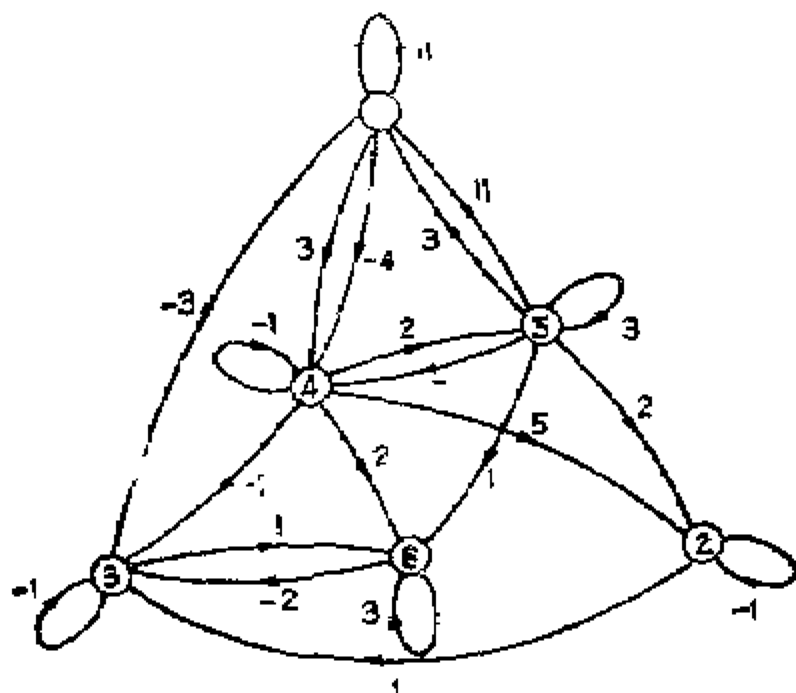


图 3.37 矩阵(3.147)转置的伴随COATES图

$$\mathbf{A}^{-1}=\mathbf{P}^{-1}(\mathbf{PAP}^{-1})^{-1}\mathbf{P}=\begin{bmatrix} 1 & 11 & 49 & 1 & 3 & -18 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 22 & 115 & 0 & 11 & -42 \\ 0 & 3 & -8 & -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}。\tag{3.151}$$

注意：如果$G_c(A')$已经是强连通的，那么，这 方法就无能为力。同样，有多少零元素关系不大，重要的是它们的关键性位置。

§7. 结 束 语

在这一章中，我们已经讨论了行列式与余子式和伴随有向图中对应子图之间的基本关系，同时也介绍了应用这些技术来解线性代数方程组，计算矩阵的特征值和特征方程，以及矩阵求逆。

有向图法提供了另一种观点，它补充和加强了更为熟悉的传统方法，由于这种方法不仅以非常直观的方式显示了矩阵元素之间的因果关系，而且深入了解由这样矩阵所描述的系统的性质，它广泛用于作为分析工程问题的工具。对于工程问题中经常出现的以字母而不是以数值形式给出元素的大型稀疏矩阵来说，这种方法特别有用。

我们已经介绍了产生1因子，1-因子连接部分因子和k-部分因子的方法，这种方法的主要优点在于一旦所要求的一组集合（这可以容易地凭观察得出）从给定的有向图中导出，那么所剩下的计算都是代数运算，人们不必回到原来的去检查所产生的项是否形成所要求的子图。但是重复项必定存在，因而不是非常有效的。

习　题

3.1．在COATES图中，设某些边(i,j)用并联边$(i,j)_x$ $(x=1,2,\cdots,K_{ij})$来替换，因而式(3.52)成立，试证明定理3.1，3.2和3.3在所产生的Coates图中仍然成立。把推论3.2和3.3推广使包括这种情况。

3.2．对于Mason图，重复习题3.1。

3.3．证明推论3.1。

3.4．证明对于具有P个不同有向回路L_i $(i=1,2,\cdots,p)$的Mason图，如果约定去掉含有非节点不相接有向回路所形成的权乘积项，则公式(3.53)可以写为

$$(-1)^n \det A=[1-f(L_1)][1-f(L_2)]\cdots[1-f(L_p)] \tag{3.152}$$

3.5．证明式(3.28)中项c_{ij} $(i\neq j)$实际上是局部子图$G_c^{ij}[V_c^{ij}]$中从节点i到节点j的图传输量，以及c_{ii}是$G_c^{i}[V_c^{i}]$中从节点i'到节点i''的图传输量，这里$G_c^{ij}[V_c^{ij}]$和$G_c^{i}[V_c^{i}]$分别是从$G_c[V_c^{ij}]$和$G_c[V_c^{i}]$中得到的Coates图，并在§1.4

(A)中给出定义。

3.6. 证明定理3.11(提示：仿照证明定理3.5所用的方法)。

3.7. 如果G_m是与线性方程组有关的Mason图，证明只要对终止于节点X_k的每条边的传输系数乘上因子$1/(1-W_{kk})$，就可以移去节点X_k上传输系数$W_{kk}\neq 1$的自环。

3.8. 如果G_c是与线性方程组有关的Coates图，证明只要对终止于节点X_k的每条边的传输系数除以W_{kk}，就可以简化在节点X_k的自环传输系数W_{kk}为1。

3.9. 对Mason图中的有向路径和有向回路证明在§2.4(c)中所述的变换规则。

3.10. 不先列写出节点方程式，而直接由观察网络结构作出与线性网络的节点方程组有关的Coates图和Mason图，试对比给出简单的规则。

3.11. 对网络的回路方程组，重复习题3.10。

3.12. 如习题3.1，如果对改进Coates图的某些边用并联边替换，使得式(3.52)成立，证明在所产生的图中定理3.12,3.13和3.14仍然成立。

3.13. 对改进Mason图的3.15，3.16和3.17，重复习题3.12。

3.14. 对于没有互感的一般梯型网络，重复习题3.10。

3.15. Coates图G_C的k因子连接$H_{\alpha\cdot\beta}$(这里，α和β是含有相同元素数目的G_C节点集的不相接子集)是G_C的子图，它包含：(1) 一组k个从α中的i到β中的j的节点不相接有向路径p_{ij}，这里k是在α或β中的元素数目。(2) 一组节点不相接有向回路，它包含G_C的所有节点，但包含在(1)中的除外。如果P是k个这样的有向路径$P_{i_x j_x}$($x=1, 2, \cdots, k$)的集合，以及在$H_{\alpha\cdot\beta}$中，对于$y=1, 2, \cdots, K-1$，有$i_y < i_{y+1}$，则阵列$j_1 j_2 \cdots j_k$称为由P规定的j的整数的可达排列，证明如果$A_{\alpha\cdot\beta}$是从G_C的伴随矩阵A中分别划去含α和β的行和列所得的矩阵，则

$$(-1)^{s}\det A_{\alpha,\beta}=\sum_{H_{\alpha,\beta}}(-1)^{q+\theta}f(H_{\alpha,\beta}) \tag{3.153}$$

式中 s 是包含在集合 α 和 β 中的行和列的标号之和，q 是 $H_{\alpha,\beta}$ 中的偶片数，而 θ 是由 β 规定的 β 中整数在可达排列 β' 中的逆序数。

3.16. 把 k 因子连接的定义推广到包括 $\alpha\cap\beta$ 不是空集的情况，从而改进式(3.153)(CHEN[1965 a])。

3.17. 导出公式(3.128)。

3.18. 对于 $i\neq j$，导出类似于式(3.128)的公式。

3.19. 给出一个例子来表明两个非同构的有向图对于它们的邻接矩阵具有相同的特征值。

3.20. 用一对方向相反的有向边代替每条无向边，利用这种方法，任何无向图可以变换为有向图，借助这一点来证明四面体、六面体和八面体的邻接矩阵的行列式值分别是 −3、9 和 0 (PÓLYA and SZEGÖ[1945])。

3.21. 对于对称的 Coates 图，简化公式(3.127)和(3.128)，其中对于所有的 i 和 j，有 $f(i,j)=f(j,i)$。

3.22. 设 A 是对称 Coates 图 G_c 的伴随矩阵，其中对于所有的 i 和 j，有 $f(i,j)=f(j,i)=y_{ij}$，设 G_{cu} 是从 G_c 中得到的无向图，使得当且仅当 (i,j) 和 (j,i) 都在 G_c 中时，则在 G_{cu} 中 i 和 j 之间存在一条边。此外，设与 G_{cu} 的边 (i,j) 有关的权是 y_{ij}。所谓 G_{cu} 的线性子图指的是生成子图，它的片或者是 G_{cu} 的边或者是 G_{cu} 的回路。证明定理 3.1 可以简化如下：

$$\det A=\sum_{i}(-1)^{q_1+q_2}2^{q_3}f(E_i)f(L_i) \tag{3.154}$$

式中 G_i 是 G_{cu} 的线性子图，E_i 和 L_i 分别是由全部单独边和回路组成的 G_i 的子图，q_1、q_2 和 q_3 分别是 E_i 中的边数，L_i 中的偶分量数和 L_i 中长度大于 2 的回路数，而求和是在 G_{cu} 中取遍所有可能的 G_i(HARARY[1962 a])。

3.23. 对于 A 的元素的余子式，重复习题 3.22。

3.24. 证明在习题 3.22 中所定义的对称 Coates 图伴随矩阵的行列式等于

$$\sum_{i}^{k}(-1)^{q-q_i}\cdot 2^{q_i} \tag{3.155}$$

式中 k 是 G_{cu} 的线性子图数

3.25. 对于对称有向图，重复习题 3.19。

3.26. 设 G_{cr} 是对习题 3.15 所讨论的 Coates 图移去节点集 V_c 所得的简化 Coates 图。如果 α 和 β 都在 $V-V_c$ 中，这里 V 是 G_c 的节点集，证明在 G_c 中求得的子式 $\det A_{\alpha,\beta}$ 等于 G_{cr} 中求得的对应子式的 k_c 倍，这里 $k_c=\det G_c V_c$。

3.27. 应用习题 3.15 和 3.26 的结论，证明 A 的行列式和它的一个子式之此，或者它的两个子式之比在 G_c 和 G_{cr} 中对于在 $V-V_c$ 中所有的 α 和 β 都是相同的。

3.28. 对于 Coates 图 G_c，存在如二分图 B_c 那样的等效表示式：对于 G_c 的节点集，可以构成与 V 处于一一对应关系的 V'。当且仅当在 G_c 中存在一条边 (i,j)，则（无向）边 (i,j') 或 (j',i)（连接在节点 i 和 j' 之间，这里 i 在 V 中，而 j' 在 V' 中）是在 B_c 中，使得 $f(i,j')$ 或 $f(j'i)=f(i,j)$。证明当且仅当在 B_c 中 h_n 的对应子图 h'_n 是度为 n 的正则子图（称为 n 因子）(CHEN [1965 c])。

3.29. 在习题 3.28 中，证明当且仅当在 B_c 中 n_2 的对应子图 h'_2 是包括 B_c 所有节点的节点不相接回路的集合，G_c 的生成子图 h_2 是 G_c 的 2-因子。

3.30. 有向二分图 B_d 是边为有向的二分图，设

$$A=[a_{ij}]_{n\times p} \text{ 和 } C=[c_{ij}]_{p\times n},\quad p\geq n \tag{3.156}$$

是两个给定的矩阵，以及 B_d 是伴随有向二分图，其中如果 V_t

和 V_2 是 B_d 的节点集，则

1. V_1 具有 n 个节点，V_2 具有 p 个节点，
2. 当且仅当 $a_{ij}\neq 0$，在 B_d 中存在具有 $f(i, j)=a_{ij}$ 的有向边 (i, j)，这里 i 在 V_1 中，而 j 在 V_2 中；
3. 当且仅当 $c_{ij}\neq 0$，在 B_d 中存在具有 $f(i, j)=c_{ij}$ 的有向边 (i,j)，这里 i 在 V_2 中，而 j 在 V_1 中。

证明

$$\det AC=(-1)^n\sum_{h_d}(-1)^L f(h_d) \qquad (3.157)$$

式中 h_d 是由含有V_1的所有节点的B_d的节点不相接有向回路集合所组成的子图，而 L 是 h_d 中有向回路数 (CHEN [1965 c])。

3.31. 在习题 3.30 中，证明如果 p=n 则

$$\det AC=(-1)^n\sum_{h}(-1)^{L_h}f(h) \qquad (3.158)$$

式中 h 是 B_d 的 1-因子，而 L_h 是h中的有向回路数。

3.32. 利用 Coates 图和 Mason 图技术来计算式 (3.133) 中给出的矩阵的行列式及其元素(3.1)的余子式。

3.33. 重复习题 3.32，但是首先移去节点 6，7，和 10。

3.34. 利用(a)Cramer 法则，(b)Coates图技术、(c)Mason图技术，以及(d)采用简化和变换 coates 图和 Mason 图的步骤，对下列线性方程组

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & a_{24} \\ a_{31} & 0 & a_{33} & 0 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} b_1 \\ 0 \\ b_3 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (3.159)$$

求解 x_3 和 x_4。

3.35. 在矩阵理论中，如果由同时交换行和列，矩阵 A 能变换为式(3.47)的形式，则称为矩阵 A是可约的，否则 A是不可约的。如果 A_{12} 和 A_{21} 都是零，则称 A 是可分解的，否则A

是不可分解的。证明当且仅当 A 的伴随 coates 图 Gc(A)是强连通，矩阵 A 是不可约的；而当且仅当 Gc (A) 是连通的，则 A 是不可分解的(HARARY[1962 b])。

3.36 证明与 coates 图 Gc(A)的强连通片相联系的矩阵行列式的乘积等于 detA。

3.37 证明推论 3.13 和 3.14。

3.38 给出定理 3.23 详细的证明。

3.39 根据伴随柯特图 Gc(A)，把式(3.146)的矩阵 A 划分为三角形式的块。

3.40 设 Gc 是式(3.16)的线性方程组的伴随 coates 图，即 Gc = Gc(Au)，并设 Gc* 是从 Gc 中得到的 coates 图，使对于 Gc* 的每一边(i, j)，有

$$f(i, j) = 0 \qquad i < j \tag{3.160 a}$$

以及

$$f(i, j) = \frac{\sum_{H_{ij}^*} (-1)^{L_H^* + 1} f(H_{ij}^*)}{\sum_{h^*} (-1)^{L_h^*} f(h^*)}, \quad i > j \tag{3.160b}$$

式中 H_{ij}^* 是局部子图 $Gc[V_{ji}]$ 中从 i 到 j 的 1 因子连接，V_{ji} 是节点1,2,···j 和 i 的并集，h* 是 $Gc[V_j]$中的 1-因子，而 L_H^* 和 L_h^* 分别是 H_{ij}^* 和 h* 的有向回路数。改进 $Gc[V_{ji}]$，使式(3.160b)可以表述为改进图中的图传输量。如果与局部子图 $Gc[V_{ji}]$ 相伴随的距阵行列式是非零，证明式(3.16)的解由下式给出：

$$x_k = \sum_{p_{sk}} (-1)^{b_p} f(p_{sk}) \qquad k = 1, 2, \cdots, n \tag{3.161}$$

式中 $s = n+1$，P_{sk} 是 G_c^*中从节点 s 到 k 的有向路径，而 bp 是 P_{sk} 中的边数(提示：应用式(3.22)以及 Gaussian 消去去)。

3.41 应用式(3.161)，解下列线性方程组，

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 5 \\ 3 \end{bmatrix} \quad (3.162)$$

3.42 证明定理 3.16(提示：根据定理 3.15 的证明)。

3.43 将 Mason 图中节点上的自环对通过该节点的路径传输数的作用作一简单的物理解释。如果自环(i,i)传输系数的绝对值小于1，证明自环(i,i)对从节点 i 流出信号的作用等同于改变每个出度边的信号为无限多个信号之积，这些信号在继续前进之前围绕自环作零次，一次，两次，…循环(提示：将 $1-w_{ii}$ 的倒数展开为无穷几何级数)。

3.44 通过添加一个额外节点 x'_k 于 Mason 图 Gm，然后从节点 x_k 到节点 x'_k 添加一传输系数为 1 的边，证明 Gm 中从源节点 x_0 到 x_k 的图传输量与在新的 Mason 图 G_m^* 中从 x_0 到 x_k 的相同。如果在 G_m^* 中所有边的方向都反过来，证明在所产生的图中从 x'_k 到 x_0 的图传输量与在 G_m^* 中从 x_0 到 x_k 的相同。

3.45 如果所有的自环均删去，并对每一删去自环的节点将该节点上自环的权赋予该节点，修改 coates 图和 Mason 图的拓扑公式。

3.46 证明定理 3.9(提示：根据定理 3.3 的证明)。

3.47 证明推论 3.7。

3.48 证明下面在 coates 图中移去一个节点的方法是正确的。设 k 是带有传输系数 w_{kk} 的自环的节点。用 $-w_{kk}$ 除所有终止于节点 k 的边的传输系数，然后象在 Mason 图中那样移去节点 k，在所产生的 coates 图中，图的传输量不变。

3.49 设 Gc 是与式(3.16)方程组相伴随的coates图，如果Gc在其每一个节点上都具有一传输系数为 w_{kk} 的自环，证明如果所有终止于每个非源节点 k 的边传输系数除以 w_{kk}，然后移去自

环，所产生的图是与式(3.16)相等同的方程组伴随的 Mason 图。

3.50 推广定理 3.18 和 3.19 到含有并联边的有向图。

3.51 推广定理 3.20 到含有并联边的对称有向图，以及推广到任何有向图。

3.52 证明推论 3.3。

3.53 证明推论 3.8 和 3.9。

3.54 如果存在零逆差节点集的非空真子集 Vc，给出分解 coates 图 Gc 为片的类似于式(3.48)的方法。

3.55 对于 i j，导出类似于式(3.43)或(3.44)的公式。

3.56 求式(3.133)矩阵 A 的特征值。

3.57 证明引理 3.1。

3.58 对于 i -j，导出类似于式(3.76)的恒等式。

3.59 证明置换矩阵的逆等于其转置。

3.60 考虑推论 3.2 的矩阵 C(Gc)，证明 C(Gc) 的恒式等于其行列式，当且仅当在 Gc 的每个 1 因子中偶片数是偶数，对于 C(Gc) 中元素的余子式，给出类似的论证。

3.61 在习题 3.60 中，证明 C(Gc) 的恒式等于其行列式，当且仅当(1)在 Gc 的每个强连通片之内，1-因子偶片的数目必定都是偶数或奇数，以及至少含有一个具有偶片为奇数的 1-因子的强连通片，它们的数目是偶数。此外，证明对于具有非负元的任何实矩阵，叙述同样有效。这种叙述对任何实矩阵有效吗？如果不，给出一个反例。

3.62 证明矩阵的恒式具有下列性质：

(a) 恒式是行和列的多线性函数；

(b) 矩阵的恒式等于其转置的恒式；

(c) 如果 P_1 和 P_2 是相应阶的置换矩阵，则

$$\text{per}P_1AP_2 = \text{per}A \tag{3.163 a}$$

(d) 如果 D_1 和 D_2 是相应阶的对角线矩阵，则

$$\mathrm{per}D_1AD_2 = (\mathrm{per}D_1)(\mathrm{per}A)(\mathrm{per}D_2) \qquad (3.163\,b)$$

3·63 假定一 n-节点 coates 图 Gc(A)的所有有向回路其长度都为偶数. 证明如果 n 是奇数，则矩阵 A 是奇异的，而对于所有 n，如果 λ 是 A 的特征值，则 $-\lambda$ 也是 A 的特征值。

3.64 设 Gc 是一对称coates图，它是度为 k 的正则图且没有并联边和自环. 假定 Gc 的所有传输系数都是 1，证明对于 $k=2$，3 和 7，存在唯一的一个具有 (k^2+1) 个节点的 coates 图 Gc(在同构范围之内)。

3.65 在习题 3.64 中，设 A 是 Gc 的伴随矩阵，证明对于 $k=2$，3 和 7，A 满足以下方程式：

$$A^2 + A - (k-1)U_n = E \qquad (3.164)$$

式中 E 是元全为 1 的 n 阶矩阵，而 n 是 Gc 的节点数。

第四章 线性系统的拓扑分析法

在第三章中已经表明怎样通过考虑伴随COATES图或MASON图来得到联立线性代数方程组的解。但是正如在第三章§3中所提到的，对于求系统的行列式和余子式来说，由于大量对消项的存在，所以导出的公式并非特别有效。因此，它们象主元或高斯消去法那样的传统分析方法具有同样的缺点。另一方面，在处理工程问题上经常出现的以字母而不是数值形式给出元素的大型稀疏矩阵中，由于有必要经常计算符号系统函数，有向图方法提供了一种有效的解法。

本章中主要涉及称为节点导纳矩阵的特殊类型的系统矩阵。在分析如第二章中所讨论的那种电网络中，使用节点方程系时，这类矩阵就产生了。在这一章中所提出的方法与前一章中所提出的改进COATES图相类似，但是它采用一种更加方便的形式。虽然这些矩阵与电网络理论紧密相关，但是它们的应用同样可以推广到其它系统。例如，就系统方程式来说，在线性集总机械系统和电系统之间存在完全相似之处，对于这些相似之处的详细讨论，读者可以参考GARDNER and BARNES[1945]。由于这类矩阵的特殊点，它们的行列式不难求得。本章的主要目的是为通过观察系统图或者它的伴随有向图直接写出某类函数(驱动点函数和转移函数)提供公式，而不必展开各种行列式和余子式，这类公式称为系统的拓扑公式。在第二章§6.3中，已经对RLC二端口网络提供了拓扑公式，线性系统的拓扑分析的流行和有效的原因是它不仅以直观的方式显示了系统变量之间的因果关系，而且因为在求系统行列式和余子式中避免了通常的对消项，所以为求系统函数提供了捷径。例如，BRYANT[1959 a, b, and c]在研究电网络复杂度的阶中相当有效地应

用了这类公式。主要是由于这种情况，所以在工程师方面，特别是电路理论家，近来对拓扑概念又特别感兴趣。

象在本书中所讨论的其他许多问题一样，拓扑公式的基本概念并不是新的，一个多世纪以前，KIRCHHOFF[1847]叙述了回路方程系的基本公式。大概四十年以后，MAXWELL[1892]考察了KIRCHHOFF规则而提出了节点方程系的基本公式。虽然这些规则基本上是正确的，但它们还远未完善，采用了某些近代代数的方法后，FRANLIN[1925]给出了KIRCHHOFF阻抗定律的证明，在Franklin之后，KU[1952]对MAXWELL规则给出了有用的解释，为这一理论作出了贡献。所有这些公式都是对电阻网络而言的。显然，它们也可以适用于普通的RLC网络，但是，公式推广到有源网络还是比较迟的(PERCIVAL[1955])。

在这一章中，将在节点导纳矩阵的行列式及其元素的余子式的展开式和系统的伴随有向图中某种类型的子图之间提出基本关系，然后应用这些结论来求系统函数，整个推导主要是根据MASON[1957]和CHEN[1965d，1967b]的研究工作而得出的。

§1. 等代数余子式矩阵

在线性系统分析中，存在一种称为等代数余子式矩阵的某类矩阵，它们所有的(一阶)代数余子式全相等。在这一节中，首先研究等代数余子式矩阵的某些基本性质，然后陈述与二阶代数余子式的关系。

对于一个方阵A，用A_{ij}表示从A中划去第i行和第j列的子矩阵，并称A_{ij}为A的元素(i，j)的余子式，换言之，$A_{ij}=(-1)^{i+j}\det A_{ij}$，在本章始终都使用这些符号。

定义 4.1：等代数余子式矩阵。

一个方阵只要它具有每行和每列的元素之和都为零的性质，就

称为等代数余子式矩阵。

例如，线性电网络的不定导纳矩阵是一个等代数余子式矩阵，这个性质是 KIRCHHOFF 电流定律的直接结果，并与这样的事实相联系，对于所有节点电位改变同一量值，这些电流不变。

引理 4.1：如果 A 是具有每行元素之和为零性质的方阵，那么 A 的每行元素的余子式都相等。

证明：设 $A=[a_{ij}]$为一 n 阶矩阵，对于所有的 i，x 和 y，我们将证明

$$A_{ix}=A_{iy} \tag{4.1}$$

不失一般性，假定 $x>y$，由于$\sum_{k=1}^{n} a_{jk}=0 (j=1,2,\cdots n)$ 可以用下式替换 A_{ix} 中的元素 $a_{jy} (j=1,2,\cdots n)$，

$$-\sum_{\substack{k=1\\k\neq y}}^{n} a_{jk} \tag{4.2}$$

而不改变 A_{ix} 的值，由此得到的子矩阵由 A'_{ix} 来表示。于是把所有 A'_{ix} 的列加到 A'_{ix} 的列 y 上，如果 $y\neq x-1$，然后移动列 y 到列 $x-1$ 的右边，由此得到 $\det A''_{ix}$ 等于$(-1)^{x-y-1}(-1)M_{iy}$，此处 M_{ij} 是从 A 中删去第 i 行和 j 列所得 A的子式，因此，

$$A_{ix}=(-1)^{i+x}(-1)^{x-y-1}(-1)M_{iy}=A_{iy} \tag{4.3}$$

引理证毕。

定理 4.1：如果 A 是一个等代数余子式矩阵，那么 A 的所有元素的余子式都相等（同样参见习题 4.69）。

证明：由于A是一个等代数余子式矩阵，根据引理 4.1 得出，对所有的 i，x 和 y，有 $A_{ix}=A_{iy}$。其次考虑 A 的转置 A'，由于A'是一个等代数余子式矩阵，从而对所有的 i，x 和 y，有 $A_{xi}=A_{yi}$，因此对所有的 i,j,x 和 y，有 $A_{ij}=A_{xy}$，定理证毕。

作为一个例子，考虑下面的矩阵，它是称为 MILLER 积分器的放大器的不定导纳矩阵：

$$
\mathbf{A} \quad \begin{vmatrix} G_1 & G_1 & 0 & 0 \\ -G_1 & G_1 \quad y_c & y_c & 0 \\ 0 & g_m \quad y_c & G_2 + y_c & (g_m + G_2) \\ 0 & -g_m & -G_2 & g_m + G_2 \end{vmatrix} \tag{4.4}
$$

很容易检验，矩阵 A 是等代数余子式矩阵，因此，其所有的余子式都相等，为了说明起见，计算一下 A 的元素 a_{44} 和 a_{41} 的余子式：

$$
\begin{aligned} A_{44} \quad & (\quad 1)^{4+4}[G_1(G_1 + y_c)(G_2 \quad y_c) \\ & + y_c(g_m - y_c)G_1 - G_1G_1(G_2 \quad y_c) \quad G_1y_c(G_2 \quad y_m) \end{aligned} \tag{4.5}
$$

$$
A_{41} \quad (\quad 1)^{4+1}[\quad G_1y_c(g_m + G_2)] \quad G_1y_c(G_2 + g_m) \tag{4.6}
$$

这个等代数余子式矩阵的重要性质对线性网络节不定导纳矩阵是众所周知的，JEANS[1925]对于主对角线上元素的余子式阐述了这个结论，BARABASCHI 和 GATTI[1954]以及 PERCIVA [1954]证明了一般情况。

推论 4.1：如果 A 是具有每行元素之和均等于零这一性质的方阵，那么，对于所有的 i，将 A的第 i 行乘上 A_{ij} 所得的矩阵是等代数余子式矩阵

这个推论的证明留作练习(习题 4.1)。

现在我们将指出：并不是所有从等代数余子式矩阵得出的二阶代数余子式都是独立的。

定义 4.2：二阶代数余子式。

对于一个方阵 A $[a_{ij}]$，A 的元素 a_{pq} 和 a_{rs} 的二阶代数余子式用符号 $A_{pq,rs}$ 来表示，它是从 A 中划去 p 和 r 行以及 q 和 s 列所得的子矩阵 $A_{pq,rs}$ 的行列式，然后冠以符号

$$
\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(q \quad s)(\quad 1)^{p+q+r+s}, \tag{4.7}
$$

式中 $p \neq r$ 和 $q \neq s$，以及如果 $w>0$，则 $\operatorname{sgn} w \quad +1$ 如果 $w<0$，则 $\operatorname{sgn} w \quad 1$。

考虑式(4.4)中给出的矩阵A，A的元素 a_{12} 和 a_{34} 的二阶代数余子式 $A_{12,34}$ 由下式给出：

$$A_{12,34}=\operatorname{sgn}(1-3)\operatorname{sgn}(2-4)(-1)^{1+2+3+4}\begin{vmatrix} G_1 & -- \\ 0 & -G_2 \end{vmatrix}$$

$$=G_1G_2 \tag{4.8}$$

引理 4.2：如果 A 是具有每行元素之和为零性质的方阵，那么，对于所有的 p、q、r、s 和 v，有

$$A_{pq,rs}=A_{pq,rv}+A_{ps,rv} \tag{4.9}$$

式中 $p\neq r$ 和 $q\neq s\neq v$。

证明．设 $A_{pq,rs}$ 是划去 p 和 r 行及 q 和 s 列所得的 A 的子矩阵，并设 $M_{pq,rs}=\det A_{pq,rs}$，在 $A_{pq,rs}$ 中，用 $A_{pq,rs}$ 所有列之和去代替对应于 A 的第 v 列的列，由于 $\sum_{k=1}^{n}a_{ik}=0$，在第 i 行中这列的元素现在是 $-(a_{iq}+a_{is})$。如果从这一列中移去 −1，并设所得的矩阵用 $A''_{pq,rs}$ 表示，那么 $M_{pq,rs}=-\det A''_{pq,rs}$。在 $A''_{pq,rs}$ 中，设 A''_1 和 A''_2 分别是从 $A''_{pq,rs}$ 中置 $a_{is}=0$ 和 $a_{iq}=0\ (i=1,2,\cdots n)$ 而得的矩阵，显然有 $\det A''_{pq,rs}=\det A''_1+\det A''_2$。

目前，列 q、s 和 v 的编号序数是很有关系的，除了符号之外，$\det A''_1$ 和 $\det A''_2$ 分别是二阶代数余子式 $A_{ps,rv}$ 和 $A_{pq,rv}$。

在 A''_1 中，把含有元素 a_{iq} 的列移到某个位置，以至在所得的矩阵中，它的列以如在 A 中那样同样的序列出现。为作到这一点，对于 $s<q<v$ 和 $q<v<s$ 的情况，它要求邻接对换 $(v-q-1)$ 次；对于 $s<v<q$ 和 $v<q<s$ 的情况，有 $(q-v-1)$ 次；对于 $q<s<v$ 的情况，有 $(q-v-2)$ 次；及对于 $v<s<q$ 的情况，有 $(q-v-2)$ 次。不难检验所有的各种情况都含于统一的方程式中。

$$\det A''_1=\operatorname{sgn}(q-s)\operatorname{sgn}(v-s)(-1)^{v-q-1}M_{ps,rv} \tag{4.10}$$

因此有

$$A_{ps,rv}=\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(s-v)(-1)^{p+s+r+v}M_{ps,rv}$$

$$=\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(q-s)(-1)^{p+q+r+s}\det A_1'' \tag{4.11}$$

以同样的方式，A_2'' 得到类似于式(4.11)的恒等式，

$$A_{ps,rv}=\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(s-q)(-1)^{p+q+r+s}\det A_2'' \tag{4.12}$$

组合这些结果，有

$$\begin{aligned}A_{pq,rs}&=\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(q-s)(-1)^{p+q+r+s}M_{pq,rs}\\&=\operatorname{sgn}(p-r)\operatorname{sgn}(q-s)(-1)^{p+s+r+s}(\det A_1''+\det A_2'')\\&=A_{pq,rv}-A_{ps,rv}\end{aligned} \tag{4.13}$$

引理证毕。

定理 4.2：如果 A 是具有每行元素之和为零性质的方阵，那么对所有的正整数 p,q,r,s,u,v,x,y 和 z，有

$$A_{ux}A_{pq,rs}=A_{ry}A_{pq,uv}+A_{pz}A_{rs,uv}-A_{ry}A_{ps,uv}-A_{pz}A_{rq,uv} \tag{4.14}$$

式中 $p\neq u\neq r$ 和 $q\neq v\neq s$。

证明：对于某些 $j<n$，设 A''是将 A 的第 i 行乘上 A_i $(i=1,2,\cdots n)$所得的矩阵，这里 n 是矩阵 A 的阶，根据推论 4.1、A''是等代数余子式矩阵。

考虑 A'' 的转置，根据引理 4.2，A'' 的元素的二阶余子式 $A''_{pq,rs}$由下式相联系：

$$A_{pq,rs}=A''_{pq,vs}-A''_{rq,vs} \tag{4.15}$$

由于

$$A''_{pq,rs}=\left(\prod_{\substack{K=1\\K\neq p,r}}^{n}A_{Kt_K}\right)A_{pq,rs} \tag{4.16}$$

式中 t_K 是少于 $n+1$ 的正整数。经过简单代换之后，有

$$A_{vt_v}A_{pq,rs}=A_{rt_r}A_{pq,vs}-A_{pt_p}A_{rq,vs}$$

或

$$A_{ux}A_{pq,rs}=A_{ry}A_{pq,us}-A_{pz}A_{rq,us} \tag{4.17}$$

利用式(4.17)连同式(4.9)，得到所要求的结论，定理证毕。

推论 4.2：如果A是一个等代数余子式矩阵，则有

$$A_{pq,rs}=A_{pq,uv}+A_{rs,uv}-A_{ps,uv}-A_{rq,uv} \tag{4.18}$$

式(4.18)中所给出的恒等式，SHARPE 和 SPAIN[1960]也称

之为Jeans定理，因为公式的"起源"是由JEANS 1925]发现的。值得注意，借助式(4.18)A元素的所有二阶余子式可以由$A_{..}$元素的(一阶)余子式线性组合得到。因此对于A来说，*仅存在$(n-1)^2$个*独立的二阶余子式，这个结论的主要意义是：在线性网络分析中，不管复杂性如何，在网络的导纳和阻抗之间有完备的对偶性。关于这方面的详细论述，读者可参阅SHARPE和SPAIN[1960]。

作为一个例子，再一次考虑式(4.4)的等代数余子式矩阵A，通过计算得到以下二阶余子式：

$$
\left.
\begin{aligned}
&\mathbf{A}_{12.44} \quad G(G_2 - y\ ) \\
&\mathbf{A}_{33.44} \quad G\ y_c \\
&\mathbf{A}_{13.44} \quad -G\ (g_m - y_c) \\
&\mathbf{A}_{32.44} \quad G\ y_c \\
&\mathbf{A}_{\ 2.\ \ } \quad G_1(g_m \quad G\ )
\end{aligned}
\right\} \tag{4.19}
$$

因此，根据式(4.18)有

$$
\mathbf{A}_{12..} \quad \mathbf{A}_{\ 2.44} \quad \mathbf{A}_{33..} \quad \mathbf{A}_{\ 3.44} \quad \mathbf{A}_{32.44} \tag{4.20}
$$

§ 2. 伴随有向图

在线性系统分析中，可以得出如下类型的等代数余子式矩阵(参见习题4.68)：

$$
\mathbf{Y}=\begin{bmatrix}
\sum\limits_{k=2}^{n} y_{1k} & -y_{12} & -y_{13}\cdots & -y_{1n} \\
-y_{21} & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} y_{2k} & -y_{23}\cdots & -y_{2n} \\
\vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots & \vdots \\
-y_{n1} & -y_{n2} & -y_{n3}\cdots & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq n}}^{n} y_{nk}
\end{bmatrix} \tag{4.21}
$$

因为 $\mathbf{Y}$ 是在用节点方程系分析线性网络时产生的，所以 $\mathbf{Y}$ 也称为不定导纳矩阵。子矩阵 $\mathbf{Y}_{11}$ 是以1为基准节点的节点导纳矩阵，其原因是在对应网络中节点1被选为基准电位（参见第二章§3.3以及习题2.21）。

在 $\mathbf{Y}$ 的任一元素的余子式 $\mathbf{Y}_{ij}$ 的展开式中所有的展开项全是正的，关于这种行列式或代数余子式的性质由SYLVESTER［1855］称为同号式。对所有的 i 和 j，通过置 $y_{ij}=1$，他也证明：在这些代数余子式的最后展开式中最大的正项数目是 n^{n-2}。显然，由于主对角线元素乘积的最大项数是 $(n-1)^{n-1}$，利用传统的方法展开这些代数余子式是非常化时间的运算，而且如前所述，$\mathbf{Y}$ 的元素通常是以字母而不是以数值的形式给出的，这样它们不能在展开的过程中合并。对于具有所有元素都存在的四阶矩阵 $\mathbf{Y}$，例如 $\mathbf{Y}$ 中元素(4,4)的余子式 $\mathbf{Y}_{44}$ 具有下列的形式：

$$
\mathbf{Y}_{44}=\begin{vmatrix}
y_{12}+y_{13}+y_{14} & -y_{12} & -y_{13} \\
-y_{21} & y_{21}+y_{23}+y_{24} & -y_{23} \\
-y_{31} & -y_{32} & y_{31}+y_{32}+y_{34}
\end{vmatrix} \tag{4.22}
$$

用通常展开的方法所得到的总项数在相消之前是38项，在其中有22项将互相对消：

$$
\begin{aligned}
\mathbf{Y}_{44}= & y_{12}y_{21}y_{31}+y_{12}y_{21}y_{32}+y_{12}y_{21}y_{34}+y_{12}y_{23}y_{31}+y_{12}y_{23}y_{32} \\
& +y_{12}y_{23}y_{34}+y_{12}y_{24}y_{31}+y_{12}y_{24}y_{32}+y_{12}y_{24}y_{34}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+y_{12}y_{21}y_{31}+y_{13}y_{21}y_{32}+y_{12}y_{24}y_{31}+y_{13}y_{23}y_{31}\\
&+y_{13}y_{23}y_{32}+y_{13}y_{23}y_{34}+y_{14}y_{24}y_{31}+y_{13}y_{21}y_{32}\\
&+y_{12}y_{23}y_{34}+y_{14}y_{21}y_{31}+y_{14}y_{21}y_{32}+y_{14}y_{21}y_{34}\\
&+y_{14}y_{23}y_{31}+y_{14}y_{23}y_{32}+y_{14}y_{23}y_{34}+y_{14}y_{24}y_{31}\\
&+y_{14}y_{24}y_{32}+y_{14}y_{24}y_{34}-y_{21}y_{32}y_{13}-y_{12}y_{23}y_{31}\\
&-y_{13}y_{31}y_{22}-y_{13}y_{31}y_{23}-y_{13}y_{31}y_{24}-y_{12}y_{21}y_{31}\\
&-y_{12}y_{21}y_{32}-y_{12}y_{21}y_{34}-y_{23}y_{32}y_{12}-y_{23}y_{32}y_{13}\\
&-y_{23}y_{32}y_{14}\\
=&\,y_{12}y_{23}y_{34}+y_{12}y_{24}y_{31}+y_{12}y_{24}y_{32}+y_{12}y_{24}y_{34}+y_{13}y_{21}y_{34}\\
&+y_{13}y_{23}y_{34}+y_{13}y_{32}y_{24}+y_{13}y_{24}y_{34}+y_{14}y_{21}y_{31}\\
&+y_{14}y_{21}y_{32}+y_{14}y_{21}y_{34}+y_{14}y_{22}y_{31}+y_{14}y_{23}y_{34}\\
&+y_{14}y_{24}y_{31}+y_{14}y_{24}y_{32}+y_{14}y_{24}y_{34}。
\end{aligned}
\tag{4.23}
$$

SYLVESTER 指出，在对称同号式的展开式中的项就是"树枝乘积"，SYLVESTER 的研究成果与 KIRCHHOFF [1847]的研究成果是同时期的。但是，他似乎没有觉察到它与在第二章§6 中所讨论的 RLC 网络的节点导纳矩阵行列式就是树支导纳乘积的联系。最近，CHEN[1965 d]推广了 SYLVESTER 和 KIRCHHOFF 的研究成果，并且指出，在不对称的同号式的展开式中的各项就是 Y 的伴随有向图的"有向树支乘积"，当有向图是对称时，它就转化为 SYLVESTER 和 KIRCHHOFF 所讨论的情况。

在这一节中，将研究如式(4.21)中所示类型矩阵元素的一阶、二阶余子式的展开式中的各项和矩阵的伴随有向图中某种类型的子图之间的密切关系，同样将指出，这些子图与前一章中所讨论的其对应的 COATES 图的子图有怎样的关系。最后将说明应用这些技术来解决网络问题。

2.1 有向树和一阶代数余子式

在同号式的展开式中，项数和伴随有项图中称为有向树的某种类型的子图数之间互相对应的基本概念，是由 TUTTE[1948]在分

解等边三角形为等边三角形的研究中首先利用的，BOIT和MAYBERRY[1954]应用这个结论来分析经济领域中的问题，在CHEN[1965 d]分析一般电网络时独立地提出一种类似方法之前，他们的研究成果基本上仍然不为工程师们知悉。CHEN的方法更具有通用性和系统性，本章给出的研究成果完全是由CHEN[1965 d、1967 b]得出的，但以不同的形式提出。

定义 4.3：伴随有向图，

对于一个如式(4.21)所示的等代数余子式矩阵 Y，伴随有向图用符号 G(Y) 或简单地用 G 来表示，它是一个具有 n 个顶点的加权、加标有向图，顶点从整数 1 到 n 依次标号。如果 $y_{ij} \neq 0 (i \neq j)$，则从顶点 i 到 j 有一条有向边，该边的权为 y_{ij} (i、j＝1、2、…，n)。

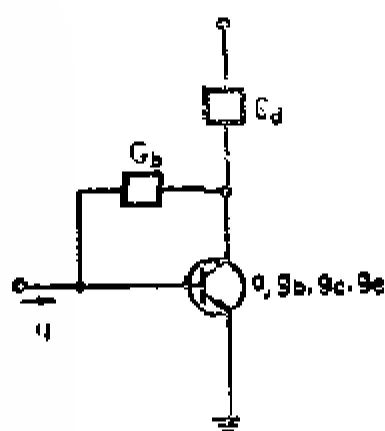
应当指出，与前一章中所讨论的 COATES 图和 MASON 图相比，Y 的对角线元素与 G(Y)没有直接关系。定义表明怎样从矩阵转为伴随有向图，相反的过程，即从给定的 G 得到伴随等代数余子式矩阵(用 Y(G)表示)是非常简单而容易的。作为一个例子，考虑下面的等代数余子式矩阵：

$$Y=\begin{bmatrix} G_b+g_5 & -g_5 & -G_b & 0 \\ -g_5 & g_5+g_e+g_c-\alpha g_e & -g_c & -g_e+\alpha g_e \\ -G_b & -g_c+\alpha g_e & G_b+g_c+G_d & -G_d-\alpha g_e \\ 0 & -g_e & -G_d & G_d+g_e \end{bmatrix} \qquad (4.24)$$

这是如图 4.1 所示的晶体管反馈放大器的不定导纳矩阵。矩阵Y的伴随有向图 G(Y)如图 4.2 所示，反之，如果图 4.2 给定，则伴随矩阵 Y(G)很容易得到，因此，矩阵和其伴随有向图之间有一一对应关系。

定义 4.4：有向树，

用符号 t_i 表示的有向图 G 的一个子图称为以 i 为参考点的有



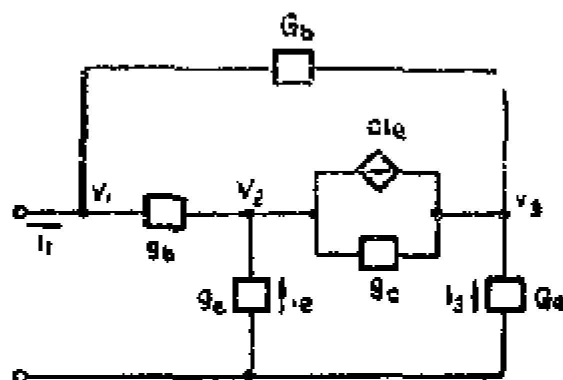


图 4.1 (a) 晶体管反馈放大器 (b) 其等效网络

向树，当且仅当满足(1)它是 G 的一个树(定义 2.2)和 (2) t_i 中除参考节点外的每个节点射出边的度数为 1，而参考点 i 的射出边的度数为 0。

术语有向树，TOTTE[1948]也称为子树，而另一些人称它为有根树。作为一个例子，图 4.2 中的有向图以节点 4 为参考点的有向树集 t_4 如图 4.3 所示。

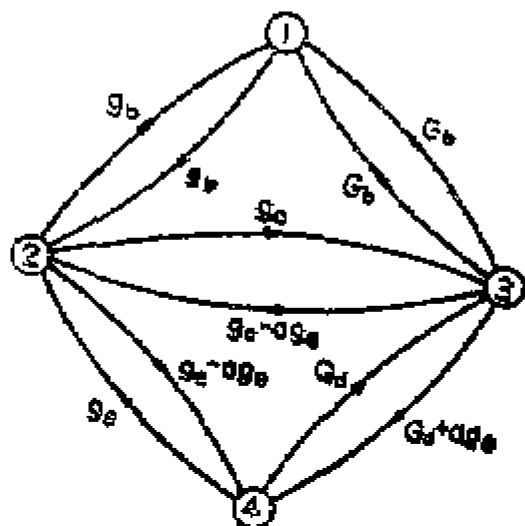


图 4.2 等代数余子式矩阵 (4.24)的伴随有向图

象第三章中所用的那些符号一样，如果 g_s 是有向图 G 的子图，那么用 $f(g_s)$ 表示 g_s 的边权乘积。对照式(3.16)，在这一章中定义 $f(\phi)=1$ 比较方便，这里 ϕ 是空图。同样，对于 G 的某类子图 g_s，符号 $\sum_{g_s} f(g_s)$ 表示取遍所有可能的 g_s 求和。

定理 4.3：如果 Y 是式(4.21)的等代数余子式矩阵，那么，对于 i，j，k＝1，2，…，n，Y 的元素(i，j)的代数余子式由下式给出，

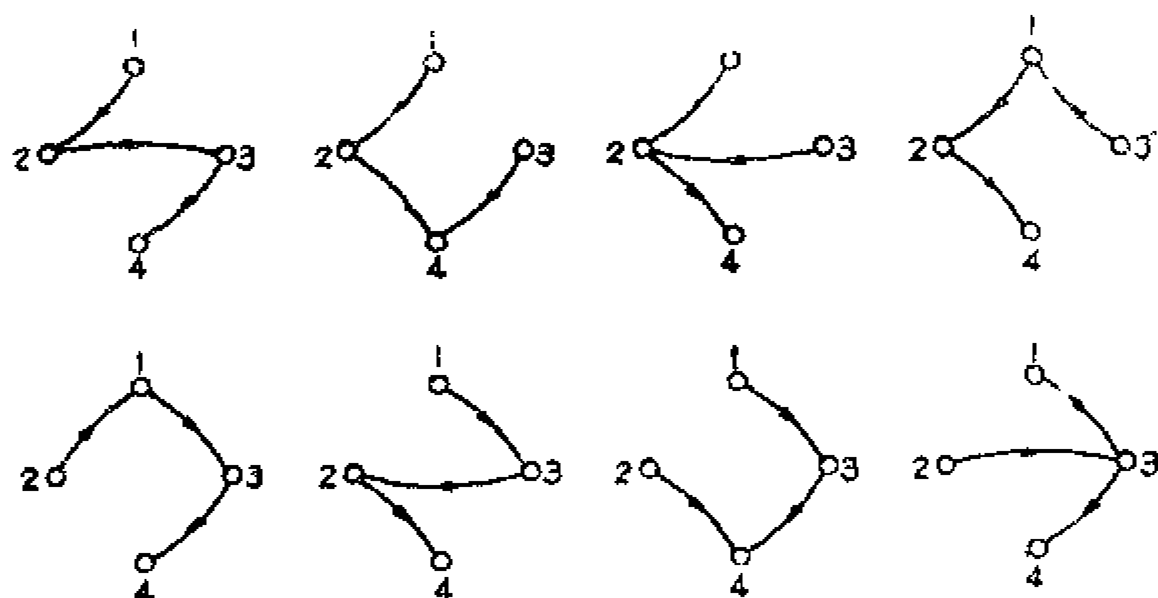


图 4.3 图4.2有向图的有向树集 t_k

$$Y_{ij}=\sum_{t_k} f(t_k) \tag{4.25}$$

式中 t_k 是 G(Y)中的有向树。

证明：由于 Y 是等代数余子式矩阵，则证明以下关系式就可以了。

$$Y_{nn}=\sum_{t_n} f(t_n) \tag{4.26}$$

在G(Y)的边数范围内，用归纳法来证明该定理。如果G(Y)仅有一条边，显然定理满足。假定对于具有 b−1 条边或更少一些边的任何G(Y)($b\geq 2$)，定理成立。运用归纳法，需要证明对于含有 b 条边的任何G(Y)，定理成立。

假定在G(Y)中存在一条边(i, n)($i\neq n$)，因为如果不是这样，由于 Y_{nn} 每行中元素之和等于零，在这种情况下，定理是成立的。设 G* 是从G(Y)中首先移去边(i, n)，然后用(y_{ni}−y_{in})去替换与边(n, i)相联系的权而得到的有向图，因此 G* 是等代数余子式矩阵的伴随有向图。同样，设 G″ 是从G(Y)中首先使节点 i 和 n 合并，然后移去所有由此而产生的自环所得的有向图，G″ 中合并的

节点用 i 来表示，因此，在 G″ 中可能出现并联边。由于 G* 和 G″ 具有比 G(Y) 较少的边，于是能应用归纳假设，因此，有

$$Y^*_{nn} = \sum_{t^*_n} f(t^*_n) \tag{4.27}$$

$$Y''_{ii} = \sum_{t''_i} f(t''_i) \tag{4.28}$$

式中 Y^*_{nn} 和 Y''_{ii} 分别是等代数余子式矩阵 Y(G*) 和 Y(G″)的元素(n, n)和(i, i)的代数余子式，而 t^*_n 和 t''_i 分别是 G* 和 G″ 中以 n 和 i 为参考点的有向树。注意：Y(G″)是 n−1 阶的。

在 G* 的有向树集 t^*_n 和不含有边(i, n)的 G(Y)以 n 为参考点的有向树集 t^1_n 之间，由于存在一一对应关系，以及 $f(t^*_n) = f(t^1_n)$，从而有

$$Y^*_{nn} = \sum_{t^1_n} f(t^1_n) \tag{4.29}$$

类似地，可以证明：在G″的有向树集 t''_i 和含有边(i, n)的 G(Y)以 n 为参考点的有向树集 t^2_n 之间，存在一一对应关系。由于 $y_{in} f(t''_i) = f(t^2_n)$，从而有

$$y_{in} Y''_{ii} = \sum_{t^2_n} f(t^2_n) \tag{4.30}$$

因此，有

$$\begin{aligned} Y_{nn} &= Y^*_{nn} + y_{in} Y''_{ii} \\ &= \sum_{t^1_n} f(t^1_n) + \sum_{t^2_n} f(t^2_n) \\ &= \sum_{t_n} f(t_n) \end{aligned} \tag{4.31}$$

定理证毕。

如果等代数余子式矩阵是对称的，则伴随有向图 G(Y)可以大大简化。

定义 4.5：伴随图

对于一个如式(4.21)所示的对称等代数余子式矩阵 Y，伴随图用符号 Gu(Y)，或简单地用 Gu 来表示，它是一个具有几个节点，加权、加标的(无向)图，节点从整数 1 到 n 依次标号，这样，如果 $y_{ij}\neq0(i>j)$，则在节点 i 和 j 之间有一条边，该边的权为 $y_{ij}(i,j=1,2,\cdots,n)$。

换言之，Gu(Y)实际上是 G(Y)的伴随无向图，这样，对于所有的 i 和 j，Gu(Y)中的节点 i 和 j 之间连接的边权是 y_{ij} 或 y_{ji}。

推论 4.3：如果 Y 是对称的，那么对于 $i,j=1,2,\cdots,n$，有

$$Y_{ij}=\sum_{t}f(t) \tag{4.32}$$

式中 t 是 Gu(Y)的树。

式(4.32)的基本概念首先是由 MAXWELL[1892]提出的，他指出：无互感的线性无源网络节点导纳矩阵的行列式等于网络的树支导纳乘积之和。注意，公式(4.32)比 MAXWELL 原来的叙述更带普遍性。对于任何无互感的无源网络，其伴随不定导纳矩阵 Y 总是对称的，但是其逆陈述一般并不成立。例如，具有互感的无源线性网络的不定导纳矩阵也是对称的。因此，这个公式适用于只要网络具有对称的不定导纳矩阵的任何网络。值得指出，对于无互感的无源线性网络，伴随图 Gu(Y)实际上是网络本身，这确实是拓扑分析的一个重要特点。显然，恒等式(4.25)并不限制于节点方程系，只要系统的伴随矩阵处于式(4.21)所示的形式，它可以应用于网孔方程系以及任何其它方程系。最后，提到这样的一个事实，如果式(4.21)中所有元素 y_{ij} 都认为是互不相同的，则式(4.25)的右边不会产生相抵消的冗余项。因此，它用来求网络的节点行列式是相当有效的。

如在 COATES 图和 MASON 图那样，预先知道 G(Y)的有向树数是有利的，对于这个问题的求法是不难得到的，在下面以稍微一般的形式来讨论这个问题，推导出对任何给定有向图计算有向树

数目的公式。

定义 4.6：有向树矩阵。

用符号 D(G)表示的，与其中 n 个节点的有向图 G 相联系的有向树矩阵是一个 n 阶矩阵。这一矩阵如下构成，如果 $D(G)=[d_{ij}]$，则 d_{ii} 表示 G 中节点 i 的输出边的度数，而 $-d_{ij}(i\neq j)$ 表示 G 从节点 i 指向节点 j 的边数目($i,j=1,2,\cdots n$)。如果存在自环，则先从G中去掉。

换言之，定义包括 G 含有并联边的可能性。从 G 中移去自环是容许的，因为它们决不能出现于任何有向树中。显然，有向树矩阵 D(G)不一定是等代数余子式矩阵，但 D(G)的每一行元素之和必定为零。当且仅当指向某个节点的边权之和等于从那个节点流出的边权之和时，加权有向图 G 是某个等代数余子式矩阵的伴随有向图。因此，采用与构造一个等代数余子式矩阵的伴随有向图（定义 4.3)的同样步骤，则D(G)的伴随有向图实际上就是每个边权都取为 1 的有向图 G 本身。显然步骤可以反过来，即从 G 得到 D(G)。为了方便起见，同样也说 G 是 D(G)的伴随有向图，而 D(G)是每一个边权取为 1 的 G 的伴随矩阵，既使矩阵本身可能不是一个等代数余子式矩阵。

推论 4.4： 对于一个给定的有向图 G，有向树矩阵 D(G)的第 i 行的任一元素的代数余子式的值等于 G 中以节点 i 为参考点的有向树数。

证明：推论等效于这样的说法：如果 $D_{ix}(G)$是 D(G) 元素(i，x.)的余子式，而 $N(t_i)$表示 G 中以节点 i 为参考点的有向树数，那么对于 $i,x=1,2,\cdots n$ 有

$$N(t_i)=D_{ix}(G) \tag{4.33}$$

式中N是 G 的节点数。由于 D(G) 是具有每一行元素之和为零的矩阵，根据引理 4.1，只要证行下式就行了。

$$N(t_n)=D_{nn}(G) \tag{4.34}$$

假定与G的每条边有关的权是1。令G^*是从G中改变与G的边$(n,u)(u=1,2,\cdots n-1)$有关的权，使G^*的伴随矩阵$Y(G^*)$为等代数余子式矩阵的有向图，这总是可能的，因为原来不含于G的边可以认为是具有零权的边。换言之，必须对G附加边(n,u)，使$Y(G^*)$为一个等代数余子式矩阵。

由于G或G^*的边(n,u)不可能不出现于以n为参考点的任一有向树中，从而G和G^*具有相同的以n为参考点的有向树数，根据定理4.3有

$$Y^*_{nn}=\sum_{t^*_n} f(t^*_n)=N(t^*_n) \tag{4.35}$$

式中Y^*_{nn}是$Y(G^*)$的元素(n,n)的代数余子式，t^*_n是G^*中以n为参考点的有向树，而$N(t^*_n)$表示G^*中的有向树t^*_n。同样可使用$f(t^*_n)=1$。由于$D_{nn}(G)=Y^*_{nn}$和$N(t_n)=N(t^*_n)$，推论立即得出，推论证毕。

推论4.4首先是由TUTEE[1948]在分解等边三角形为等边三角形的研究中而推导的，BOTT和MAYBERRY[1954]用这个结论来分析经济领域的问题。

由下面的例子来说明以上结论。

例 4.1：考虑如图4.1所示的晶体管反馈放大器，放大器的不定导纳矩阵Y在式(4.24)中给出，而其伴随有向图G(Y)如图4.2所示。G(Y)的有向树数目可以从有向树矩阵D(G)计算，这里$G=G(Y)$，根据图4.2，得到以下矩阵：

$$D(G)=\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \tag{4.36}$$

假定要求计算G(Y)中以节点4为参考点的有向树数目$N(t_4)$，根据推论4.4，有下式：

$$
Nt_4 \quad D_{44}(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 8 \tag{4.37}
$$

由于有向树矩阵的特殊形式，其行列式值在计算上是不难的。例如，式(4.37)可以很容易地通过简单的行或列运算而求得。对于这种类型的高阶行列式，一种有效的迭代方法将在§5.2中讨论。另一方面，有向树数目 $N(t_i)$ 也可以从其它三个余子式 $D_{41}(G)$、$D_{42}(G)$和$D_{43}(G)$中的任一个求得，因此G(Y)中以节点4为参考点的有向树有8个。由于Y是等代数余子式矩阵，Y元素的所有代数余子式都相等，因此根据定理4.3，对于i，j＝1,2,3,4，有以下式：

$$
\begin{aligned}
Y_{ij} &= \sum_{t_4} f(t_i) \\
&= g_b g_c (G_a + \alpha g_e) + g_b (g_e \ \alpha g_c)(G_d \ \alpha g_e) + g_b (g_c - \\
&\quad \alpha g_e)(g_e \ \alpha g_e) + G_b g_b (g_e \ \alpha g_e) + g_b G_b (G_d + \alpha g_e) + \\
&\quad G_b (g_c \ \alpha g_c)(g_e \ \alpha g_c) \ G_b (G_d + \alpha g_e)(g_c \ \alpha g_e) + \\
&\quad g_c G_b (G_d \ \alpha g_e) \\
&\quad G_d [(1 \ \alpha) g_e (G_b \ g_b) \ g_b (g_c + G_b) + g_c G_b] + g_e G_b (g_c + \\
&\quad g_c) + g_e g_b g_c
\end{aligned} \tag{4.38}
$$

式中以G(Y)的节点4为参考点的有向树集在图4.3中给出，结果当然与式(3.25)中给出的相同。

对G(Y)中以节点3为参考点的有向树数目作类似的计算：

$$
N(t_3) = D_{33}(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 8 \tag{4.39}
$$

这是在意料之中的，因为D(G)是一个等代数余子式矩阵，因此在G(Y)中以节点3为参考点的有向树也是8个，它们如图4.4所示。根据定理4.3，有下式：

$$
\begin{aligned}
Y_{33} = & \sum f(t_3) \\
= & g_b g_c G_c + g_b(g_e - \alpha g_c)G_d + g_c g_b G_b + g_b G_b G_d + (g_a - \\
& \alpha g_e) G_d G_b + g_e g_c G_c + g_e g_b g_c + g_c G_b G_d
\end{aligned}
\quad (4.40)
$$

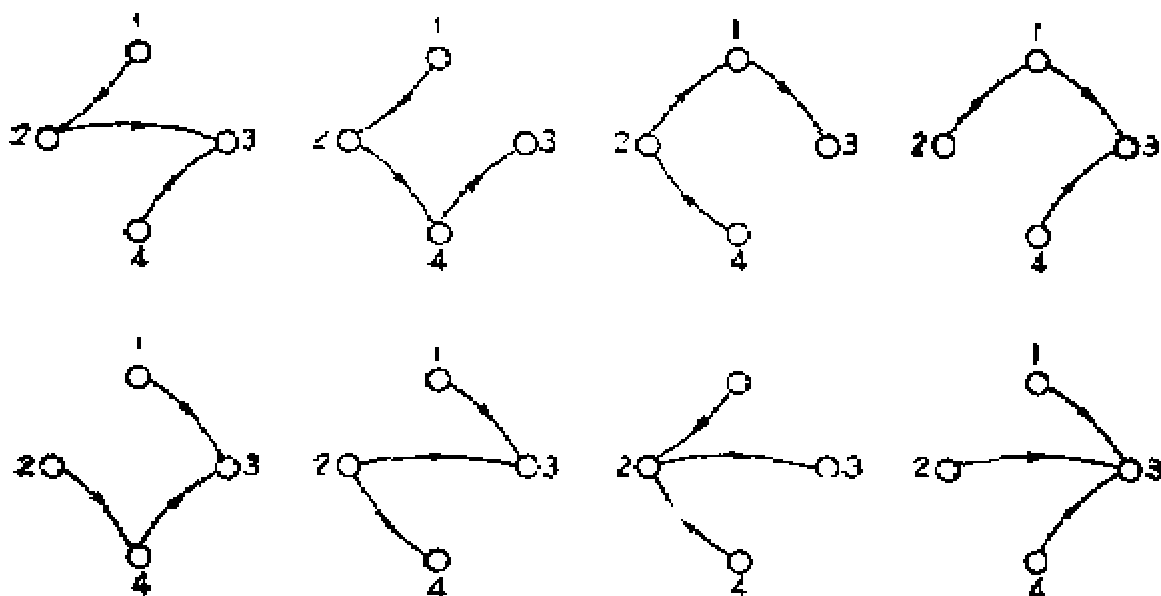


图 4.4　图4.2有向图的有向树集 t_3

式(4.40)与式(4.38)的比较表明：在式(4.38)中所出现对消的冗余项在式(4.40)中是可以避免的。换言之，适当地选择参考点可以大大简化代数余子式的计算。

前面早已指出，如果等代数余子式矩阵 Y 是对称的，则其伴随有向图 G(Y)可以大为简化，简化图是无向的，用符号 Gu(Y)来表示。类似的简化可以应用于与对称有向图 G 相联系的有向树矩阵 D(G)。由于(无向)图可以用一对方向相反的有向边表示每条(无向)边而变换为对称有向图，反之亦然，问题可以用 G 的对应无向图来表示[它不是 G 的伴随无向图(定义 1.25)]。

定义 4.7：树矩阵。

与具有 n 个节点的图 Gu 相联系的树矩阵用符号 D(Gu)表示，是一个 n 阶的对称矩阵，D(Gu)的构造如下：如果 $D(G_u)=[d_{ij}]$，则 d_{ii} 表示 G_u 中节点 i 的度数，而 $d_{ij}(i\neq j)$表示 G_u 中节点 i 和 j

之间连接的边数(i, $j=1$, 2, ···, n)。如果存在自环，可以先从G_t中去掉。

因此，一个图的树矩阵是等代数余子式矩阵，也是将所有导纳都取为1的n节点电阻网络的不定导纳矩阵。显然与对称有向图相联系的有向树矩阵是一个等代数余子式矩阵，但是逆命题一般不成立。产生等代数余子式有向树矩阵的这类向有图是以下所定义的那类有向图。

推论 4.5：一个有向图，当且仅当射出边度数和射入边度数对于每个节点来说都是相同的，则它的有向树矩阵是等代数余子式矩阵。

推论的证明留作为练习(习题 4.3)。

利用推论 4.4 和推论 4.5，有以下推论：

推论 4.6：设G是一个有向图，对于其每个节点来说，其射出边度数和射入边度数都是相同的，则在G中相对于参考点的选择来说，有向树的数目是不变的。

因此对于这些有向图，特别是对于正则有向图来说，对有向树参考点的说明是没有必要的。

推论 4.7：一个(无向)图中树的数目等于其树矩阵任一元素的代数余子式之值。

定义 4.6：完备有向图。

无自环的有向图G，如果G的每对节点之间在每一个方向上都有k条且仅有k条并联边，称为k阶完备图。阶为1的完备有向图就称为完备有向图。

由于与k阶完备有向图相联系的有向树矩阵的特殊形式，求其有向树矩阵元素的代数余子式(有向树数目)在计算上并不困难。为了避免计算这些代数余子式，将推导出计算这些图和它们变形图中的有向树数目的公式。由于任何阶的完备有向图也是对称的（因此是正则的)。我们有以下推论：

推论 4.8：在阶数为 k 的 n-节点完备有向图中，有向树的数目由 $k(nk)^{n-2}$ 给出($n\geq 2$)。

证：$D_{nn}(G)$ 是从 $D(G)$ 中划去第 n 行和第 n 列所得的子矩阵，这里 G 是给定的完备有向图。由于 $D(G)$ 是一个等代数余子式矩阵，则求出 $D(G)$ 元素 (n,n) 的代数余子式 $D_{nn}(G)$ 就足够了。

设 $D_{nn}(G)=[d_{ij}]$，则 $d_{ii}=k(n-1)$，而对于 $i\neq j$，有 $d_{ij}=-k$。为了计算 $D_{nn}(G)$，将 $D_{nn}(G)$ 所有第一列之后的列加到第一列上，然后将新的第一列加到其余的每一列上。这样得到的矩阵是一三角形，而其行列式很容易求得为 $k(nk)^{n-2}$，推论证毕。

类似地，可以推导出下面的两个结论，由于推导是简单明了的，这里略去留作练习(习题 4.8 和 4.9)。

推论 4.9：设 G 是 k 阶的 n-节点完备有向图中，从 p 个不同节点有序对的每一个中移去 k 个并联边而获得的有向图，如果所有节点有序对是不同的且不同于参考点 i，则 G 中以 i 为参考点的有向树数目由下式给出：

$$N(t_i)=k^{n-1}(n-1)^p n^{n-p-2} \tag{4.41}$$

推论 4.10：设 G 是从 k 阶的 n-节点完备有向图中移去所有的边 $(i_1, x)(x=i_2, i_3, \cdots, i_{q+1}, q<n)$ 而得到的有向图。如果 $i_1, i_2\cdots i_{q+1}$ 都是相异的，则 G 中以 i 为参考点的有向树数目 $N(t_i)$ 由下式给出：

$$N(t_i)=(n-q)n^{n-3}k^{n-1} \tag{4.42}$$

上式中 $i\neq i_u$，$u=1,2,\cdots q+1$。而对于 $i=i_u$，$u=2, 3, \cdots q+1$ 则有下式：

$$N(t_i)=(n-q-1)n^{n-3}k^{n-1} \tag{4.43}$$

作为一个例子，考虑阶数为 2 的 6-节点完备有向图。设 G^* 是从 G 中移去所有边(1,2)和(3,4)所得的有向图，则根据式(4.41)，G^* 的有向树 t_5 或 t_6 的数目是

$$N(t_5)=N(t_6)=2^5\times 5^2\times 6^2=28800$$

根据推论 4.8，G 中有 41472 个有向树，假定我们希望利用这些公

式来求图4.2有向图G中有向树的数目$N(t_i)$。由于G是对称的，其有向树数目相对于参考点的选择是不变的，因此，设节点4选为参考点，如果加一条边(4.1)到G以形成一个新的有向图G''，那么显然G和G''相对于参考点4具有相同的有向树数目。由于G''能从4节点的完备图中移去边(1.4)而得到，根据式(4.43)，有下式：

$$N(t_i) = (4-1-1)\times 4^{4-3}\times 1^{4-1} = 8$$

上式中，i=1，2，3，4。另一方面，G''中以2或3为参考点的有向树数目$N(t_i'')$可以从式(4.41)或(4.42)求得：

$$N(t_2'') = N(t_3'') = 1^{4-1}\times(4-1)^1\times 4^{4-1-2}$$
$$= (4-1)\times 4^{4-3}\times 1^{4-1} = 12$$

显然，这些结论很容易应用于(无向)图，但是，要做到这一点，还需下列一些定义。

定义 4.9：伴随对称有向图。

对于一个(无向)图G_u，G_u的伴随对称有向图G_s是将G_u的每一个(无向)边，用一对方向相反的有向边表示后所得的有向图。如果G_u是一个加权图，则在G_s中任一对有向边的每一条边的权与G_u中对应边的权相同。

根据这一定义，下列推论成立。

推论 4.11：如果G_s是加权图G_u的伴随对称有向图，则在G_u中的树和G_s中的有向树t_i之间存在一一对应关系，从而有$f(t)=f(t_i)$。

在以上推论中，由于G_s是对称的，因而参考点i的选择是任意的。

定义 4.10：完备图。

一个无自环图，只要每一对节点之间有k条且仅有k条边连接，就称为阶数为k的完备图，阶数为1的完备图就称为完备图。

因此，k阶的n节点完备图中有$k(nk)^{n-2}$个树。对$k=1$而言，n^{n-2}也就是如式(4.21)中所示的那种类型的等代数余子式中，矩阵元素的代数余子式的展开式中正项的最大数。

例 4.2：图4.5表示在外加激励$F(t)$驱动下的三自由度质量-弹簧-阻尼器系统，它含有三个质量m_1、m_2、和m_3，5个具有刚性度k_0、k_1，和k_2的弹簧，和一个具有阻尼系数c的粘滞阻尼器。假定此系统仅在水平方向振动，这里，x_1、x_2和x_3表示广义坐标

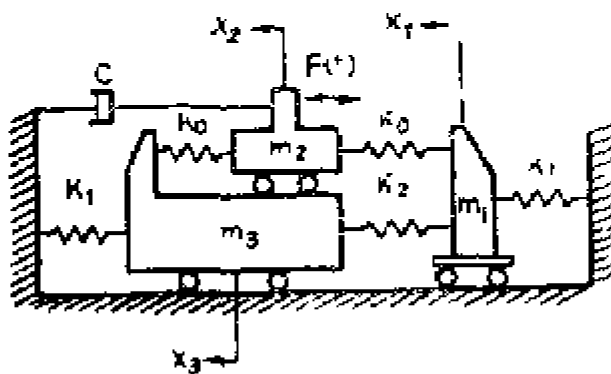


图 4.5 质量-弹簧-阻尼器系统

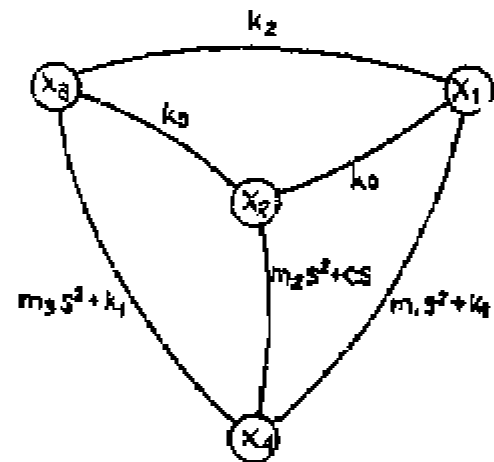


图 4.6 式(4.44)的伴随图

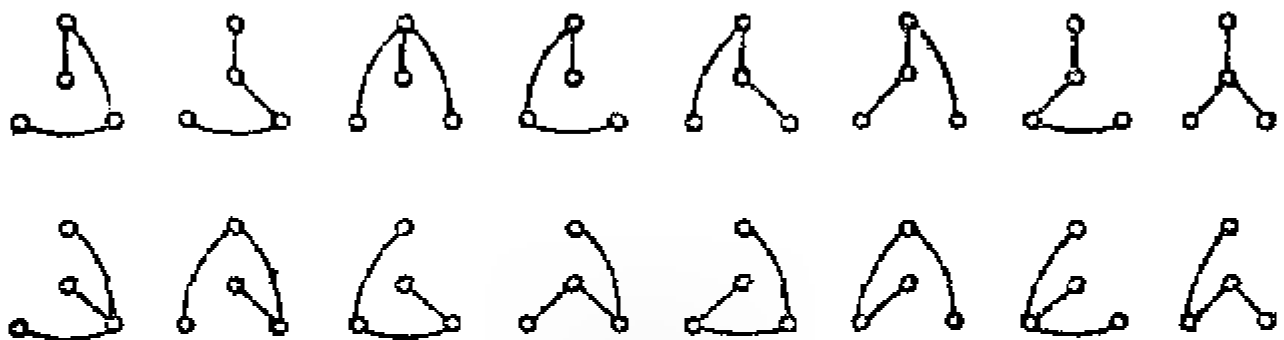


图 4.7 图4.6伴随图的树

系统的伴随等代数余子式Y由下式给出，

$$
Y=\begin{bmatrix}
m_1S^2 \;\; K & K_0 & -K_2 & -m_1S^2-K_1 \\
-K_0 & m_2S^2 \;\; cS+2K_0 & K_0 & m_2S^2 \;\; cS \\
-K_2 & K_0 & m_3S^2+K & -m_3S^2 \;\; K_1 \\
-m_1S^2-K_1 & m_2S^2-cS & m_3S^2-K_1 & MS^2+2K_1+cS
\end{bmatrix}
\tag{4.44}
$$

式中 $K=K_0+K_1+K_2$ 和 $M=m_1+m_2+m_3$。由于 Y 是对称的，其伴随图 Gu(Y) 如图 4.6 所示。Gu(Y) 的树数 N(t) 等于 D(Gu) 元素的余子式 $D_{ij}(Gu)$，这里，

$$D(Gu)=\begin{bmatrix} 3 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

因此有 $N(t)=D_{ij}(Gu)=16$。由于 Gu(Y) 也是一个完备图，N(t) 就是 $4^{4-2}=16$，Gu(Y)的 16 个树集如图 4.7 所示。根据推论 4.3，Y 中元素的余子式 Y_{ij} 之值得出如下：

$$\begin{aligned}
Y_{ij} &= \sum f(t) \\
&= K_0^2(m_1S^2+K_1)+2K_0K_2(m_1S^2+K_1)+2K_3(m_1S^2 \\
&\quad +K_1)(m_3S^2+K_1)+2K_0K_2(m_3S^2+K_1)+K_0^2(m_3S^2 \\
&\quad +K_1)+K_2^2(m_2S^2+cS) \\
&\quad +2K_2K_2(m_2S^2+cS)+K_0(m_2S^2+cS)(m_3S^2+K_1) \\
&\quad +K_0(m_2S^2+cS)(m_1S^2+K_1)+(m_2S^2+cS)(m_1S^2+K_1)K_2 \\
&\quad +(m_1S^2+K_1)(m_2S^2+cS)(m_3S^2+K_1)+K_2(m_3S^2+ \\
&\quad +K_1)(m_2S^2+cS)
\end{aligned} \tag{4.45}$$

上式中 $ij=1,2,3,4$。如果利用一般的方法展开余子式 Y_{ij}，就会多出下列 11 个正、负项：

$m_1K_0^2S^2$，$m_3K_0^2S^2$，$m_2K_2^2S^2$，cK_2^2S，$K_0^2K_1$，$K_3K_2^2$，$K_0^2K_3$，$K_3^2K_2$，$K_0^2K_2$，K_0^3，K_0^3，它们对消，因此不会在 Y_{ij} 的最终展开式中出现。

2.2 有向 2-树和二阶代数余子式

在这一节中将介绍二阶代数余子式的展开式中的项和伴随有向图中称为有向 2-树的某类子图之间的对应关系。

定义 4.11：有向 2-树。

用符号 $t_{i,j}$ 表示的，有向图 G 的一个子图，当且仅当它满足（1）它是 G 的一个 2 树（定义 2.32）和（2）$t_{i,j}$ 中除参考点外的每一个节点射出边的度数为 1，而参考点 i 和 j 的射出边的度数为 0，称为 G 中以 i 和 j 为参考点的有向 2 树，有向 2 树可能有一部分由孤立节点组成。

象 2-树一样，有需要对有向 2 树中某些特定节点规定处于不同的片中。为了方便起见，另加下标来表示。

定义 4.12：$t_{ab,cd}$。

符号 $t_{ab,cd}$ 表示一个有向 2 树，其节点 a 和 b 在一个片中，节点 C 和 D 在另一片中，且节点 a 和 c（第一个下标）各为它们的参考节点。

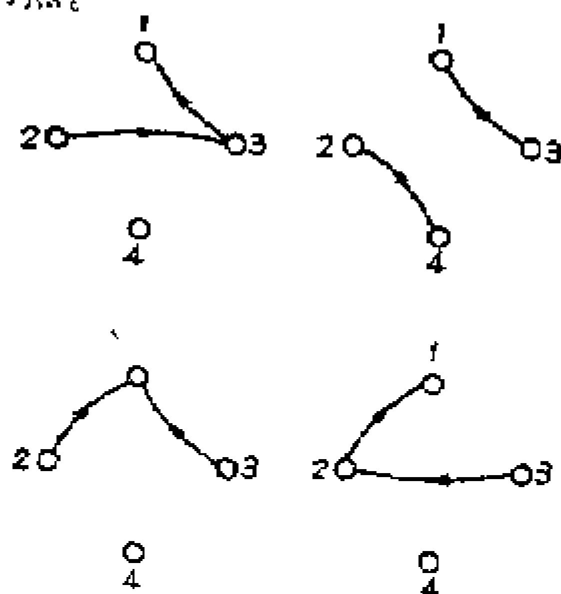


图 4.8　图 4.2 有向图的有向 2 树集 $t_{13,4}$

作为一个例子，考虑图 4.2 所给的有向图 G，有向 2-树集 $t_{13,4}$ 如图 4.8 所示。在每一个有向 2 树中，节点 1 和 3 在一个片中，而节点 4 在另一片中。节点 1 和 4 各为其参考点。由边（2,1）和（3,4）组成的子图是有向 2-树 $t_{1,4}$，但它不是有向 2 树 $t_{13,4}$，因为节点 1 和 3 不在同一片中。

定理 4.4： 如果 Y 是式（4.21）的等代数余子式矩阵，则对于 i，j，K＝1，2，…n 和 i，j≠K，有

$$Y_{ij,KK}=\sum_{t_{ij,K}} f(t_{ij,K}) \tag{4.46}$$

式中 $t_{ij,K}$ 是 G(Y) 中的有向 2 树。

证明：需要考虑两种情况：i＝j 和 i≠j，证明是类似的，所以

只考虑 $i \neq j$。

设 G^* 是从 $G(Y)$ 中改变边 (i,j)、(i,K) 和 (k,j) 的权分别从 y_{ij}，y_{iK} 和 y_{Kj} 改为 $y_{ij}+K$，$y_{iK}-K$ 和 y_{Kj} K 所得的有向图。同样，设 Y^* 是 G^* 的伴随等代数余子式矩阵，并将 G^* 中的边 (i,j) 和 (i,K) 分别用并联边 $(i,j)_1$ 和 $(i,j)_2$ 以及 $(i,K)_1$ 和 $(i,K)_2$ 表示，并有

$$f((i,j)_1)=y_{ij}, f((i,j)_2)=K \tag{4.47a}$$

$$f((i,K)_1)=y_{iK}, f((i,K)_2)=-K \tag{4.47b}$$

根据定理 4.3 和习题 4.2，直接得出 Y^* 元素 (K,K) 的代数余子式 Y^*_{KK} 由下式给出：

$$Y^*_{KK}=\sum_{t^*_K} f(t^*_K) \tag{4.48}$$

式中 t^*_K 是 G^* 中以 K 为参考点的有向树。

其次，分解 G^* 的所有有向树 t^*_K 的集 S 为下列三个不相接子集 S_1, S_2 和 S_3（它们的并是 S）：

S_1 $\{t^*_K; t^*_K$ 在 S 中，$(i,j)_2$ 和 $(i,K)_2$ 都不在 t^*_K 中$\}$，

S_2 $\{t^*_K$；t^*_K 在 S 中，不是 $(i,j)_2$ 在 t^*_K 中，就是 $(i,K)_2$ 在 t^*_K 中，而且在 t^*_K 中不存在从节点 j 到 i 的有向路径 $P_{ji}\}$

$S_3=\{t^*_K$；t^*_K 在 S 中，$(i,K)_2$ 和 P_{ji} 二者都在 t^*_K 中$\}$。

由于 G 可以从 G^* 中置 $K=0$ 而得到，故

$$Y_{KK}=\sum_{t^*_K} f(t^*_K) \tag{4.49}$$

对于 S_2 中的任何如下形式的 t^*_K，

$$t^*_{K_1}=(i,K)_2 \cup R \tag{4.50}$$

上式中 R 是从 t_{K_1} 中移去边 $(i,K)_2$ 而得的子图，在 S_2 中总是存在唯一的 $t^*_{K_2}$，因而

$$t^*_{K_2}=(i,j)_2 \cup R \tag{4.51a}$$

并有
$$f(t^*_{K_1}) = -f(t^*_{K_2}) \tag{4.51 b}$$
反之亦然，因此有

$$\sum_{t^*_K \in S_2} f(t^*_K) = 0 \tag{4.52}$$

注意 S_3 的元素 t^*_K 和 $G(Y)$ 中的有向 2-树 $t_{ij,K}$ 之间的一一对应关系，因而

$$t^*_K - (i,K)_2 = t_{ij,K} \tag{4.53a}$$

和
$$f(t^*_K) = -Kf(t_{ij,K}) \tag{4.53b}$$

最后，对于代数余子式 Y^*_{KK} 和 Y_{KK} 有下列关系式：

$$Y^*_{KK} = Y_{KK} - KY_{ij,KK} \tag{4.54}$$

因此、根据式（4.48），（4.49），（4.52）和（4.53）有

$$Y^*_{KK} = \sum_{t^*_K \in S_1} f(t^*_K) + \sum_{t^*_K \in S_2} f(t^*_K) + \sum_{t^*_K \in S_3} f(t^*_K)$$

$$= Y_{KK} + 0 - K\sum_{t_{ij,K}} f(t_{ij,K}) \tag{4.55}$$

比较式（4.54）和（4.55），定理直接得出。

这个定理和引理 4.2 的直接结果如下，它可以作为定理 4.4 的推广。

推论 4.12：对于 $P \neq r$ 和 $q \neq S$，

$$Y_{pq,rs} = \sum_{t_{pq,rs}} f(t_{pq,rs}) - \sum_{t_{ps,rq}} f(t_{ps,rq}) \tag{4.56}$$

证明：

$$Y_{pq,rs} = Y_{pq,rr} - Y_{ps,rr}$$

$$= \sum_{t_{pq,r}} f(t_{pq,r}) - \sum_{t_{ps,r}} f(t_{ps,r})$$

$$= \sum_{t_{pqs,r}} f(t_{pqs,r}) + \sum_{t_{pq,rs}} f(t_{pq,rs}) - \sum_{t_{psq,r}} f(t_{psq,r}) -$$

$$- \sum_{t_{ps,rq}} f(t_{ps,rq})$$

$$- \sum_{t_{pq,rs}} f(t_{pq,rs}) - \sum_{t_{ps,rq}} f(t_{ps,rq}) \tag{4.57}$$

推论证毕。

特别是，如果 Y 是对称的，公式（4.46）和（4.56）可以简化，而 $Y_{pq,rs}$ 可以由 Gu(Y) 的 2 树集求得。

推论 4.13：如果 Y 是对称的，则

$$Y_{pq,rs} = \sum_{t_{pq,rs}} f(t_{pq,rs}) - \sum_{t_{ps,rq}} f(t_{ps,rq}) \tag{4.58}$$

式中 $p \neq r$ 和 $q \neq S$，$t_{pq,rs}$ 和 $t_{ps,rq}$ 是伴随图 Gu(Y) 中的 2-树。

推论 4.14：如果 Y 是对称的，而且 $t_{pq,r}$ 是 Gu(Y) 中的 2 树，则

$$Y_{pq,rr} = \sum_{t_{pq,r}} f(t_{pq,r}) \tag{4.59}$$

式（4.59）的基本概念首先是由 MAXWELL[1892]提出的，由 MAYEDA 和 SESHU[1957]给出了严格的证明。在电网络理论中（第二章§6），它仅表明：无互感的线性无源网络的节点导纳矩阵中元素（p.q）的代数余子式等于网络的所有 2-树 $t_{pq,r}$ 的 2 树导纳乘积之和，这里 r 是参考电位点。像公式（4.32）一样，很明显，公式（4.59）比 MAXWELL 原来表示的形式更具有一般性，它适用于式(4.21)所示那种类型的任何对称的等代数余子式矩阵。注意到，如果式(4.21)的所有元素 Y_{ij} 都是相异的，则以上表示的公式不会产生互相抵消的冗余项。因此，它提供了计算节点导纳矩阵中元素的代数余子式的简捷算法。

推论 4.15：对于一个给定的有向图 G，有向树矩阵 D(G) 的元素（i，j）和（K.K）的二阶代数余子式 $D_{ij,KK}(G)$ 之值等于 G 中有向 2 树 $t_{ij,K}$ 的数目 $N(t_{ij,K})$。

用下面的例子来说明上述结果。

例 4.3：考虑例 4.1 中给出的题目，假定要求计算如图 4.2 所示的 G(Y) 中有向 2-树 $t_{13,4}$ 的数目 $N(t_{13,4})$，有向树矩阵 D(G) 在式 (4.36) 中给出，这里 G = G(Y)。根据推论 4.15，有下式：

$$
\begin{aligned}
N(t_{13,4}) &= D_{13,44}(G) \\
&= \operatorname{sgn}(1-4)\operatorname{sgn}(3-4)(-1)^{1+3+4+4}\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 4
\end{aligned}
\tag{4.60}
$$

因此，在 G(Y) 中有 4 个有向 2 树 $t_{13,4}$，它们如图 4.8 所示。根据定理 4.4，有

$$
\begin{aligned}
Y_{13,44} &= \sum_{t_{13,4}} f(t_{13,4}) \\
&= g_c G_b + G_b(g_e \quad \alpha g_e) + g_b G_b + (g_c \quad \alpha g_e) g_b \\
&\quad - G_b(g_c + g_e \quad \alpha g_e \quad g_b) \quad g_b(g_c \quad \alpha g_c)
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

如果需要求出二阶代数余子式 $Y_{12,43}$ 和 $Y_{11,44}$，则它们可以用类似的方法计算得出。根据推论 4.12 有

$$
\begin{aligned}
Y_{12,43} &= \sum_{t_{12,43}} f(t_{12,43}) \quad \sum_{t_{13,42}} f(t_{13,42}) \\
&\quad g_b(G_d + \alpha g_e) \quad G_b(g_e - \alpha g_e)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
Y_{11,44} &= \sum_{t_{1,4}} f(t_{1,4}) \\
&= g_c G_b \cdot G_b(g_e \quad \alpha g_e) \quad g_b G_b + (g_c - \alpha g_e) g_b \\
&\quad + g_b(G_d \quad \alpha g_e) \quad g_c(G_d + \alpha g_e) + (g_c \\
&\quad - \alpha g_e)(g_e \quad \alpha g_c) \quad (g_e \quad \alpha g_e)(G_d \quad \alpha g_e) \\
&\quad - (g_c \quad g_e \quad \alpha g_c + g_b)(G_b \quad G_d) + g_c(g_b + g_e)
\end{aligned}
\tag{4.62}
$$

只有一个 $t_{12,43}$ 如图 4.9(a) 所示，并只有一个 $t_{13,42}$ 如图 4.9(b) 所示，有 8 个 $t_{1,4}$，如图 4.8，4.9(a) 和 4.10。为了表明这些就是

有向 2 树 $t_{1,4}$ 的全部，仅需要计算二阶代数余子式 $D_{11,44}(G)$，根据式(4.36)，得到

$$N(t_{1,4}) = \operatorname{sgn}(1-4)\operatorname{sgn}(1-4)(-1)^{1+4+1+4}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \tag{4.63}$$

现在将把注意力转向推导出计算完备有向图中各种类型的有向2 树数目的公式，同样，也将考虑一个（无向）图中的 2 树的数目。

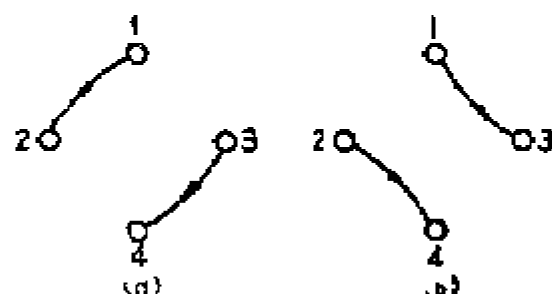


图 4.9 图4.2有向图的有向2 树 $t_{12,43}$ 和 $t_{13,42}$

推论 4.16：在 p 阶的 n 节点完备有向图中，如果 $i \neq j \neq K$，则有向 2 树 $t_{ij,K}$ 的数目

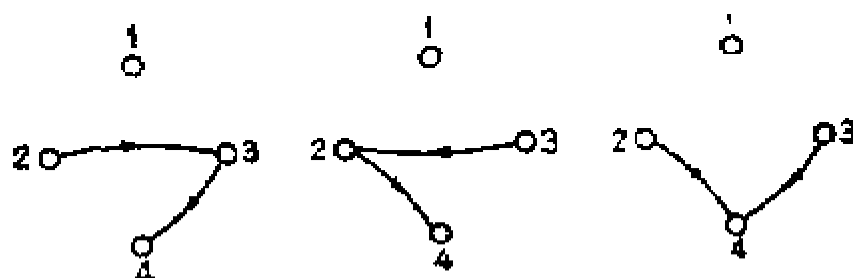


图 4.10 图4.2有向图的某些有向2-树 $t_{1,4}$

由下式给出

$$N(t_{ij,K}) = p(pn)^{n-3}, \tag{4.64}$$

而如果 $i \neq K$，则

$$N(t_{i,K}) = 2p(pn)^{n-3} \tag{4.65}$$

这些的公式证明类似于推论 1.8 的证明，它们的推广变型式见习题 4.22 和 4.23。

如果 G_s 是加权图 Gu 的伴随对称有向图，不难看到，节点 i 和 j 分离的 G_u 的 2 树 $t^u_{i,j}$ 和 Gs 的有向 2-树 $t_{i,j}$ 之间存在一一对应关系，这样 $f(t^u_{i,j}) = f(t_{i,j})$，因此得到以下推论：

推论 4.17： 在（无向）图 G_u 中，2 树 $t_{p,q}$ 的数目等于树矩阵 $D(G_u)$的元素(p,p) 和元素（q，q）的二阶代数余子式 $D_{pp,qq}(G)$ 之值。

因此，在阶为 p 的完备图中任何两个指定节点分离的 2 树，有 $2p\ (pn)^{n-3}$ 个。对于 p 1，Zn^{n-3} 也是对称等代数余子式矩阵(4.21)元素的二阶代数余子式的展开式中最大正项数。

例 4.4： 考虑例 4.2 中给出的问题、假定要求计算二阶代数余子式 $Y_{22,44}$、$Y_{21,44}$ 和 $Y_{23,44}$。由于 Y 是对称的，考虑图 4.6 的伴随图 Gu(Y)，Gu(Y)的 2-树 t_{x_2,x_4} 的数目 $N(t_{x_2,x_4})$等于例 4.2 中给出的树矩阵 D(Gu)元素的二阶代数余子式 $D_{22,44}$（Gu）之值：

$$D_{22,44}(Gu) = \operatorname{sgn}(2-4)\operatorname{sgn}(2-4)(-1)^{2+2+4+4}\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= 8 \tag{4.66}$$

因此，在 $G_u(Y)$中，有 8 个 2 树 t_{x_2,x_4}。由于 $G_u(Y)$也是完备图，则 $N(t_{x_2x_4})$就是 $2\cdot 4^{4-3}=8$。$G_u(Y)$的 8 个 2-树集 t_{x_2,x_4} 如图 4.11 所示，根据推论 4.14，有

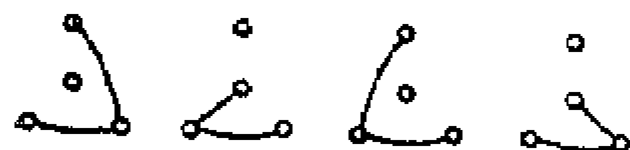
$$\begin{aligned} Y_{22,44} &= \sum f(t_{x_2,x_4}) \\ &= (m_1S^2+K_1)(m_3S^2+K_1) \quad (m_1S^2+K_1)K_0 + \\ &\quad - K_0(m_3S^2+K_1) \\ &\quad + K_0^2 + 2K_0K_2 + K_2(m_1S^2+K_1) - K_2(m_3S^2+K_1) \\ &\quad -(m_1S^2+K)(m_3S^2+K) \quad K_2^2 \end{aligned} \tag{4.67}$$

式中 $K = K_0+K_1+K_2$，类似地，可以计算 $Y_{21,44}$ 和 $Y_{23,44}$，所求的 $G_u(Y)$的 2 树集 $t_{x_2x_1,x_4}$ 和 $t_{x_2x_3,x_4}$ 可以在图 4.11 中找到，而且分别如图 4.12 和 4.13 所示，因此，

$$Y_{21,44} = \sum f(t_{x_2x_1,x_4}) = K_0(m_3S^2+K_1)+K_0^2 \quad 2K_0K_2 \tag{4.68}$$

和

$$Y_{23,44} = \sum f(t_{x_2x_3,x_4}) = (m_1S^2+K_1)K_0+K_0^2 \quad 2K_0K_2 \tag{4.69}$$



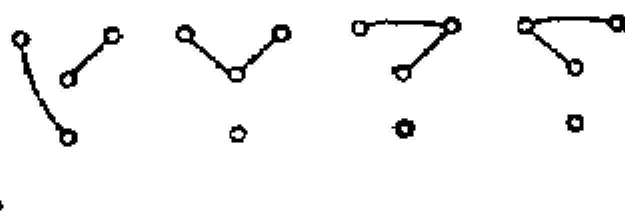


图 4.11　图 4.6 的 2-树集 $t_{x_2x_4}$　　　　图 4.12　2-树集 $t_{x_2x_3,x_4}$

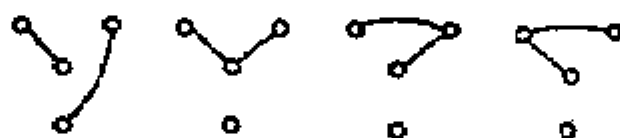


图 4.13　2-树集 $t_{x_1x_3,x_4}$



图 4.14　求式(4.70)中 $Y_{12,43}$ 的 2-树集

最后计算 $Y_{12,43}$、根据式(4.58)和图 4.14 得到

$$Y_{12,43}=\sum f(t_{x_1x_2,x_4x_3})-\sum f(t_{x_1x_3,x_4x_2})$$
$$=k_c(m_3s^2+k_1)-k_2(m_2s^2+cs) \qquad (4.70)$$

§ 3. 等效和变换

在前面我们已介绍了在等代数余子式矩阵的一阶和二阶代数余

子式的展开式中，它的各项和其伴随有向图的有向树集和有向2树集之间有密切关系。利用这些关系式，可以通过观察直接写出展开式，但是在应用导出的公式之前，进行伴随有向图的某些变换和简化有时是有利的。在这节中将表明怎样消去G的某些节点而不影响一阶和(或)二阶代数余子式之比，特别是这一方法可简化为电网络理论中著名的Y Δ变换(例如参见SHEN[1947])。步骤类似于第三章中所讨论的对COATES图和MASON图的简化，这方面首先是由CHEN[1967b]给出的。

对于一个给定的有向图G，设V_p是其节点集的非空真子集，设$G^*[V_p]$是从G中首先使不含于V_p中的所有节点短接为一个节点，然后移去由此产生的所有自环后所得的有向图，在$G^*[v_p]$中的组合节点用p表示。注意：符号$G^*[V_p]$类似于G的局部子图G$[v_p]$所用的定义(定义1.15)，差别是在目前情况下使用星号*，这不会产生任何困难。

有了这个定义，就可以建立下面的定理。

定理4.5：设G是式(4.21)的等代数余子式矩阵Y的伴随有向图，设V_p是其节点集的一个非空真子集，因而$G^*[v_p]$的伴随等代数余子式矩阵中元素的代数余子式k是非零的。如果v_p含有较少于n 1个节点($n\geq 3$)，则对于u，v，k=1，2，···，n以及k不在v_p中，有以下关系式：

$$Y_{uv} = \sum_{t_k} f(t_k) \quad k\sum_{t_k^r} f(t_k^r) \tag{4.71}$$

式中t_k和t_k^r分别是以k为参考点的G和Gr的有向树，而Gr是从G中由下列步骤所得的简化有向图：

(i) 从G中移去局部子图G$[V_p]$，即移去所有与v_p的任何节点相关联的节点和边，不在G中的边认为是具有零权的边。

(ii)对于所有不在v_p中的i和j($i\neq j$)，与Gr的边(i，j)相联系的权W_{ij}由下式给出：

$$w_{i,j,p} = (1/k)\sum_{t^*_{i,j,p}} f(t^*_{i,j,p}) \qquad (4.72)$$

而对于所有 i，有 $w_{ii}=0$，式中 $t^*_{i,j,p}$ 是 $G^*[V_p']$ 中类型为 $t_{i,j,p}$ 的有向2-树，而 V_p' 是集 V_p 和{i, j}的并集。

证明：由于对G的节点重新标号相当于Y中对应的行和列的互换，不失一般性，可以假定矩阵Y可以以这样的方式分块，使 C_{11} 对应于节点集 V_p，它具有n个节点：

$$Y = [c_{ij}] = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \qquad (4.73)$$

式中 C_{11} 和 C_{22} 分别是阶为h和n－h的方子阵，而 C_{11} 是非奇异的(注意：C_{ij} 不再表示从C中划去第i行和第j列所得的子阵，这不会产生任何混淆，因为它仅在这个证明中出现)。

很容易证明对于h<u以及v≤n，下列两恒等式成立(习题4.28)：

$$\begin{bmatrix} U_h & 0 \\ -C_{21}C_{11}^{-1} & U_{n-h} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} \\ 0 & C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} \end{bmatrix} \qquad (4.74)$$

和

$$Y_{uv} = (-1)^{u+v}(\det C_{11})\det(C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12})_{uv} \qquad (4.75)$$

式中 $(C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12})_{uv}$ 表示从 $(C_{22}-C_{21}C_{11}^{-1}C_{12})$ 中划去第u行和第v列后所得的子矩阵，而 U_h 是阶为h的单位矩阵。

对于k, t = 1, 2，令

$$C_{kt} = [c^{kt}_{ij}] \qquad (4.76)$$

式中下标i和j是行和列的记号。

对于i=h+1, h+2, …, n，有

$$[w''_{ij}] = (\det C_{11})(C_{22} - C_{21}C^{-1}_{11}C_{12}) \tag{4.77}$$

$$A_i = [c_{i1} \quad c_{i2} \quad \cdots \quad c_{ih}] \tag{4.78}$$

而对于 $j = h+1, h+2, \cdots, n$，

$$B_j' = [c_{1j} \quad c_{2j} \quad \cdots \quad c_{hj}] \tag{4.79}$$

式中撇号表示矩阵的转置。根据式(4.76)和(4.77)，可得：

$$\begin{aligned}
w''_{ij} &= (\det C_{11})c^{22}_{ij} - \sum_{k_1=1}^{h}\sum_{k_2=1}^{h}(-1)^{k_1+k_2} c^{21}_{ik_1}M''_{k_2k_1}c^{12}_{k_2j} \\
&= c^{22}_{ij}(\det C_{11}) + \sum_{k_1=1}^{h}(-1)^{k_1+h+1}c^{21}_{ik_1}\left(\sum_{k_2=1}^{h}(-1)^{k_2+h}c^{12}_{k_2j}M''_{k_2k_1}\right) \\
&= c^{22}_{ij}(\det C_{11}) + \sum_{k_1=1}^{h}(-1)^{k_1+h+1}c^{21}_{ik_1} \det[C_{11} \quad B_{j+h}]_{k_1} \\
&= c^{22}_{ij}(\det C_{11}) + \sum_{k_1=1}^{h}(-1)^{k_1+h+1}c^{21}_{ik_1}\det \begin{bmatrix} C_{11} & B_{j+h} \\ A_{i+h} & c^{22}_{ij} \end{bmatrix}_{(h+1)k_1} \\
&= \det \begin{bmatrix} C_{11} & B_{j+h} \\ A_{i+h} & c^{22}_{ij} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

式中 $M''_{k_2k_1}$ 是 C_{11} 的第 k_2 行、第 k_1 列子式，$[C_{11}B_{j+h}]_{k_1}$ 是从矩阵$[C_{11}B_{j+h}]$中划去 k_1 列所得矩阵，而

$$\begin{bmatrix} C_{11} & B_{j+h} \\ A_{i+h} & c^{22}_{ij} \end{bmatrix}_{(h+1)k_1} \tag{4.81}$$

是从下式矩阵划去第$(h+1)$行和第 k_1 列所得的矩阵，

$$\begin{bmatrix} C_{11} & B_{,+h} \\ A_{,h} & c^{22}_{,,} \end{bmatrix} \quad (4.82)$$

因此，$\sum_{i=1}^{n-h} w''_{ij} = \sum_{j=1}^{n-h} \det$

$$\begin{bmatrix} C_{1,} & B_{,+h} \\ A_{,,} & c^{22}_{,,} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} C_{11} & B_{h+1} + B_{h+2} + \cdots + B_n \\ A_{,+h} & c^{22}_{,1} \quad c^{22}_{,2} + \cdots + c^{22}_{,(n-h)} \end{bmatrix}$$

$$= \det\begin{bmatrix} C_{11} & 0 \\ A_{,+h} & 0 \end{bmatrix} = 0 \quad (4.83)$$

最后一式是将前面的 h 列加到第(h+1)列上，然后应用 Y 是等代数余子式矩阵这一事实得到的。

类似地，可以证明下式：

$$\sum_{j=1}^{n-h} w''_{ij} = 0 \quad (4.84)$$

因此，式(4.77)的$[w''_{ij}]$是阶为(n-h)的等代数余子式矩阵，并且是式(4.21)的类型。

其次，考虑下列等代数余子式矩阵

$$\begin{vmatrix} C_{11} & B_{,+h} & B_{,+h} & \sum B_x \\ A_{,+h} & C^{22}_{,,} & c^{22}_{,,} & \sum c^{22}_{,x} \\ A_{,+h} & c^{22}_{,,} & c^{22}_{,,} & \sum c^{22}_{,x} \\ \sum A_x & \sum c^{22}_{x,} & \sum c^{22}_{x,} & c \end{vmatrix} \quad (4.85\text{a})$$

式中 i=j，以及

$$-c = \sum\left[\left(\sum_{q=1}^{h} c_{xq}\right) + c^{22}_{x} + c^{22}_{x,} \right] \quad (4.85\text{b})$$

(参见习题4.55)。式中未加标号的求和式从 $x=h+1$ 取到 $x=n$，但 $x\neq i+h$ 和 $x\neq j+h$。

显然，式(4.85a)的伴随有向图实际上对应于$G^*[V_p]$，式(4.85a)的第$(h+1)$和第$(h+2)$行和列分别对应于$G^*[V_p^{ij}]$的节点i和j，第$(h+3)$行和列对应于节点p。由于$-w''_{ij}$是式(4.85a)的元素c^{22}_{ij}和c的二阶代数余子式，从而根据定理4.4有

$$-w''_{ij}=\sum_{t^*_{ij,p}} f(t^*_{ij,p}) \tag{4.86}$$

因此，根据式(4.72)，$w''_{ij}=kw_{ij}$。由于$k=\det C_{11}$，根据式(4.77)，Gr实际上是等代数余子式矩阵$(1/k)\times[w''_{ij}]$的伴随有向图。由于$(1/k)[w''_{ij}]$的元素(u,v)的代数余子式通过式(4.75)及式(4.77)与Y_{uu}相联系，根据定理4.3即得到恒等式(4.71)，定理证毕。

幸而，在式(4.72)中根据提出的过程，用观察比用语言来描述更容易，这只要研究一下它的拓扑结构就可以体会到。总的说来，在简化的有向图G中，与边$(i,j)(i\neq j)$相联系的权等于常数$(1/k)$乘上$G^*[V_p^{ij}]$中与$t_{ij,p}$类型的有向2-树的边相联系的权的乘积之和。

推论 4.18：如果$V_p=\{k\}$，则对于所有的$i,j\neq k$，有

$$w_{ij}=-y_{ij}+y_{ik}y_{kj}\left(\sum_{\substack{x=1\\x\neq k}}^{n} y_{kx}\right) \tag{4.87}$$

式中y_{ij}是与G的边(i,j)相联系的权。

在电网络理论中，推论4.18可以认为是对于有互感的有源网络的Y-Δ变换，定理4.5的用途在下面可见。

定理 4.6：对于不在V_p中的i，j和k，二阶代数余子式$Y_{ij,kk}$由下式给出：

$$Y_{ij,kk}=\sum_{t_{ij,k}} f(t_{ij,k})=k\sum_{t^r_{ij,k}} f(t^r_{ij,k}) \tag{4.88}$$

式中 $t_{i,j,k}$ 和 $t'_{i,j,k}$ 分别是 G 和 Gr 中 $t_{i,j,k}$ 类型的有向 2 树。

Gr 实际上是代数余子式矩阵 $(1/k)[w''_{ij}]$ 的伴随有向图，定理就是据此得出的，其证明其细节留作练习（习题 4.34）。

因此，根据定理 4.5 和 4.6，得到下列结论：

推论 4.19：对于所有不在 V_r 中的 i，j 和 k，一阶代数余子式和二阶代数余子式之比和任何二个二阶代数余子式之比在 G 和 Gr 中都保持相等。

我们将用下面的例子说明以上结论。

例 4.5：*考虑如图 4.15 所示的有向图 G，它表示一般电器反馈*放大器的伴随有向图。假定 $V_p=\{4\}$，利用定理 4.5 中所概述的步骤，从 G 中移去节点 4 所得的对应简化有向图 G_r 如图 4.16 所示，与 G_r 的边(i，j)相联系的权 w_{ij} 从式(4.87)得到，且由下列给出：

$$w_{12}=w_{21}=y_1 \tag{4.89a}$$

$$w_{23}=y_f \tag{4.89b}$$

$$w_{32}=(y_f-g_m)+(y_p+g_m)g_m/k \tag{4.89c}$$

$$w_{35}=y_2+(y_p+g_m)y_k/K \tag{4.89d}$$

$$w_{53}=y_2+y_k y_p/K \tag{4.89e}$$

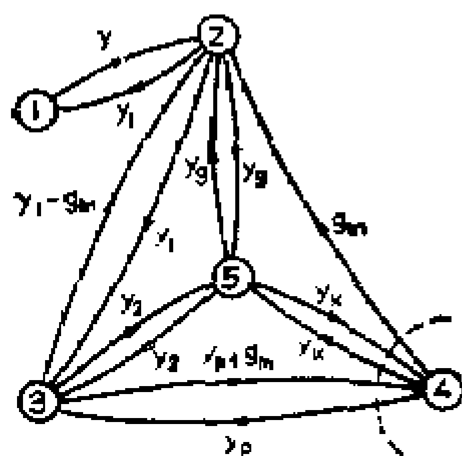
$$w_{25}=y_g \tag{4.89f}$$

$$w_{52}=y_g+y_k g_m/K \tag{4.89g}$$

而其他的 $w_{ij}=0$，式中 $k=y_p+g_m+y_k$。记住：不含于 G 中的边认为是具有零权的边。例如，如果 G 中存在权为 y_{14} 的边(1.4)，则在 Gr 中会存在权为 $W_{13}=0+y_{14}y_p/K=y_{14}y_p/K$ 的边(1.3)。

假定要利用定理 4.5 中所概述的步骤，同时移去节点 3 和 4，那么 $V_p=\{3.4\}$，而得出简化有向图 Gr 如图 4.17 所示，为了简明这一方法，试计算 Gr 的边权 w 。

常数 K 等于图 4.18 所示有向图 G*[3.4]的伴随等代数余子式矩阵中元素的代数余子式之值，为了避免下面发生混淆，使用 k′ 表示这个常数。



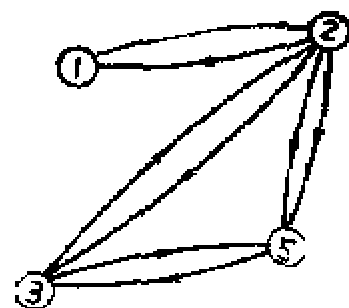


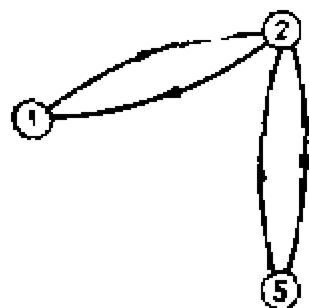
图 4.15 反馈放大器的伴随有向图

图 4.16 由移去节点4所得的简化有向图

$$K' = \sum_{4*P} f(t_p^*) \cdot \sum_{4*4}$$

$$f(t^*_4) \cdot \sum_{3*3} f(t^*_3)$$

$$= (y_f \quad y_2)y_p + (y_k + g_m)(y_f + Y_2) + y_k y_p \qquad (4.90)$$



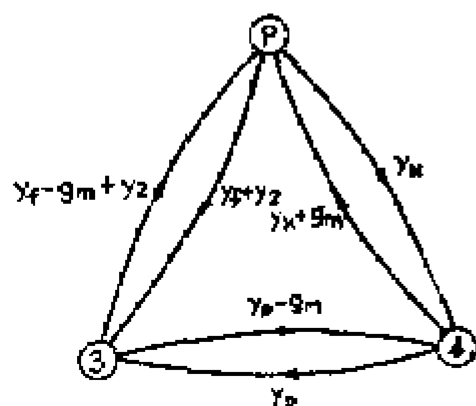


图 4.17 移去节点3和4所得的简化有向图

图 4.18 有向图 G*[3, 4]

式中 G*[3.4]的有向树 t^*_3 用于式(4.90)的计算中，以便避免对消。由于 G 仅有 5 个节点，从而对于 i，j=1，2 和 5，有 G*[V,ij] = G，因此有

$$K'w_{12}=\sum_{t_{21,5}} f(t_{21,5})$$

$$=y_1(y_p+g_m)y_k+y_1y_py_2+y_1y_2y_k+y_1(y_p+g_m)g_m$$
$$+y_1g_my_2+y_1(y_f+g_m)y_p+y_1(y_f-g_m)g_m+y_1$$
$$(y_f+g_m)y_k=K'y_1 \tag{4.91}$$

$$K'w_{21}=\sum_{t_{12,5}} f(t_{12,5})=\sum_{t_{21,5}} f(t_{21,5})$$
$$=K'y_1 \tag{4.92}$$

$$K'w_{25}=\sum_{t_{52,1}} f(t_{52,1})=\sum_{t''} f(t_1'')=\sum_{t_3''} f(t_3'')$$
$$=g_my_fy_g+g_my_fy_2+g_my_fy_k+y_fy_py_g+y_fy_py_2$$
$$+y_fy_py_k+y_fy_ky_g+y_fy_ky_2+g_my_gy_2+y_gy_py_2$$
$$+y_gy_py_k+y_gy_ky_2$$
$$=K'y_g+y_f[y_2(y_p+y_k+g_m)+y_py_k+g_mg_k]$$
$$\tag{4.93}$$

式中 t_3'' 是向部子图 G[2,3,4,5]中以 i 为参考点的有向树。由于G[2,3,4,5]的伴随矩阵是等代数余子式矩阵，参考点 i 的选择是任意的。但是在式(4.93)中选 i=3 来计算，这样对消的冗余项可以避免，最后有

$$K'w_{52}=\sum_{t_{25,1}} f(t_{25,1})=\sum_{t_1''} f(t'')=K'w_{25} \tag{4.94a}$$

$$K'w_{15}=\sum_{t_{51,2}} f(t_{51,2})=0 \tag{4.94b}$$

$$K'w_{51}=\sum_{t_{15,2}} f(t_{15,2})=0 \tag{4.94c}$$

利用式(4.87)，与简化有向图 Gr 的边相联系的权也可以直接从图4.16给出的有向图中通过移去节点3而求得。作为一个例子，利用式(4.89)来计算 w_{25}、w_{12} 和 w_{15}(同样参见习题4.66)。

$$w_{25} = y_g - y_f[y_2 + y_k(y_p + g_m)/K]/K''$$
$$= -y_g + y_f[y_2(y_p + y_k + g_m) + y_p y_k + g_m y_k]/K' \tag{4.95a}$$

$$w_{12} = y_1 \tag{4.95b}$$

$$w_{15} = 0 \tag{4.95c}$$

式中 $K'' = (y_f - g_m) g_m(y_p + g_m)/K + y_2 + y_k(y_p + g_m)/K$ (4.96)

因此，根据式(4.71)和(4.88)，一阶代数余子式 Y_{ij} 和二阶代数余子式 $Y_{11,55}$ 及 $Y_{12,55}$ 可以从图 4.17 中得出：

$$Y_{11} = K' \sum_{t_{11}^r} f(t_{11}^r) = K' w_{12} w_{25} \tag{4.97}$$

$$Y_{11,55} = K' \sum_{t_{11,55}^r} f(t_{11,55}^r) = K'(w_{21} + w_{25}) \tag{4.98}$$

$$Y_{12,55} = K' \sum_{t_{12,55}^r} f(t_{12,55}^r) = K' w_{21} \tag{4.99}$$

这些一阶二阶代数余子式之比都在G和Gr中保持不变。

象前面所讨论的情况那样，当G的伴随等代数余子式矩阵是对称时，有向图G和Gr均可以简化，并且简化为无向图。

推论 4.20：如果式(4.21)的Y是对称的，则

$$Y_{uv} = \sum_{t} f(t) = K \sum_{t^r} f(t^r) \tag{4.100}$$

$$Y_{ij,kk} = \sum_{t_{ij,k}} f(t_{ij,k}) = K \sum_{t^r_{ij,k}} f(t^r_{ij,k}) \tag{4.101}$$

式中 t 和 t^r 分别是伴随有向图 $G_u(Y)$ 和简化图 G_{ur} 的树，而 $t_{ij,k}$ 和 $t^r_{ij,k}$ 分别是 G_u 和 G_{ur} 中 $t_{ij,k}$ 类型的2-树，K 是 $G_u^*[V_p]$ 的伴随等代数余子式矩阵中元素的代数余子式，其中 V_p 是含有少于 n－1 个节点的 G_u 节点集的非空子集，符号 $G_u^*[V_p]$ 再一次表示是从 G_u 中首先将不在 V_p 中的所有节点短接起来，用 p 表示这一组合节点，然后移去由此产生的自环所得的图，而 G_{ur} 是从 G_u 中由下列步骤而得到的简化图：

(i) 移去局部子图 $G_a[V_p]$，不在 G_a 中的边被认为具有零权的边。

(ii) 对于不在 V_p 中的 i 和 j ($i \neq j$)，与 G_{ar} 的边(i,j)或(j,i)相联系的权 w_{ij} 由下式给出：

$$w_{ij} = (1/K)\sum_{t^*_p} f(t^*_{ij,p}) \tag{4.102}$$

而对于所有 i，有 $w_{ii} = 0$，式中 $t^*_{ij,p}$ 是 $G^*_a[V_p{}^{ij}]$中 $t_{ij,p}$ 类型的 2-树，而 $V_p{}'$ 是集 V_p 和{i,j}的并集。

注意：式(4.101)和(4.102)的 2 树中下标的次序是无关重要的。

推论 4.21：如果 $V_p = \{k\}$，则对所有的 $i,j \neq k$ 有

$$w_{ij} = y_{ij} + y_{ik}y_{kj}/(\sum_{\substack{x \\ x\neq k}}^{n} y_{kx}) \tag{4.103}$$

式中 y_{ij} 是与 G_a 的边(i,j)相联系的权。

如果 Y 是无互感线性无源网络的不定导纳矩阵，则公式(4.103)就是网络理论中著名的 Y-Δ变换，是由 SHEN[1947]首先提出的，但是式(4.103)也适用于有互感的网络。因此，推论 4.20 可以认为是推广的 Y Δ 变换，而定理 4.5 是推论 4.20 对于有源网络的推广，正如将在§6 中所看到的那样，原因在于网络函数总是可以表示为一阶和(或)二阶代数余子式之比。

可由下面的例子来说明以上方法。

例 4.6：考虑如图 4.19 所示的网络或图 G_a，假定 $V_p = \{1,2\}$，利用推论 4.20 中概述的方法移去节点 1 和 2 所得的对应简化图 G_{ar} 如图 4.20 所示，与 G_{ar} 的边相联系的权 w_{ij} 根据式(4.102)求得。为了举例说明，对权 w_{34} 和 w_{35} 的求取将作出详细推导。

常数 K 是图 4.21 的图 $G^*_a[1,2]$的伴随等代数余子式矩阵元素的代数余子式，利用式(4.32)有：

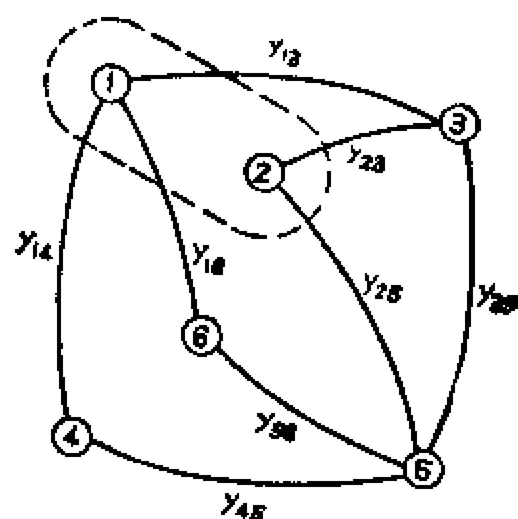


图 4.19 电网络

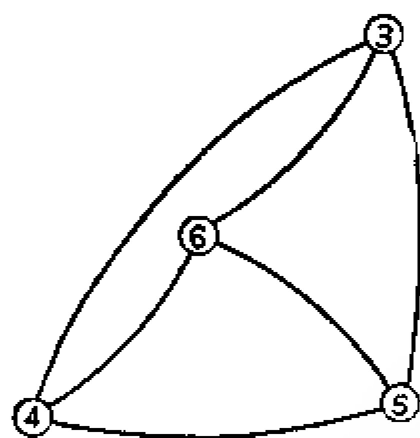


图 4.20 移去节点 1 和 2 所得的简化网络

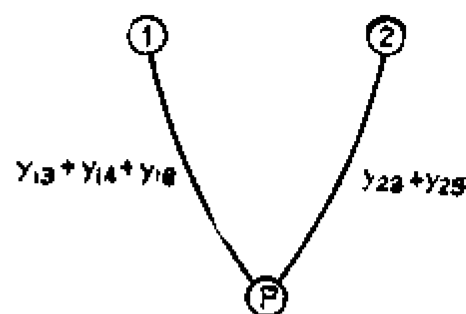


图 4.21 图 4.19 网络的图 $G_u^*[1,2]$

$$K=\sum_{t^*} f(t^*)$$

$$=(y_{13}+y_{14}+y_{16})(y_{23}+y_{25}) \qquad (4.104)$$

式中 t^* 是 $G_u^*[1, 2]$ 的树，根据图 4.22 和 4.23 得到：

$$\mathbf{kw}_{34}=\sum_{t^*_{34,p}} f(t^*_{34,p})$$

$$=y_{13}y_{14}y_{25}+y_{13}y_{14}y_{23} \qquad (4.105)$$

$$kw_{35}=\sum_{t^*_{35,p}} f(t^*_{35,p})$$

$$=y_{35}y_{25}y_{13}+y_{35}y_{13}y_{23}+y_{35}y_{25}(y_{14}+y_{16})$$
$$+y_{35}y_{23}(y_{14}+y_{16})+y_{23}y_{25}(y_{14}+y_{16})$$
$$+y_{23}y_{25}y_{13}$$
$$=(y_{35}y_{25}+y_{35}y_{23}+y_{23}y_{25})(y_{13}+y_{14}+y_{16}) \quad (4.106)$$

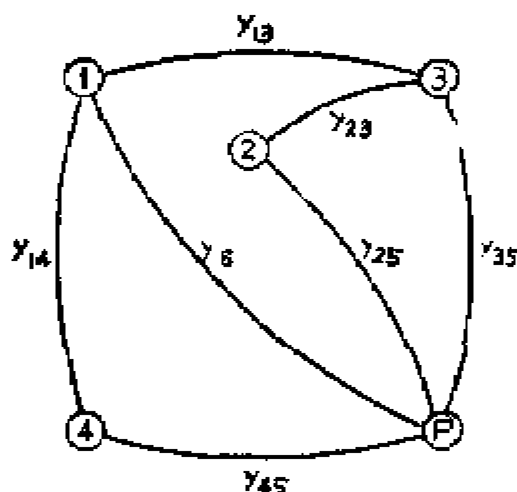


图 4.22 图 $G_1^*[1,2,3,4]$

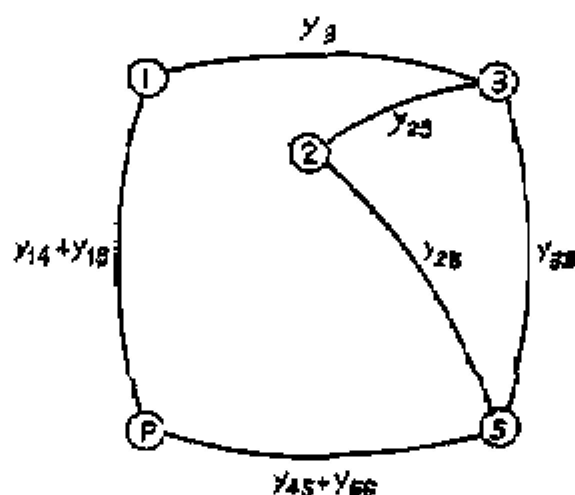


图 4.23 图 $G_2^*[1,2,3,5]$

式中 $t^*_{34,p}$ 和 $t^*_{35,p}$ 分别是图 G_1^*[1、2、3、4]和 G_2^*[1、2、3、5]中的2-树，类似地、得到

$$kw_{36}=y_{16}y_{13}y_{25}+y_{16}y_{13}y_{23} \quad (4.107)$$

$$kw_{45}=y_{45}y_{25}y_{14}+y_{45}y_{25}(y_{13}+y_{16})+y_{45}y_{23}y_{14}+y_{45}y_{23}(y_{13}+y_{16})$$
$$=(y_{13}+y_{16}+y_{14})(y_{45}y_{25}+y_{45}y_{23}) \quad (4.108)$$

$$kw_{46}=y_{14}y_{13}y_{23}+y_{14}y_{16}y_{25} \quad (4.109)$$

$$kw_{56}=y_{56}y_{13}y_{25}+y_{56}y_{23}(y_{13}+y_{14})+y_{56}y_{16}y_{23}+y_{56}y_{25}(y_{16}+y_{14})$$
$$=(y_{13}+y_{14}+y_{16})(y_{56}y_{23}+y_{56}y_{25}) \quad (4.110)$$

因此，根据式(4.100)和(4.101)，网络的不定导纳矩阵元素的一阶代数余子式 Y_i 和二阶代数余子式 $Y_{33,55}$ 和 $Y_{44,55}$ 由下式给出：

$$Y_{ij} = k\sum_{t'} f(t')$$

$$= k[w_{56}(w_{34}+w_{46})(w_{35}+w_{56}) + w_{36}w_{45}(w_{34}+w_{46})$$

$$+ w_{36}w_{45}(w_{35}+w_{56}) + w_{34}w\quad(w_{35}\quad w_{45}+w_{55})$$

$$+ w_{34}w_{45}w\quad w_{35}w_{45}w_{56}\quad w_{34}w_{46}(w_{34}\quad w_{4}\quad w_{4})], \tag{4.111}$$

$$Y_{33,55} = k\sum_{t'_{3,5}} f(t'_{3,5})$$

$$= k[(w_{34}+w_{45})(w_{3}+w_{56}) + w_{5}(w_{34}+w_{45}) + w_{46}(w_{36}$$

$$+ w_{56})], \tag{4.112}$$

$$Y_{34,56} = k\sum_{t_{34,56}} f(t'_{34,56})$$

$$= k[w_{36}w_{16} + w_{34}w_{36} + w_{34}w_{16} + w_{34}w_{56}]. \tag{4.113}$$

§ 4. 伴随有向图和 COATES 图

到现在为止，已经得出一阶和二阶代数余子式 Y_{ij}和 $Y_{pq,rs}$展开式中的项是怎样与伴随有向图 G(Y)的有向树和有向 2 树相联系的，并指出 G(Y)可以怎样简化以使代数余子式之比保持不变。在这一节中，我们将说明怎样从 COATES 图公式中得到这些公式，这是合乎逻辑的，因为它们都与行列式的展开式有关，我们的论述主要根据 Chen[1967 b]的研究成果。

4.1 有向树，1-因子和部分因子

由于 Y 是如式(4.21)所示类型的等代数余子式矩阵，则仅考虑代数余子式 Y_{nn}就足够了。

设 G_c是 Y 的子矩阵 Y_{nn}的伴随 COATES 图，显然 G_c具有 n−1 个节点，对于 i≠j，与 G_c的边(i, j)联系的权由下式给出：

$$f(i,\ j) = -y_{ji} \tag{4.114}$$

$$f(i,\ i)\ \sum_{\substack{x=1\\x\neq i}}^{n} y_{ix} \tag{4.115}$$

式中i、j=1、2，…，n－1。对此，G_c的自环(i，i)区分为n－1了自环，由符号$(i,\ i)_k$表示，k=1，2，…，n，但k≠i，这样对所有i有

$$f((i,\ i)k)\ \ y_{ik} \tag{4.116}$$

作为一个例子，考虑式(4.21)的4阶等代数余子式矩阵Y，Y_{44}的伴随COATES图G_c以与上面概述的稍微不同形式画出，如图4.24所示。在节点1的自环分别由具有权为y_{12}，y_{13}和y_{14}的$(1.1)_2$、$(1.1)_3$和$(1.1)_4$表示。

利用第三章所讨论的COATES图方法，代数余子式Y_{nn}由定理3.1中所给的公式计算得出：

$$Y_{nn}=\sum_{h}(-1)^{q}f(h) \tag{4.117}$$

式中h是G_c的1因子，q是h中的偶片数。

如在第三章§3中所述那样，式(4.117)的展开式不是非常有效的，因为存在大量的对消项。例如，应用公式(4.117)展开(4.22)的代数余子式Y_{44}产生38项，其中22项相互之间对消。在下面我们将首先描述Y_{nn}的最终展开式中不会出现的那些G_c的1因子，然后证明剩下的1因子怎样与G(Y)的有向树相联系。

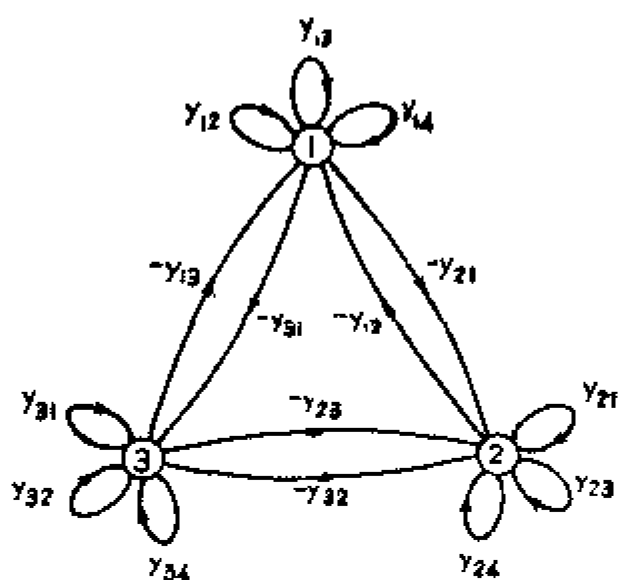


图4.24 式(4.21)的四阶等代数余子式矩阵的伴随有向图

定义 4.13：圈 1-因子

COATES 图的 1-因子，只要它仅含有以下形式的自环：

$$(i_1, i_1)_{k_1}, (i_2, i_2)_{k_2}, \cdots (i_j, i_j)_{k_j} \tag{4.118}$$

就称为是圈，存在一组 k 的记号 $k_{t_1}, k_{t_2}, \cdots, k_{t_u}(u \geqslant 2)$ 和对应的一组具有 $i_{t_{v+1}} = k_{t_v}(v=1, 2, \cdots, u-1)$ 以及 $i_{t_1}=k_{t_u}$ 的 i 的记号 $i_{t_1}, i_{t_2}, \cdots i_{t_u}$，这里 j 和 u 都是正整数。

例如，在图 4.24 的 COATES 图中，由 G_c 乘自环 $(1.1)_2 (2.2)_3$ 和 $(3.3)_1$ 组成的 1-因子是圈，因为存在一组记号 2，3 和 1，以及具有以上性质的记号 1，2 和 3 的对应集。1 因子 $(1.1)_3 \cup (2.2)_2 \cup (3.3)_1$ 也是圈，但 $(1.1)_1 \cup (2.2)_1 \cup (3.3)_2$ 不是圈。

引理 4.3：设 h_1 至少含有一个长度大于 1 的有向回路的 G_c 的 1-因子，那么，在 G_c 中存在一个 1-因子 $h_2(h_2 \neq h_1)$，这样有：

$$-(-1)^{q_1} f(h_1) = (-1)^{q_2} f(h_2), \tag{4.119}$$

式中 q_1 和 q_2 分别是 h_1 和 h_2 中的偶片数。

证明：设 L_1 是 h_1 中长度为 $k\ (k \geqslant 2)$ 的有向回路，设 E 是 h_1 中 L_1 的补，则 $h_1 = L_1 \cup E$。同样设

$$L_1 = (j_1, j_2) \cup (j_2, j_3) \cup \cdots \cup (j_k, j_1) \tag{4.120 a}$$

$$L_2 = (j_2, j_2)_{j_1} \cup (j_3, j_3)_{j_2} \cup \cdots \cup (j_1, j_1)_{j_k} \tag{4.120 b}$$

从而 $h_2 = L_2 \cup E$ 也是 G_c 的 1 因子。由于

$$(-1)^{q_1} f(h_1) = (-1)^{q_L + q_e} (-1)^k y_{j_2 j_1} y_{j_3 j_2} \cdots y_{j_1 j_k} f(E) \tag{4.121}$$

$$(-1)^{q_2} f(h_2) = (-1)^{q_e} y_{j_2 j_1} y_{j_3 j_2} \cdots y_{j_1 j_k} f(E) \tag{4.122}$$

式中 q_L 和 q_e 分别是子图 L_1 和 E 中的偶片数，于是引理直接从 $(-1)^{k-1} = (-1)^{q_L}$ 得出。

设 H 是所有 G_c 的 1 因子的集合，并设 H^* 是 H 的子集，对于 H^* 中每一个 h^*，要求 h^* 不是圈 1 因子，就是至少含有长度大于 1 的有向回路，那么有

定理 4.7：

$$\sum_{h^*}(-1)^{q^*}f(h^*)=0 \tag{4.123}$$

式中 h^* 是 H^* 的元素，q^* 是 h^* 中的偶片数。

证明：设 $h_i=L\cup E$ 是 H^* 中这样的元素，它不存在 $h_i'=L'\cup E'$，在 H^* 中也不存在，它具有 L 是 L' 的真子图性质，这里 L 和 L' 分别是 h_i 和 h_i' 中由长度≥2的所有有向回路组成的 h 和 h' 的子图，而 E 和 E' 分别是 h 和 h_i' 中 L 和 L' 的补。

对于 G_c 中的每一个边$(i, j)(i\neq j)$，在 G_c 中也存在唯一的对应自环(j, j)。如果在 G_c 中对长度≥2的有向回路 L_x，将 L_x 中的边用与它们对应的唯一自环进行替换，并定义 L_x' 为这样获得的有向图，那么对于每一个 h_i 的选择，存在 2^m 个 H^* 的1-因子，1-因子可以由以上所述的运算获得，这里 m 是 L 中 h_i 的有向回路数。换言之，如果 S_i 是可以从 h_i 中由以上运算而产生的 H^* 的1-因子子集，那么

$$S_i=\{h: h=L'_{i1}\cup\cdots\cup L'_{ix}\cup L_{j1}\cup\cdots\cup L_{j_{m-x}}\cup E\}, \tag{4.124}$$

式中 L_1、L_2，…和 L_m 是 L 的 m 个有向回路，而 $i_1i_2\cdots i_x$ 和 $j_1j_2\cdots j_{m-x}$ 是整数1，2，…，m 的互补记号。从而可以说，S_i 的一半元素含有 L_1，其它的一半并不含有。在前面一半的每一个元素中用 L_1' 替换 L_1，就可得到后面的一半，因此，根据引理4.3，有

$$\sum_{h\in S_i}(-1)^{q}f(h)=0. \tag{4.125}$$

式中 h 是 S_i 的元素，而 q 是 h 中的偶片数。

如果对 H^* 中所有的 h_i 重复这一步骤，显然 H^* 中的元素可以划分为具有以上性质的一系列不相接子集 S_i，从这里定理直接得出。

以上定理的直接结果用于下述证明中，它证明了 H 的未消去的1-因子怎样与伴随有向图 $G(Y)$ 中有向树和COATES图的改进COATES图 G_c' 中部分因子的关系。为了方便起见，设 T_p 和 S 分

别是 G(Y) 和 G_c' 的有向树集 t_n 和部分因子集 R，那么有

定理 4.8：在(H H*)的元素 h 和 T_n 的元素 t_n(或 S 的 R)之间存在一一对应的关系，结果有：

$$f(h) = f(t_n) = (-1)^{q_R} f(R), \tag{4.126}$$

式中 q_R 是 R 中的偶片数。

证明：对于所有的 $i \neq j$，如果把 G_c 中每一条边 (i, j)，和 G(Y) 中边 (i, j) 连系起来，立即得出与 G(Y) 中 h 相对应的图 t_n 是以 n 为参考点的有向树。因为如果不是这样，则 t_n 必定含有长度 ≥2 的有向回路。这就意味着 h 是 G_c 的圈 1 因子，这样它不可能在(H H*)中出现，而这是矛盾的。因此，在(H H*)的元素和 T_n 之间存在一一对应关系。由于在 G_c 中 $f((i, i_j)) = y_{ij}$，及在 G(Y) 中，$f(i, j) = y_{ij}$，从而有 $f(h) = f(t_n)$。类似地，可以证明对于 G_c' 中部分因子的情况，细节留作练习(习题 4.33)，定理证毕。

因此，对于 i, j, k = 1, 2, …n，式(4.21)所示类型的 Y 元素的代数余子式 Y_{ij} 可以用下列三个公式的任何一个展开：

$$Y_{ij} = \sum_h (-1)^q f(h) \tag{4.127 a}$$

$$= \sum_{t_k} f(t_k) \tag{4.127 b}$$

$$= \sum_k (-1)^{q_R} f(R), \tag{4.127 c}$$

式中 h，t_k 和 k 分别是 G_c，G(Y)，和 G_c' 的 1 因子，有向树和部分因子，q 和 q_R 分别是 h 和 k 中的偶片数。

作为一个例子，考虑式(4.21)的 4 阶等代数余子式矩阵 Y。如以上所述如果代数余子式 Y_{44}，由公式(4.127 a)展开，在对消之前共有 38 项，其中 22 项相互消去，余下的 16 项与图 4.25 的伴随有向图 G(Y)的有向树 t_4 或与图 4.26 的改进 COATES 图 G_c' 的部分因子处于一一对应关系。

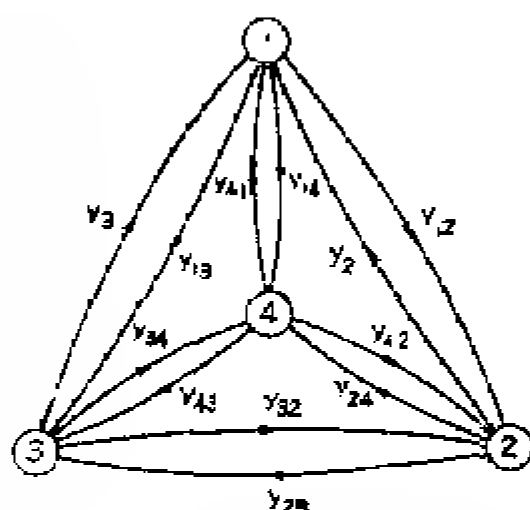


图 4.25 式(4.21)的4阶等代数余子式矩阵的伴随有向图

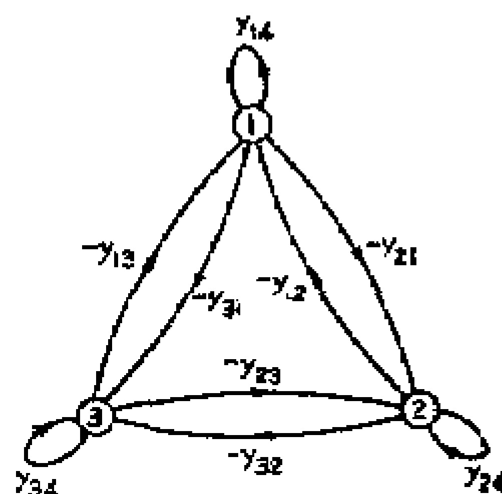


图 4.26 图4.25的COATES图的改进COATES流图

换言之，使用有向树和部分因子的拓扑公式实际上与COATES图及MASON图的那些公式相同，但前者仅仅针对后者的未消去的1因子。因此，就式（4.21）的等代数余子式矩阵而论，式（4.127）的后面两个公式对计算其元素的代数余子式是最佳的，因为在这些代数余子式的展开式中，通常内在的对消项可以避免，因此，它们可以特别有效地用于分析一般的线性系统、特别是电网络。

4.2 有向2-树，1-因子连接和1-部分因子

象前面的情况一样，G(Y)的有向2-树和G_c^i的1-部分因子与G_c的1因子连接有密切的关系。

定义4.14，圈1-因子连接。

从节点i到节点j的COATES图的1-因子连接H_{ij}，只要从H_{ij}中移去从节点i到j的有向路径的节点之后，对于G_c的某个局部子图来说，余下的子图成为圈1因子，就称它为圈1-因子连接。

设F是Y_{nn}的伴随COATES图中从节点i到节点j的所有1-

因子连接H_{ij}的集合，并设F^*是F的子集，要求对于在F^*中的每一个H_{ij}^*来说，H_{ij}^*不是圈1因子连接，就是至少含有长度不少于2的一个有向回路，于是有下述定理：

定理 4.9：对于$i\neq j$

$$\sum_{H_{ij}^*}(-1)^{q_{ij}^*}f(H_{ij}^*)=0 \tag{4.128}$$

式中H_{ij}^*是F^*的一个元素，而q_{ij}^*是H_{ij}^*中的偶片数。

证明：设P_{ij}是G_c中从节点i到j的一个有向路径，对于每个P_{ij}来说，设$F^*(P_{ij})$的每一个元素中移去P_{ij}所得的集合。显然，在从G_c中移去P_{ij}的所有节点和边所得的COATES图$G_c(P_{ij})$中$F_1^*(P_{ij})$是1-因子集，其中每一个不是圈1因子，就是至少含有长度不少于2的有向回路，因此，根据定理4.7得到：

$$\sum_{H_{ij}^*\in F^*(P_{ij})}(-1)^{q_{ij}^*}f(H_{ij}^*)=\pm f(P_{ij})\left[\sum_{h^*\in F_1^*(P_{ij})}(-1)^{q_h^*}f(h^*)\right]=0, \tag{4.129}$$

式中h^*是$F_1^*(P_{ij})$中$G_c(P_{ij})$的1因子，而q_h^*是h^*中的偶片数。

由于集合F^*的元素可以划分为一系列具有以上性质的不相接子集$F^*(P_{ij})$，上面的定理即可从这里得出。

设$T_{ij\text{-}n}$和S_{ij}分别是$G(Y)$和G_c'的有向2树$t_{ij,n}$的集合和1-部分因子$R(ij)$的集合，那么有下述定理。

定理 4.10：在$(F-F^*)$的元素H_{ij}和$T_{ij\text{-}n}$的元素$t_{ij\text{-}n}$（或S_{ij}的$R_{(ij)}$）之间存在一一对应关系，而且有

$$(-1)^{q_H-1}f(H_{ij})=f(t_{ij\text{-}n})=(-1)^{q_{ij}-1}f(R(ij)) \tag{4.130}$$

式中q_H和q_{ij}分别是H_{ij}和$R(ij)$中的偶片数。

以上定理的证明类似于定理4.8的证明，因而留作为练习（习题4.36）。

因此，二阶代数余子式$Y_{ij\text{-}nn}$可以由下面三个公式的任何一个展开：

$$Y_{ii,jj} = \sum_{H}(-1)^{q_{ij}+1} f(H_{ij}) \tag{4.131a}$$

$$= \sum_{t_{ij,n}} f(t_{ij,n}) \tag{4.131b}$$

$$= \sum_{R}(-1)^{q_{ij}+1} f(R(ij)) \tag{4.131c}$$

式中 H_{ij}，$t_{ij,n}$ 和 $k(ij)$ 分别是 G_c，$G(Y)$ 和 G_c' 中从节点 i 到 j 的 1-因子连接，有向 2 树和 1 部分因子，而 q_{ij} 和 q_{ij} 分别是 H_{ij} 和 $R(ij)$ 中的偶片数。

作为一个例子，再一次考虑阶为 4 的等代数余子式矩阵 Y，假定要求计算二阶代数余子式 $Y_{22,44}$，

$$Y_{22,44} = \det\begin{bmatrix} y_{12}+y_{13}+y_{14} & -y_{13} \\ -y_{31} & y_{31}+y_{32}+y_{34} \end{bmatrix}$$

$$= y_{12}y_{31} + y_{12}y_{32} + y_{12}y_{34} + y_{13}y_{31} + y_{13}y_{32} + y_{13}y_{34} + y_{14}y_{31} + y_{14}y_{32} + y_{14}y_{34} - y_{13}y_{31}$$

$$= y_{12}y_{31} + y_{12}y_{32} + y_{12}y_{34} + y_{13}y_{32} + y_{13}y_{34} + y_{14}y_{31} + y_{14}y_{32} + y_{14}y_{34} \tag{4.132}$$

因此，如果 $Y_{22,44}$ 是由公式(4.131 a)展开，则在对消之前，有 10 项产生，其中两项相互对消，余下的 8 项与图 4.25 G(Y) 的有向 2-树 $t_{2,4}$ 或与图 4.26 G_c' 的 1 部分因子 R(2) 处于一一对应关系。类似地，利用式(4.131)可以求得：

$$Y_{12,44} = y_{21}y_{31} + y_{21}y_{32} + y_{21}y_{34} + y_{23}y_{31} \tag{4.133}$$

其中各项与图 4.24 G_c 的 1 因子连接 H_{12} 或图 4.25 G(Y) 的有向 2-树 $t_{12,4}$ 或图 4.26 G_c 的 1-部分因子 R(12) 处于一一对应关系。

此外，利用有向 2-树或 1-部分因子来求二阶代数余子式的拓扑规则实际上与 COATES 图(也包括 MASON 图)是一样的，但前者仅针对后者的未消去的 1 因子连接。因此式(4.131)的最后两个

公式对于求式(4.21)的Y元素的二阶代数余子式来说是最佳的。

§5. 有向树和有向2-树的产生

高阶等代数余子式矩阵元素的一阶和二阶代数余子式用数字计算机来分析的效率，主要取决于在伴随有向图中产生全部有向树和有向2-树的效率。在这一节中，介绍三种列举它们的方法。第一种方法类似于第三章§4.2中所讨论的部分因子和K-部分因子的产生，公式是简单的，但必定产生对消项，因此它不是非常有效的。第二种和第三种方法是迭代法，它不会引入任何冗余项或对消项。这三种方法都适合用于数字计算机。前面两种方法的形成完全来自CHEN[1966 a、1968 a]的研究工作，第三种方法无疑是由FEUSSNER[1902、1904]给出的，并且由MASON[1957]广泛使用。还有其它产生树的适用方法，它们将在第五章中详细讨论。

5.1 代数法

设G是一个n节点有向图，其中每条边都用边标识符e_k或e_{ij}来指定，这里如果使用e_{ij}，则它就表示G的从节点i指向j的边。为了简单起见，假定G没有并联边和自环，但推广到一般情况是很容易的，所以留作为练习（习题4.37）。

象用于第三章§4.1中的那些符号一样，设S_i^+是由以节点i作为起始点的G的所有边的集合。利用式(3.118)和(3.119)所定义的Wang积运算，可以得出

定理4.11：在一个n节点的对称有向图G中，设

$$T_k=S_1^+ ⓐ \cdots ⓐ S_{k-1}^+ ⓐ S_{k+1}^+ ⓐ \cdots ⓐ S_n^+, \tag{4.134}$$

则在T_k最终展开式中的元素对应于G的有向树t_k的集合，只要边e_{ij}和e_{ji}在所有的运算中都认为是相同的元素。

证明：不难看到，在T_k的展开式中每一个元素对应于G的一个子图，除了节点k的射出度数为0之外，其每个节点的射出度数

均为1。因此T_k的每个元素不是有向树t_k、就是含有一个有向回路的子图。同样，显然G的每个有向树t_k都包含在T_k中。有待于证明的是，如T_k的一个元素不是G的有向树T_k，那么它必定出现偶数次。在目前的情况中，我们将指出：在Wang积的展开式中它恰好出现两次，因此它不会在式(4.134)的最终展开式中出现。

设x是这样的一个元素，由于G没有自环以及在所有的运算中边e_{ij}和e_{ji}都认为是相同的，x对应于一个含有长度为u(u≥3)的有向回路L_1的子图。设L_1和E是x的互补子图，那么$x=L_1 \cup E$。由于G是对称的，则从L_1中使其每条边的方向相反所得的子图L_2也是G中长度为u的有向回路。从而由此得出：对应于G的子图$L_2 \cup E$的元素也是处于式(4.134)的Wang积中，因此，x不会在T_k的最终展开式中出现。定理证毕。

由于一个（无向）图总是可以用一对方向相反的有向边表示其每一条无向边的对称有向图（定义4.9）、以上概述的方法同样可以用来产生任何图的树集。

象产生部分因子的情况一样，如果G不是对称的，则总可能设法使它对称。设G_1是从G中增添一最小边数于G而所得的对称有向图。为了使增添的边与原已在G中的边相区别，用撇号“′”来表示。例如，如果(i，j)是在G中，而(j，i)在G_1中但不在G中、那么在G_1中(i，j)用e_{ij}标号，而(j，i)用e'_{ji}标号。

对一任意有向图G，按照刚才采用的规则假定对应于G_1边已经标号。只要e_{ij}和e_{ji}或e_{ij}和e'_{ji}在所有的运算中都认为是相同的元素、那么G_1的有向树集可以由定理4.11中概述的方法产生。如果消去集合中所有至少含有一个带撇号“′”的字母的所有那些元素，那么余下的元素就是所要求G的有向树。

注意：展开式（4.134）的集合S_i^+的Wang积相当于产生无相同下标（不考虑下标序）的所有边组合，然后删去所有那些相同下标在别处作为排列的元素。强调指出，既使在所有运算中下标序是无所谓的，但是形成一个子图的权乘积中都是重要的。

由于 Wang 积运算是符合结合律的，则待考察的组合数通过在较早步骤中就删去某些元素可以大大减少。例如，如果在 $S_1^+ ⓐ S_2^+$ 中有一个具有相同下标的元素，那么在作出 Wang 积运算之前，这一元素可以从 $S_1^+ ⓐ S_2^+$ 中删去。如果两个元素具有相同的下标，这同样是有效的。它们应当在使用其它运算之前先删去。

由下面的例子来说明这个问题。

例 4.7：考虑图 4.15 的有向图G，假定要求产生有向树 t_5 的集合 T_5，对应于G的 G_a 如图 4.27 所示。对此，除了边（2、4）用 e'_{24} 标号之外，设 G_a 的边(i，j)用符号 e_{ij}(i、j＝1、2、3、4、5）来标号。根据定理 4.11 可以得到

$$\begin{aligned}
T'_5 &= S_1^+ ⓐ S_2^+ ⓐ S_3^+ ⓐ S_4^+ \\
&= \{e_{12}\} ⓐ \{e_{21}, e_{23}, e'_{24}, e_{25}\} ⓐ \{e_{32}, e_{34}, \\
&\quad e_{35}\} ⓐ \{e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \\
&= \{e_{12}e_{23}, e_{12}e'_{24}, e_{12}e_{25}\} ⓐ \{e_{32}e_{42}, e_{32}e_{43}, \\
&\quad e_{32}e_{45}, e_{34}e_{42}, e_{34}e_{45}, e_{35}e_{42}, e_{35}e_{43}, e_{35}e_{45}\} \\
&= \{e_{12}e_{23}e_{34}e_{45}, e_{12}e_{23}e_{35}e_{42}, e_{12}e_{23}e_{35}e_{43}, \\
&\quad e_{12}e_{23}e_{35}e_{45}, e_{12}e'_{24}e_{32}e_{45}, e_{12}e'_{24}e_{34}e_{45}, \\
&\quad e_{12}e'_{24}e_{35}e_{43}, e_{12}e'_{24}e_{35}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{32}e_{42}, \\
&\quad e_{12}e_{23}e_{32}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{32}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{34}e_{42}, \\
&\quad e_{12}e_{25}e_{34}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{35}e_{42}, \\
&\quad e_{12}e_{25}e_{35}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{35}e_{45}\}
\end{aligned} \tag{4.135}$$

由于 T'_5 对应于 G_a 的有向树 t'_5 的集合，G的有向树 t_5 的集合可以很容易地从 T'_5 中删去至少含有一个带撇号“′”的字母的那些元素得到：

$$\begin{aligned}
T_5 = \{&e_{12}e_{23}e_{34}e_{45}, e_{12}e_{23}e_{35}e_{42}, e_{12}e_{23}e_{35}e_{43}, e_{12}e_{23}e_{35}e_{45}, \\
&e_{12}e_{25}e_{32}e_{42}, e_{12}e_{23}e_{32}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{32}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{34}e_{42}, \\
&e_{12}e_{25}e_{34}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{35}e_{42}, e_{12}e_{25}e_{35}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{35}e_{45}\}
\end{aligned} \tag{4.136}$$

简单改进一下，从上方法也可以用来产生G的有向 2 树集，我们仅仅陈述一下结论，而详细的证明留作为练习（习题 4.38 和

1.54)。

定理 4.12：在一个n-节点对称有向图G中，设$T_{i,j}$表示集合S_k^i($k=1, 2, \cdots n$，但$k \neq j$)的Wang-积，只要边e_{uv}和e_{vu}在所有运算中都认为是相同元素，那么在$T_{i,j}$最终展开式中的元素对应于G的有向2树集$T_{i,j}$。

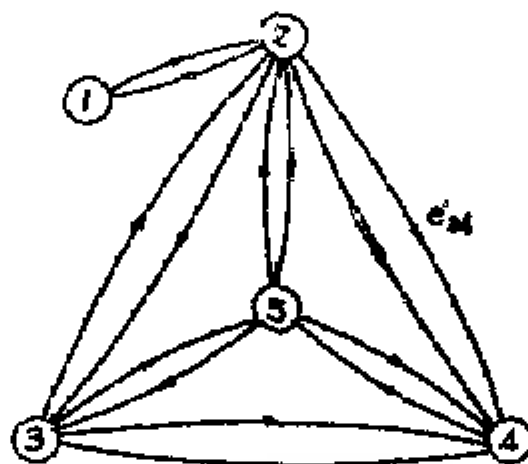


图 4.27 从图4.15的有向图中由附加一条边e'_{24}所得的对称有向图

象产生有向树的情况一样，如果G不是对称的，G_s的有向树集首先可以由以上概述的方法来产生。如果删去集合中所有那些至少含有一个带撇号“′”字母的那些元素，则余下的元素对应于所要求的有向2树集。我们将用下面的例子来说明这一方法。

例 4.6：考虑如图4.15所示的有向图G，假定要求产生G的有向2树$t_{3,5}$的集合$T_{3,5}$，对应的G_s如图4.27所示，根据定理4.12，产生G_s的有向2树$t'_{3,5}$的集合$T'_{3,5}$如下：

$$
\begin{aligned}
T'_{3,5} &= \{e_{12}\} ⓐ \{e_{21}, e_{23}, e'_{24}, e_{25}\} ⓐ \{e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \\
&= \{e_{12}e_{23}, e_{12}e'_{24}, e_{12}e_{25}\} ⓐ \{e_{42}, e_{43}, e_{45}\} \\
&= \{e_{12}e_{23}e_{42}, e_{12}e_{23}e_{43}, e_{12}e_{23}e_{45}, e_{12}e'_{24}e_{43}, \\
&\quad e_{12}e'_{24}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{42}, e_{12}e_{25}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{45}\} \qquad (4.137a)
\end{aligned}
$$

然后从$T'_{3,5}$中删去至少含有一个带撇号“′”字母所有那些元素，得：

$$
\begin{aligned}
T_{3,5} = \{&e_{12}e_{23}e_{42}, e_{12}e_{23}e_{43}, e_{12}e_{23}e_{45}, e_{12}e_{25}e_{42}, \\
&e_{12}e_{25}e_{43}, e_{12}e_{25}e_{45}\} \qquad (4.137b)
\end{aligned}
$$

5.2 迭代法

在前面一节中，已经阐明有向图G的有向树和有向2-树怎样由代数法来产生。但是如前所述，由于必定会因下标重复而出现多余项，因此这不是非常有效的。在这一节中，将描述一种有效方

法，它将产生所有的有向树和有向2 树，而不出现重复 多余或对消项。

设G是一个n-节点的有向图，且e 是G中表示从节点i指向j的边（i，j）的符号。不失一般性，假设G不含有自环和并联边，而且是连通的。同样，为了方便起见，假设节点n作为有向树的参考点或G的有向2 树的一个参考点。

定义 4.15：同号式，

n-节点标号有向图G的同号式，是下式同号矩阵的行列式，用符号U(G）表示。

$$
U(G)=\begin{vmatrix}
\sum\limits_{k=2}^{n} e_{1k} & -e_{12} & -e_{13} & \cdots & -e_{1(n-1)} \\
-e_{21} & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} e_{2k} & -e_{23} & \cdots & -e_{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\
-e_{(n-1)1} & -e_{(n-1)2} & -e_{(n-1)3} & \cdots & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq n-1}}^{n} e_{(n-1)k}
\end{vmatrix}
\tag{4.138}
$$

如果将G的边标识符 e_{ij} 看成为与G的边相联系的权，则同号式U(G）实际上就是G的伴随矩阵元素（n，n）的代数余子式，唯一的差别是伴随矩阵不可能是等代数余子式矩阵。注意：U(G)＝detU(G)。在下面将讨论改进U(G）的列展开的一种方法，这将反复移去在展开U(G）中所有的对消项，因此在进行展开中将大大减少工作量。由于U(G）的最终展开式的项与G的有向树 t_n 处于一一对应关系，所以这一过程也就产生了所有G的有向树 t_n。

展开U(G)中重复移去所有对消项可由如下步骤达到：用所有列之和去替换U(G）的第一列，这就产生其行列式与U(G)行列式

相同的矩阵：

$$
\begin{vmatrix}
e_{1n} & -e_{12} & e_{13} & \cdots & e_{1(n-1)} \\
e_{2n} & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq 2}}^{n} e_{2k} & e_{23} & \cdots & e_{2(n-1)} \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
e_{(n-1)n} & -e_{(n-1)2} & e_{(n-1)3} & \cdots & \sum\limits_{\substack{k=1\\k\neq n-1}}^{n} e_{(n-1)k}
\end{vmatrix}
\tag{4.139}
$$

为了方便起见，可以说式（4.139）是U(G)的改进式或只说U(G)处于改进式。于是可以表明：对于一个不给定的处于改进式的同号式矩阵U(G)，其行列式可以表示为阶比原来的U(G)少1的同号矩阵（也处于改进式）行列式的加权和。重复这一过程直到所有的同号矩阵的阶都为1为止。

于是如果沿其第一列展开式，则有

$$U(G)=\sum_{i=1}^{n-1} e_{in}U_{i1}, \tag{4.140}$$

式中 U_{ij} 是 U(G) 元素（i,j）的代数余子式。设 U_{ij} 是从 U(G) 中通过删去第 i 行和第 j 列所得的子矩阵，对于 i=1，U_{11}可以简单地通过将所有随后的列加到 U_{11}的第一列而置于改进式。对于 i≠1，U_{i1}可以仅通过将其第（i-1）列移到第一列的位置而保持其它列按原来次序排列不变，这样置于改进式。这样做需要总数达(i−2)次的列交换。由于最终所得的矩阵的第一列元素都带负号，设这一列所有元素符号都改为正号，将这样导出的矩阵用 M_{i1}表示。不难看到 M_{11}是改进式中的 U_{11}，以及

$$U_{i1}=(-1)^{i+1}(-1)^{i-2}(-1)M_{i1}=M_{i1} \tag{4.141a}$$

$$U(G)=\sum_{i=1}^{n-1} e_{in}M_{i1} \tag{4.141b}$$

式中 $M_{11}=\det U_{11}$，而且对于 x=2,3,…n−1，有 $M_{x1}=\det M_{x1}$。

用下面的例子来说明以上方法。

例 4.9：考虑如图 4.28 所示的有向图G，U(G) 连同 U(G) 的改进式以及其展开为较低价的同号矩阵（也处于改进式）以行列式的形式给出如下：

$$
U(G) \sim \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ -e_2 & e_2+e_3 & 0 & e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & -e_5 & e_5+e_6 \end{vmatrix}
$$

$$
\sim \begin{vmatrix} e_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & e_2+e_3 & 0 & -e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4 & 0 \\ e_6 & 0 & e_5 & e_5+e_6 \end{vmatrix}
$$

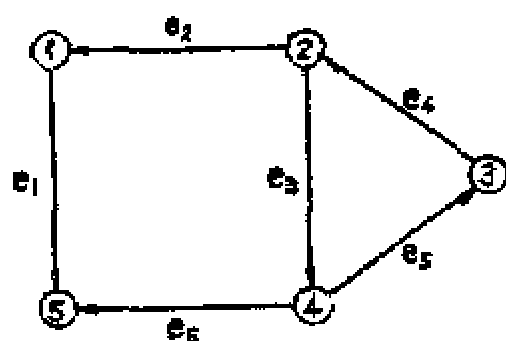
$$
= e_1 \begin{vmatrix} e_2 & 0 & e_3 \\ 0 & e_4 & 0 \\ e_6 & e_5 & e_5+e_6 \end{vmatrix} + e_6 \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ e_3 & e_2+e_3 & 0 \\ 0 & -e_4 & e_4 \end{vmatrix}
$$

$$
= e_1\left(e_2 \begin{vmatrix} e_4 & 0 \\ e_6 & e_5+e_6 \end{vmatrix} + e_6 \begin{vmatrix} e_3 & 0 \\ 0 & e_4 \end{vmatrix} \right)
$$

$$
= e_1 e_2 e_4 (e_5+e_6) + e_1 e_6 e_3 e_4 。 \tag{4.142}
$$

在最终的展开式中有 3 项，其中每一项对应于以节点 5 为参考点的有向树。可以看到所有的项都以因子分解形式给出，从应用的观点来看，这确实是最希望的形式，因为通常我们感兴趣的是子图的权乘积而不是子图本身，因此没有必要进行最终展开。

例 4.10：考虑图 4.28 有向图G的伴随无向图 G_u，如图 4.29 所示。如果需要求 G_u的树集，可以采用同样的方法。唯一的差别是使用 G_u的伴随对称有向图 G_s的同号式 $U(G_s)$。这里 G_s中一对方向相反的有向边用相同的边标识符号来指示，或者可以把 G_u 的边标识符看成是 G_s的伴随边权：



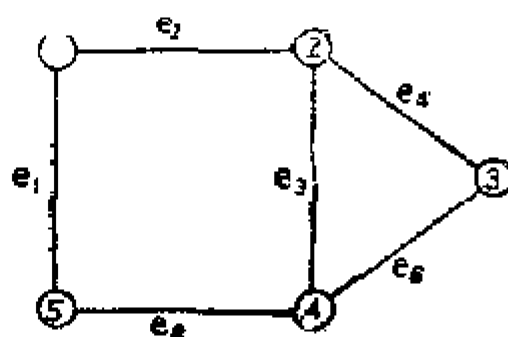


图 4.28 说明产生有向树的有向图　　图 4.29 图4.28有向图的伴随无向图

$$U(G_1)=\begin{vmatrix} e_1+e_2 & -e_2 & 0 & 0 \\ e_2 & e_2+e_3+e_4 & e_4 & -e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4+e_5 & -e_5 \\ 0 & -e_3 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & 0 & 0 \\ 0 & e_2+e_3+e_4 & -e_4 & -e_3 \\ 0 & -e_4 & e_4+e_5 & e_5 \\ e_6 & -e_3 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$=e_1\begin{vmatrix} e_2 & -e_4 & -e_3 \\ 0 & e_4+e_5 & -e_5 \\ e_6 & -e_5 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$+e_6\begin{vmatrix} 0 & -e_2 & 0 \\ e_3 & e_2+e_3-e_4 & -e_4 \\ e_5 & -e_4 & e_4+e_5 \end{vmatrix}$$

$$=e_1\Big(e_2\begin{vmatrix} e_4 & e_5 \\ e_3+e_6 & e_3+e_5-e_6 \end{vmatrix}$$

$$+e_5\begin{vmatrix} e_3 & -e_4 \\ e_5 & e_3+e_5 \end{vmatrix}\Big)+e_6\Big(e_3\begin{vmatrix} e_2 & 0 \\ e_4 & e_4+e_5 \end{vmatrix}$$

$$+e_5\begin{vmatrix} 0 & -e_2 \\ e_4 & e_2+e_3+e_4 \end{vmatrix}\Big)$$

$$=e_1e_2(e_3e_4+e_4e_5+e_4e_6+e_3e_5+e_5e_6)$$

$$+ e_1e_6(e_3e_4 + e_3e_5 + e_4e_5) + e_6e_3(e_2e_4 + e_2e_5)$$

$$+ e_3e_5e_2e_4 \qquad (4.143)$$

在最终的展开式中有 11 项，其中每一项对应于 G_u的一个树。

显然，如果对G中所有的 i 和 j，都设 $e_{ij}=1$，那么 U(G) 就变成有向树矩阵 D(G) 元素 (n·n) 的代数余子式，对于树矩阵 $D(G_u)$ 来说，这同样是有效的。因此，这些代数余子式表示G的有向树和 G_u的树的数目。由于它们的特殊形式，以上讨论的方法可以有效地用来求他们的值。

作为一个例子，考虑例 4.9 的同号式 U(G)，如果设所有的边标识符号都是 1，那么

$$U(G) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 3 \qquad (4.144)$$

因此，在G中有三个有向树 t_5。类似地，如果需要求图 4.29 G_u中树数目，可以使用同样的方法：

$$U(G_u) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 3 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
=\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}
$$

$$
+\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}+\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}=11 \qquad (4.145)
$$

这样在G_u中有11个树。

只要稍微改变一下，同样的方法也可以用来产生有向2-树或2树。假定要求在G中采用以上讨论的迭代法来产生有向2-树集，这相当于展开代数余子式U_{ij}。例如设$i>j$，令U_{ij}的第$(i-1)$列移到其第j列的位置，而保持所有其它的列原来的次序不变。通过这样做，需要总数达$(i-j-1)$次的列交换。由于所得的矩阵的第j列元素都带有负号，让这列所有元素的符号都改为正。为了方便起见，设这样导出的矩阵$\mathbf{M}''_{ij}$称为矩阵U_{ij}的改进式，那么

$$
U_{ij}=(-1)^{i+j}(-1)^{i-j-1}(-1)M''_{ij}=M''_{ij} \qquad (4.146)
$$

式中$M''_{ij}=\det\mathbf{M}''_{ij}$。此外，不难看到改进式中任何$U_{ij}$通过同时交换行和列可以变换为同号式矩阵的改进式，因此这不会改变其行列式值。同样对于$i<j$来说，这也是有效的。我们已经考虑$U(G)$的展开式中$i=j$的情况。因此U_{ij}改进式的行列式可以表示为阶比U_{ij}的阶少1的同号式矩阵行列式(也是改进式)的加权和。

作为一个例子，考虑例4.9中给出的元素(1,3)的代数余子式U_{13}，U_{13}连同U_{13}的改进式及其展开为较低阶的同号矩阵（也是改进式）以行列式形式给出如下：

$$U_{13} \quad (-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -e_2 & e_2+e_3 & -e_3 \\ 0 & e_4 & 0 \\ 0 & 0 & e_5 \; e_6 \end{vmatrix}$$

$$-\begin{vmatrix} e_2+e_3 & e_2 & e_3 \\ -e_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e_5 \; e_6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -e_4 & 0 \\ e_2 & e_2+e_3 & e_3 \\ 0 & 0 & e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$= e_2\begin{vmatrix} e_4 & 0 \\ 0 & e_5+e_6 \end{vmatrix} \quad e_2e_4(e_5+e_6) \qquad (4.147a)$$

因此，在G中有两个有向 2 树 $t_{13.5}$。类似地，如果需要得到如图 4.29 所示图 G_u 中的 2-树 $t_{13.5}$，则可以采用同样的方法。为此考虑代数余子式 U_{31} 而不是 U_{13}，因为 $t_{13.5}$ 中的下标序是无关紧要的。

$$U_{31}\begin{vmatrix} -e_2 & 0 & 0 \\ e_2+e_3+e_4 & e_4 & -e_3 \\ -e_3 & e_5 & e_3+e_5e_6 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 0 & -e_2 & 0 \\ e_4 & e_2+e_3+e_4 & e_3 \\ e_5 & -e_3 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix}$$

$$-e_4\begin{vmatrix} e_2 & 0 \\ e_3 & e_3+e_5+e_6 \end{vmatrix} + e_5\begin{vmatrix} 0 & -e_2 \\ e_3 & e_2+e_3+e_4 \end{vmatrix}$$

$$= e_4e_2(e_3+e_5+e_6) + e_5e_2e_3 \qquad (4.147\text{b})$$

因此，在 U_{31} 的展开式有 4 项，其中每一项对应于 G_u 的树 $t_{13.5}$ 或 $t_{31.5}$。

象有向树情况一样，如果设所有边标识符都是 1，则上面概述的方法可以相当有效地用来计算G中有向 2-树数目或 G_u 中 2 树数目。例如，G_u 中树 $t_{13.5}$的数目 $N(t_{13.5})$可以求得如下：

$$N(t_{13.5}) \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 4 \qquad (4.148)$$

正如在这一节早就陈述过的，同号矩阵 U(G) 非常类似于电网络的节点导纳矩阵。因此，以上方法也可以用来求节点矩阵导纳矩阵行列式值，而不必首先建立伴随有向图。

5.3 部分因子分解

该方法的基本原理是相当简单的。方法根据这一事实：如果认定一条终止于有向图G节点 k 的边 e，那么G的有向树 t_k 的集合 T_k 可以分为含有边 e 的$T_k(e)$和不含有边 e 的 $T_k(e)$。如果符号 $G(g_1; g_2)$用来表示从G中首先短接所有含于 g_1 的边(移去由此产生的所有自环)，然后移去所有含于 g_2 的边而所得的有向图，这 g_1 和 g_2 是G 的两个边不相接子图，那么 $T_k(e)$的元素与 $G(e; \phi)$ 中有向树 t_k 处于一一对应关系，而 $T_k(\bar{e})$是 $G(\phi; e)$中有向树集 t_k，这里 ϕ 表示空图。如果对 $G(e; \phi)$和 $G(\phi; e)$重复这一过程，则最终产生G的所有有向树 t_k 而不会产生对消项。这方法无疑是由 FEUSSNER [1902，1904] 用于无向图而给出的，此后由 PERCIVAL[1953]用来分析无向图和由 MASON[1957]用来分析有向图。这种方法简单概述如下。

设 C_k^- 是由终止于节点 k 的所有边组成的G的子图。设E和 $\bar{E}$ 是 C_k 的互补子图，用$t_k(E)$表示G中以 k 为参考点的有向树，因而有：

$$t_k(E)\cap C_k^- \quad E$$

定理 4.13：对于$G(E; \overline{E})$中以 k 为参考点的每一个有向树，在G中有一个唯一的有向树 $t_k(E)$相对应，反之亦然。

定理的不同形式在习题 4.64 中给出。

正如从下面推论中所看到的那样，以上概述的方法也可以用来产生G的有向2-树集而不会产生对消项。

推论 4.22：设 G^* 是从 G 中使节点 i 和 j 短接、并由 i 表示这一组合节点而导出的有向图，那么对于 G 的每个有向 2-树 $t_{i,j}$ 来说，在 G^* 中有以 i 为参考点的唯一有向树相对应，反之亦然。

有可能不是用短接 G 的一条边，而是短接一条有向路径的所有边，来产生有向树集，这种方法由 MASON 和 ZIMMERMANN [1960]称为在(有向)路径上的展开或关于节点对的展开，并且以下面定理为基础。

定理 4.14：无自环的有向图 G 内生成子图 t_k 当且仅当满足下列两个条件的任何一个时，是以 k 为参考点的有向树。

(1) 对于每个节点 $i \neq k$，在 t_k 中从节点 i 到 k 存在一条唯一的有向路径。

(2) 在 t_k 中有 $n-1$ 条边，其中对于每个节点 $i \neq k$ 都存在一条 i 到 k 的有向路径，这里 n 是 G 内的节点数。

定理的证明是简单明了的，因而留作练习(习题 4.44)，这种方法已在数字计算机上使用，BROWNEU [1968] 用 ALGOL 语言写出了计算机程序。

因此对于一个加标有向图 G，如果其每个子图由"乘积"或由其边标识符的并置来表示，那么对于 G 中每个节点 $i \neq k$ 的选择来说，G 的有向树 t_k 的集合 T_k 可以由下表式唯一地表示：

$$T_k = \bigcup_{(m)} \{P_{ik}^m\} \times T_k^* \tag{4.149}$$

式中 P_{ik}^m 是 G 中从节点 i 到节点 k 的第 m 条有向路径，T_k^* 是 $G(P_{ik}^m;\phi)$ 中以 k 为参考点的有向树集，符号"×"表示两个集合的笛卡儿(Cartesian)乘积，而并取遍 G 中整个 P_{ik}^m。记住：集合的元素虽然都是子图，但它们都假定由边标识符的并置来表示。此外，$G(P_{ik}^m;\phi)$ 中组合节点用 k 标号。换言之，G 的有向树集可以用部分因子分解形式来表示。从实用观点来看，没有必要进行展开。

作为一个例子，考虑如图 4.15 所示的有向图 G，于是可以在节点对上(比如说节点 1 和 5)展开而产生的有向树 t_5 的集合 T_5：

$$\begin{aligned} T_5 \quad & \{e_{12}e_{25}\}\times\{e_{32}e_{45},\ e_{32}e_{42},\ e_{35}e_{45},\ e_{35}e_{42},\ e_{43}e_{32},\ e_{43}e_{35}, \\ & e_{34}e_{45},\ e_{34}e_{42}\}\cup\{e_{12}e_{23}e_{35}\} \\ & \times\{e_{42},\ e_{43},\ e_{45}\}\cup\{e_{12}e_{23}e_{34}e_{45}\} \end{aligned} \tag{4.150}$$

显然，如果 $G(P^{m}_{rk};\ \phi)$仍然是复杂的，同样的方法可以重复使用直到所有的项可以由直观而得为止。当然，通过有向路径展开所需工作量的大小取决于这一具体有向图的结构，以及对于展开和并置来说的节点对的选择。

类似地，如果需要求出图 4.19 图 G_u 中的树，则可以用同样的方法得到。它的优点是可以自由地选择参考点。因此，通过节点对上的展开(比如说节点 2 和 4)可以产生 G_u 的树集T。为此我们也来用局部展开：

$$\begin{aligned} T= & \{e_{25}e_{46}\}\times\{e_{13}e_{23}\}\times\{e_{16}e_{56}\}\cup\{e_{13}e_{35}\}\times\{e_{16}e_{56}\}\cup\{e_{14}\} \\ & \times\{e_{56}e_{23},\ e_{56}e_{35},\ e_{56}e_{13},\ e_{16}e_{23},\ e_{16}e_{35},\ e_{16}e_{13}\}\cup\{e_{16}e_{56}\} \\ & \times\{e_{13},\ e_{23},\ e_{35}\})\cup(\{e_{25}e_{56}e_{16}e_{14}\} \\ & \times\{e_{13},\ e_{23},\ e_{35}\})\cup(\{e_{23}e_{13}e_{14}\} \\ & \times\{e_{16}e_{25},\ e_{16}e_{35},\ e_{16}e_{45},\ e_{56}e_{25},\ e_{56}e_{35},\ e_{56}e_{45},\ e_{16}e_{56}\}) \\ & \cup(\{e_{23}e_{13}e_{16}e_{56}e_{46}\})\cup(\{e_{23}e_{35}e_{45}\} \\ & \times\{e_{56}e_{16},\ e_{56}e_{13},\ e_{56}e_{14},\ e_{16}e_{13},\ e_{16}e_{14}\}) \\ & \cup(\{e_{23}e_{35}e_{56}e_{16}e_{14}\})\cup(\{e_{25}e_{35}e_{13}e_{14}\}\times\{e_{16},\ e_{56}\}) \end{aligned} \tag{4.151}$$

式中 e_{ij} 或 e_{ji} 表示 G_u 的连接节点 i 和 j 的边。

§ 6. 电网络的直接分析法

自从早期的电路工作者尝试在线性电路分析方面使电路问题公式化以来，实现导出网络分析的快速方法的成果似乎非常少。在前一节中所讨论的方法有可能对一般线性电路进行快速分析。在这一节中，将表明怎样使用这些方法凭观察网络结构直接写出网络函数。在这里所研究的问题类似于由MASON[1957]以及BOISVERT

和 ROBICHAUD[1956]所给出的问题。虽然他们的方法、观点和阐明完全不同，但实质结果是 -样的。这并不奇怪，因为它们都与线性网络的拓扑分析有关。这里将表明这些方法实际上是有向树公式的变型，因而其结果可以用统 -和系统的方法导出。

6.1 开路转移阻抗和电压增益函数

设N是由任何方式连接任意数量的有源和无源元件构成的n 节点线性网络。设v_1，v_2，…，v_n分别是节点 1，2，…，n 和(某个任意的但未特指的)参考节点之间所测的电位。如果i_1，i_2，…，i_n分别是从外网络进入节点 1，2，…，n 的源电流，那么节点电位和源电流的关系由下面的线性代数方程系表示

$$I = YV \tag{4.152}$$

式中 I 是表示源电流的n-矢量，V 是表示节点电位的 n 矢量，而 Y 是与网络 N 相联系的阶为 n 的不定导纳矩阵。

由于不定导纳矩阵Y 也是 -个式(4.21)类型的等代数余子式矩阵(例如，参见 SHARPE 和 SPAIN[1960])，其每项元素之和等于零。于是方程系(4.152)可以置于以下形式：

$$I = YV'' \tag{4.153}$$

式中 $V'' = V - V_0$，而 V_0 是 n 矢量，其所有元素都是 v_m，v_m 是节点m的节点电压，因此 V″ 的节 j 行中的元素 v''_{jm} 表示从节点m到节点 j 的电位升。

为了计算网络函数，设网络N受如下约束：源电流 i_{rs} 自节点 r 流入而从节点 S 流出，此外没有其它进入网络的源电流（也就是，如果 i_x 是I的第 x 行元素，那么 $i_x = 0\ (x \neq r, s)$，以及 $i_r = i_{rs} = -i_s$）。

由于 Y 是等代数余子式矩阵，式(4.153)的方程系是线性相关的，因而其中一个方程式是多余的。设从式(4.153)中删去第 S 行 S列，那么对于k＝1，2，…，n，但k≠m，由克莱姆(CRAMER)法则，不难看到方程系(4.153)的解为

$$v''_{km} = i_{rs} Y_{rk,sm} / Y_{uv} \tag{4.154}$$

式中 v''_{km} 是 V'' 的第 k 行元素，而 Y_{uv} 和 $Y_{rs+,m}$ 是不定导纳矩阵 Y 元素的一阶和二阶代数余子式。当然，Y 的行列式恒等于零。注意：Y_{uv} 中下标 u 和 v 的选择是任意的。

网络N可以用如图 4.30 所示的“黑盒”描述。跨在节点对 rs 和 pq 的电压分别指定为 v_{rs} 和 v_{pq}，电压的正极性端置于节点 r 和p，并假定输出端是开路的。这是非常一般化的，因为任何负载都可以认为是网络N的一部份。只有当如图 4.30 那样的黑盒内不含任何独立源，网络函数才能具体定义。目前对N仅作这个假定（另外是集总，线性与元件时不变）。但是N可以含有受控源。此外，假定所有电流和电压函数都以拉普拉斯(Lap Lace)变换形式给出。

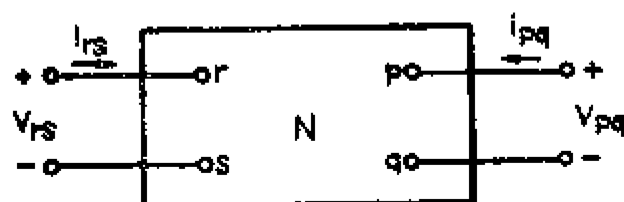


图 4.30 开路转移阻抗函数和电压增益函数的黑盒描述

定义 4.16：开路转移阻抗函数。

用符号 $Z_{rp,sq}$ 表示的，如图 4.30 所示的网络节点对 rs 和 pq 之间的开路转移阻抗函数定义为当网络中所有初始条件和独立源都置于零以及输出端开路时，电压 pq 对电流 i_{rs} 之比。

定义 4.17：驱动点阻抗函数。

当 r=p 和 s=q 时，转移阻抗函数 $Z_{rp,sq}$ 变为图 4.30 网络的节点对 rs 之间的驱动点阻抗函数 $Z_{rr,ss}$。

因此，根据式(4.154)得到

$$Z_{rp,sq}=Y_{rp,sq}/Y_{uv} \tag{4.155}$$

$$Z_{rr,ss}=Y_{rr,ss}/Y_{uv} \tag{4.156}$$

注意到在转移和驱动点阻抗函数的表示式中，下标的序次如下，r-

电流注入节点，S 电流流出节点，p 电压测量节点，q 电压参考节点。节点 S 和 q 形成一种双重基准，S 对电流而言，而 q 对电压而言，而节点 r 和 p 则表示输入和输出的转移量度。此外，有助于记忆，认为在阻抗函数的任何表示式中，$Y_{rp,sq}$ 的下标对中第一个下标是关于电流的，而第二个下标是关于电压的。

设G(Y)是不定导纳矩阵Y的伴随有向图，那么根据式(4.56)，对r≠s和p≠q，有

$$Y_{rp,sq}=\sum_{t_{rp,sq}} f(t_{rp,sq})-\sum_{t_{rq,sp}} f(t_{rq,sp}),\qquad (4.157)$$

式中 $t_{rp,sq}$ 和 $t_{rq,sp}$ 是 G(Y)的有向 2 树。

仿照 PERCIVAL[1953]对无互感无源网络给出的类似表示法，公式(4.157)可以用直观形式表示，如图 4.31 所示。这种表示方法表明在公式中涉及两种类型的有向树，其中包括参考节点。

借助一些新定义，公式(4.157)可以进一步简化。

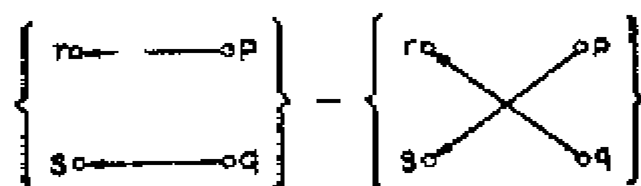


图 4.31 方程式(4.157)的几何表示法

定义 4.18：真路径。

有向图的某一路径如果对其中的每个节点 j(j≠k)，从节点 k 到节点 j 都存在一条有向路径，则这一路径称为相对节点 k 的真路径，用符号 P^k 表示。

作为一个例子，考虑如图 4.28 所示的有向图G，用边标识符 $e_2e_4e_5e_8$ 表示的路径 P^4 相对于节点 4 是真路径，因为对每个节点 j (j＝1，2，3，5) 来说，从节点 4 到节点 j 都存在一条有向路径。但是相对于节点 3 来说，就不是真路径。因为路径中从节点 3 到节

点4或节点5不存在有向路径。

设G_s是$G(Y)$中插入从节点p指向节点q且权为1的边e_{pq}所得的有向图。并设符号P^p_{rs}用来表示相对于节点p在节点r和s之间连通的且含有G_s的边e_{pq}的一个真路径。为了方便起见，在$G_s(P^p_{rs};\phi)$中，设组合节点用p表示。于是，分解真路径P^p_{rs}为如下三个也不相接的有向路径：

$$P^p_{rs}=P_{pr}\cup e_{pq}\cup P_{qs} \tag{4.158}$$

或

$$P^p_{rs}=P_{ps}\cup e_{pq}\cup P_{qr}, \tag{4.159}$$

式中P_{pr}，P_{qs}，P_{ps}和P_{qr}分别是P^p_{rs}中从p到r，q到s，p到s和q到r的有向路径。

下面仅考虑如式(4.158)所示那种类型P^p_{rs}的情况，其它的情况可以以完全类似的方式处理。

引理 4.4：如果P^p_{rs}是如式(4.158)所示类型的真路径，那么，在含有有向路径P_{pr}和P_{qs}的$G(Y)$的有向2树$t_{rp,sq}$和$G_s(P^p_{rs};\phi)$中以p为参考点的有向树t^*_p之间存在一一对应关系，从而有

$$f(P^p_{rs})f(t^*_p)=f(t_{rp,sq})。 \tag{4.160}$$

证明：设G''是从$G(Y)$中首先使P_{pr}中所有节点短接起来，然后P_{qs}中的所有节点也短接起来，这两个组合节点分别用r和s表示而得的有向图。显然$G_s(P^p_{rs};\phi)$可以从G''中使G''的节点r和s短接得出。因此，根据推论4.22可以得出结论：$G_s(P^p_{rs};\phi)$的有向树t^*_p是与G''中类型$t_{r,s}$的有向2树$t''_{r,s}$处于一一对应关系，因而

$$f(t^*_p)=f(t''_{r,s}) \tag{4.161}$$

此外，不难看到在G''的有向2树$t''_{r,s}$和含有有向路径P_{pr}和P_{qs}的$G(Y)$的有向2-树$t_{rp,sq}$之间存在一一对应关系，因而有

$$f(P_{pr}\cup P_{qs})f(t''_{r,s})=f(t_{rp,sq})。 \tag{4.162}$$

由于$f(e_{pq})=1$，在进行一些简单的代换之后，引理随之而得，引理证毕。

引理 4.5：设 P_{rs}^{p} 是G(Y)中属于式(4.158)类型的真路径，那么对于 $r\neq s$ 和 $p\neq q$，有

$$\sum_{t_{rp \cdot sq}} f(t_{rp \cdot sq}) = \sum_{P_{rs}^{p}} \left[f(P_{rs}^{p}) \sum_{t_{p}^{*}} f(t_{p}^{*}) \right], \tag{4.163}$$

式中 $t_{rp \cdot sq}$ 是G(Y)的有向 2-树，而 t_{p}^{*} 是 $G_{s}(P_{rs}^{p};\ \phi)$ 中以 p 为参考点的有向树。

引理的证明是简单的，留作练习（习题 4.46）。类似地可以证明：

引理 4.6：设 P_{rs}^{p} 是G(Y)中式（4.159）类型的真路径，那么对于 $r\neq s$ 和 $p\neq q$ 有

$$\sum_{t_{rq \cdot sp}} f(t_{rq \cdot sp}) = \sum_{P_{rs}^{p}} \left[f(P_{rs}^{p}) \sum_{t_{p}^{*}} f(t_{p}^{*}) \right], \tag{4.164}$$

式中 $t_{rq \cdot sp}$ 是G(Y)中的有向 2 树，而 t_{p}^{*} 是 $G_{s}(p_{rs}^{p};\ \phi)$ 中以 p 为参考点的有向树。

到目前为止，对于与式(4.157) 中第二项有关的代数符号一直没有涉及，这个问题通过对回路选定一个方向可以很容易处理。有向回路的定义在第二章中已给出（定义 2.5），将利用这个概念确定式(4.157) 中各项的符号。但是，在这以前，用一个例子来复习一下这个概念。

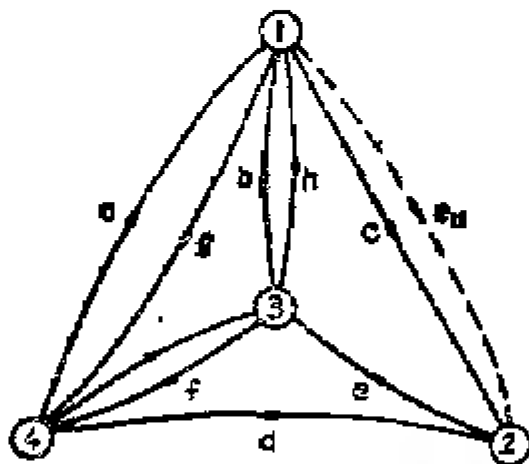


图 4.32　说明回路取向的有向图

在图 4.32 中，由边 a、c 和 d 组成回路可以以(1，2，4，1)或以(1，4，2，1)取向。也可以用箭头表示回路方向。在边的有序对表示法中，如果边的节点和在回路的有序点表示法中以相同的序出现，则回路的边取向和回路"一致"。否则它们是"相反"的，在图上这意思是清楚的。例如，

边(1，2)的取向与回路(1，2，4，1)的取向一致，而边(4,2)和回路的取向相反。注意：有向图的回路不必是有向回路。

利用式(4.163)和(4.164)连同以上定义一起，公式(4.157)于是可以简化如下：

定理 4.15：设G(Y)是如式(4.21)所示类型的等代数余子式矩阵**Y**的伴随有向图，那么对于r≠s和p≠q，有

$$Y_{rp,sq}=\sum_{P_{rs}^{p}}[(-1)^{\alpha}f(P_{rs}^{p})\sum_{t_{p}^{*}}f(t_{p}^{*})] \tag{4.165}$$

式中P_{rs}^{p}是连接节点r和s的，及含有G_{α}的边e_{pq}的，相对于节点p的真路径。如果边e_{pq}和e_{sr}的取向都与定向回路$e_{sr}\cup P_{rs}^{p}$的取向相反或者一致，则$\alpha=0$，这里e_{sr}是从节点s指向节点r的边，否则$\alpha=1$。而t_{p}^{*}是$G_{\alpha}(P_{rs}^{p};\ \phi)$中以p为参考点的有向树，组合节点用p表示，这里$G_{\alpha}=G\cup e_{pq}$和$f(e_{pq})=1$。

证明：由于P_{rs}^{p}和t_{p}^{*}的对应子图在G(Y)中不是$t_{rp,sq}$，就是$t_{rq,sp}$，反之亦然。定理直接根据式(4.157)、(4.163)和(4.164)得出。

推论 4.23：如果G(Y)是线性网络N的不定导纳矩阵Y的伴随有向图，那么对于r≠s和p≠q有

$$Z_{rp,sq}=\frac{Y_{rp,sq}}{Y_{sr}}=\frac{\sum_{P_{rs}^{p}}[(-1)^{\alpha}f(P_{rs}^{p})\sum_{t_{p}^{*}}f(t_{p}^{*})]}{\sum_{t_{k}}f(t_{k})} \tag{4.166}$$

式中t_k是G(Y)的有向树。

对于r=p和s=q，转移阻抗函数$Z_{rp,sq}$变为驱动点阻抗函数，于是式(4.166)可以进一步简化。

推论 4.24：

$$Z_{rr,ss}=\frac{Y_{rr,ss}}{Y_{sr}}=\sum_{t_{m}'}f(t_{m}')/\sum_{t_{k}}f(t_{k}) \tag{4.167}$$

式中 t_m 是从 G(Y) 中短接节点 r 和 s 而得到的有向图中以 m 为参考点的有向树。

注意到，在式(4.163)—(4.167)中，$G_\alpha(P^p_{r1};\ \phi)$ 的参考点 p，G(Y) 的 k 和式(4.167) 的 m 的选择都是任意的，因为这些有向图的伴随矩阵是等代数余子式矩阵。

例 4.11：考虑如图 4.32 所示的有向图G，计算G中所有的 $f(t_{41,22})$。为此对G附加一条权为 1 的边 e_{12}(虚线)，根据式(4.163)得到

$$\sum_{t_{41,22}} f(t_{41,22}) = \sum_{P^1_{42}} \left[f(P^1_{42}) \sum_{t^*_1} f(t^*_1)\right] = g(b+f) + bf(1)。\tag{4.168}$$

重提一下，在§ 2.1 中曾定义过 $f(\phi)=1$。

例 4.12：考虑如图 4.1 所示的晶体管反馈放大器。放大器的不定导纳矩阵 Y 的伴随有向图 G(Y) 如图 4.2 所示。假定我们要求计算转移阻抗函数 $Z_{13,44}$，就对 G(Y) 附加一条权为 1 的边 e_{34}。所得的图如图 4.33 所示。根据式(4.166)有

$$Z_{13,44} = \frac{\sum_{P^3_{14}} \left[(-1)^q f(P^3_{14}) \sum_{t^*_3} f(t^*_3)\right]}{\sum_{t_k} f(t_k)}$$

$$= \frac{G_b[g_a - (g_c - \alpha g_e) \cdot g_c] + g_b(g_c - \alpha g_e)(1)}{\sum_{t_k} f(t_k)} \tag{4.169}$$

式中(4.169)的分母在式(4.38)中给出，当然式(4.169)的分子式(4.61)中给出的相同。注意，这里不存在如式(4.159)中所示类型的真路径。由于放大器的电流增益(定义为 i_3 对 i_1 之比)与转移阻抗函数 $Z_{13,44}$ 的关系由下式表示

$$i_3/i_1 = G_8 Z_{13,44} \tag{4.170}$$

i_3/i_1 可以简单的代入而得到。

设要计算转移阻抗函数 $Z_{12,43}$，为此，对 G(Y) 附加权为 1 的边 e_{23}，根据式(4.166)有

$$Z_{12,43}=\frac{\sum\limits_{P^2_4}\left[(-1)^a f(P^2_{14})\ \sum\limits_{t_2^*} f(t_2^*)\right]}{\sum\limits_{t_k} f(t_k)}$$

$$=\frac{g_b(G_d+ag_e)(1)-G_b(g_c-ag_e)(1)}{\sum\limits_{t_k} f(t_k)} \tag{4.171}$$

式中分母在式(4.38)中给出。

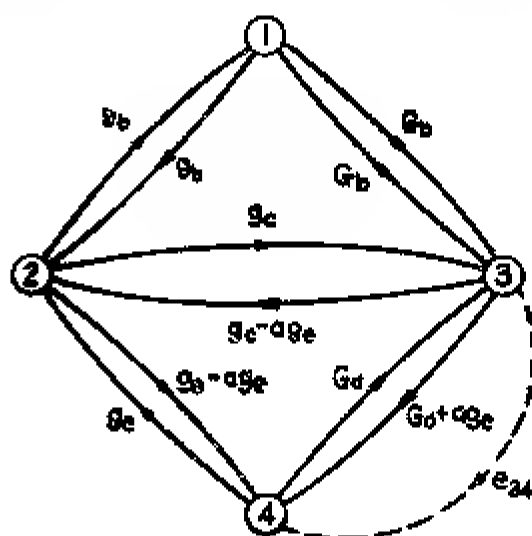


图 4.33　图 4.1 反馈放大器的伴随有向图，其中附加权为 1 的边 e_{34}

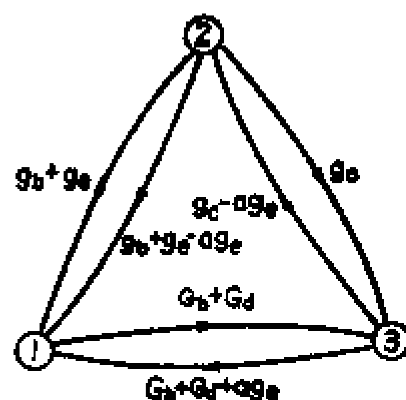


图 4.34　从图 4.33 中把节点 1 和 4 等同而导出的有向图

最后，如果需要计算驱动点阻抗函数 $Z_{11,44}$ 只需要从图 4.34 所示的有向图 G″ 中计算 $Z_{11,44}$ 的分子：

$$\begin{aligned}\sum_{t''_m} f(t''_m) &= (g_b+g_e-ag_e)(G_b+G_d+ag_e)+(G_b+G_d+ag_e)g_e\\ &\quad +(g_b+g_e-ag_e)(g_c-ag_e)\\ &=(G_b+G_d)g_c+(g_b+g_e)g_c\\ &\quad +(g_b+g_e-ag_e)(G_b+G_d)\end{aligned} \tag{4.172}$$

式中前面两行是将 G″ 的节点 1 作为参考点而得的，而第三行是用

节点 3 为参考点而得的。

定义 4.19：开路电压增益函数或转移电压比函数。

在如图 4.30 所示网络的节点对 rs 和 pq 之间的（开路）电压增益函数或转移电压比函数用符号 $g_{rp,sq}$ 表示，当所有初始条件和独立源都置于零以及输出端开路时，电压 V_{pq} 对电压 V_{rs} 之比。

因此，根据式(4.155)和(4.156)得到

$$g_{rp,sq}=Z_{rp,sq}/Z_{rr,ss}=Y_{rp,sq}/Y_{rr,ss} \tag{4.173}$$

利用式（4.166）和（4.167），N的电压增益函数 $g_{rp,sq}$ 可以类似求得。

事实上，只需要记住转移阻抗函数 $Z_{rp,sq}$ 的公式(4.155）就够了，其它驱动点阻抗和电压增益函数这两个公式(4.156)和(4.173)都极易从第一个公式中推导得出。公式(4.156）是第一式的特殊情况(其中 r=p 和 s=q)。公式(4.173）仅是其它两个式的商。当然，这些公式中提出的结果是非常一般性的，因为字母 r，p，s 和 q 可以指出任何网络中任何四个节点的标号。

6.2 短路转移导纳和电流增益函数

除了前面所定义的三个网络函数之外，还有三个对偶的网络函数可以以类似方法来处理。

定义 4.20：短路电流增益函数或转移电流比函数。

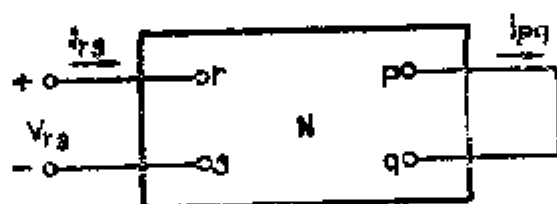


图 4.35 短路电流增益和转移导纳函数的黑盒描述

在如图 4.35 所示的网络的节点对 rs 和 pq 之间的短路电流增益函数或转移电流比函数，定义为当所有初始条件和网络N中独立源置于零时，短路电流 i_{pq} 对电流 i_{rs} 之比。对于 r=p 和 s=q，$\alpha_{rp,sq}$ 定义为 1。

推论 4.25：对于 $r \neq s$ 和 $p \neq q$，有

$$\alpha_{rp,sq} = \frac{Y_{rp,sq}}{Y_{pp,qq}} = \frac{\sum_{P^p_{rs}}\left[(-1)^{\alpha} f(P^p_{rs}) \sum_{t^*_p} f(t^*_p)\right]}{\sum_{t''_k} f(t''_k)}, \tag{4.174}$$

式中 t''_k 是从 G(Y)中短接节点 p 和 q 所得的有向图中以 k 为参考点的有向树，所有其它符号与式（4.165)中定义相同。

证明：设 N'' 是从给定网络 N 中在节点 p 和 q 之间连接一条导纳为 y 的支路所得的网络。为了简单起见，用双撇号“″”表示对 N'' 所定义的同类参数。例如 Y''，$Z''_{rp,sq}$ 和 V''_{pq} 分别表示 N'' 中不定导纳矩阵，转移阻抗矩阵函数和从 q 到 p 的电压升。因此根据式（4.155)有

$$y z''_{rp,sq} = y v''_{pq}/i'_{rs} = y Y''_{rp,sq}/Y''_{qq} \tag{4.175}$$

于是，如果让 y 趋于无穷大，则式(4.175）的左边就是N中的短路电流增益函数 $\alpha_{rp,sq}$，而 Y''_{qq} 趋近于 $yY_{pp,qq}$，$Y'_{rp,sq} = Y_{rp,sq}$，则恒等式（4.174）立即得出，这就证明了推论（也可参见习题4.67)。

因此，如果网络N的不定导纳矩阵是对称的，则根据式(4.173)和(4.174）得出：从一个节点对到另一个节点对的开路电压增益函数等于在同样节点对之间以相反方向的短路电流增益函数。一个具有对称不定导纳矩阵的电网络称为是互易的，更具体地说，对于一个互易网络，有 $g_{rp,sq} = \alpha_{pr,qs}$。

定义 4.21：短路转移导纳函数。

在图 4.35 所示的节点对 rs 和 pq 之间的转移导纳函数，用符号 $y_{rp,sq}$ 表示。定义为当网络N中所有初始条件和独立源均置于零，短路电流 i_{pq} 对电压 v_{rs} 之比。对于 $r=p$ 和 $s=q$ $y_{rp,sq}$ 未定义。

因此，如果利用式(4.174)和仿照如式(4.174)的证明那样类似的论据，得到以下结论(习题 4.48)。

推论 4.26：对于s≠q≠p，有

$$y_{pp,sq}=Y_{pp,sq}/Y_{pp,ss,qq} \tag{4.176a}$$

而对于r≠p≠s，有

$$y_{rp,ss}=Y_{rp,ss}/Y_{rr,pp,ss} \tag{4.176b}$$

而对于r≠p≠s≠q，有

$$y_{rp,sq}=Y_{rp,sq}/(Y_{rr,ss,pp}+Y_{rr,ss,qq}-Y_{rr,ss,pq}-Y_{rr,ss,qp}) \tag{4.176c}$$

式中三阶代数余子式$Y_{rr,ss,pq}$由下式定义：

$$Y_{rr,ss,pq}=\operatorname{sgn}(r-p)\operatorname{sgn}(r-q)\operatorname{sgn}(s-p)\operatorname{sgn}(s-q)(-1)^{p+q}M_{rr,ss,pq} \tag{4.177}$$

而$M_{rr,ss,pq}$是从不定导纳矩阵Y中通过划去r s p行和r.s.q 列所得子矩阵的行列式。

为了用拓扑方法表示$Y_{rr,ss,pq}$中的项，需要下列定义，此定义是有向2 树概念的简单推广。

定义 4.22：有向3-树。

一个n-节点有向图G的子图，当且仅当(1)它具有 n -3 条边，并且不含有任何回路(不一定是有向回路)以及(2)除节点i，j和k射出度为0之外，其它每个节点的射出度均为1。称为G中以 i，j和k为参考点的有向 3 树，用符号$t_{i,j,k}$表示。

因此，有向3-树是由三个无回路的片组成的生成子图，其中每个片对于G的某个局部子图来说是有向树。这些片中的一个，二个或三个都可以由孤立节点组成。显然，这个概念可以推广到G的有向k 树，§5 中所概述的方法也可以推广于有向 k 树的产生。这些推广的细节留作为练习(习题 4.13 和 4.54)。

象有向2-树一样，有时某些特定节点要求出现于有向3 树的不同片中。为了方便起见，我们使用更多的下标，例如，符号$t_{ab,c,def}$用来表示有向3-树，其中节点a和b处于一个片中，节点c处于另一个片中，而节点d、e和f处于又另一个片中，这里节点a、c和d(第

一个下标)是各个片内参考节点。

有了这些定义，就可以阐明对$y_{rp,sq}$的拓扑公式，为了简便起见，设

$$U_{r,s,pq} = \sum_{t_{r,s,pq}} f(t_{r,s,pq}) \qquad (4.178)$$

式中$t_{r,s,pq}$是G(Y)的有向3-树，类似于定理4.4的那些论证，立即看到(习题4.52)：

$$Y_{rs,ss,pq} = U_{r,s,pq} \qquad (4.179)$$

由于有向3树$t_{r,s,pq}$在$U_{r,s,pq}$和$U_{r,s,p}$都会出现，这样的项不会出现于式(4.176e)分母的最终展开式中。类似地，有向3-树$t_{r,s,qp}$也不会出现于最终展开式中。因此，

$$\begin{aligned} Y_{rr,ss,pp} Y_{rr,ss,qq} - Y_{rr,ss,pq} Y_{rr,ss,qp} &= U_{r,s,p} U_{r,s,q} - U_{r,s,pq} U_{r,s,qp} \\ &= U_{rq,s,p} U_{r,sq,p} + U_{rp,s,q} U_{r,sp,q} \end{aligned} \qquad (4.180)$$

值得注意的是，在以上展开式中避免了对消项。使用了这些之后，公式(4.176)可以合并成一个式子，进行拓扑展开。

推论4.27：对于$r \neq s$和$p \neq q$，有

$$y_{rp,sq} = \frac{Y_{rp,sq}}{U_3} - \frac{\sum_{P^p_{rs}} \left[(-1)^{\sigma} f(P^p_{rs}) \sum_{t^*_p} f(t^*_p) \right]}{U_3} \qquad (4.181)$$

式中$U_3 = U_{rq,s,p} + U_{rp,s,q} + U_{r,sp,q}$。

证明：推论直接从式(4.176)，(4.165)和(4.180)得出。

在下面将证明项U_3可以进一步简化，它等效于从G(Y)中分别将节点p和q，以及r和s短接而得的有向图中有向树的边权乘积之和。

推论4.28：

$$U_3 = U_{rq,s,p} + U_{r,sq,p} + U_{rp,s,q} + U_{r,sp,q}$$

$$=\sum_{t''_k} f(t''_k) \tag{4.182}$$

式中t''_k是G''中以K为基准节点的有向树，而G''是从G(Y)中先短接节点p和q，再短接节点r和s所得的有向图。对G''的t''_k来说，参考点K的选择是任意的。

证明：令G'是从G(Y)将节点p和q短接，并用p表示组合节而得的有向图。同样在G''中设r和s，p和q的组合点分别用r和p表示。由于G''的伴随矩阵是等代数余子式矩阵，可以令K=r。

$$\begin{aligned}
\sum f(t''_r) &= \sum f(t'_{r,s}) \\
&= \sum f(t'_{rp,s}) + \sum f(t'_{r,sp}) \\
&\quad \sum f(t_{rp,s,q}) + \sum f(t_{rq,s,p}) + \sum f(t_{r,sp,q}) + \\
&\qquad \sum f(t_{r,sq,p}) \\
&= U_{rp,s,q} + U_{rq,s,p} + U_{r,sp,q} + U_{r,sq,p}
\end{aligned} \tag{4.183}$$

式中撇号"′"表示从G'中取的有向2-树，而和式是在它们相应的有向图中取遍所有的有向2-树和有向3-树求和。推论证毕。

最后提一下，驱动点阻抗函数的倒数称为驱动点导纳函数，它完全不同于转移短路导纳函数(同样，参见第二章§6.3)。

例4.13：考虑图4.33的伴随有向图G(Y)，假设要求计算短路转移导纳函数$y_{13,44}$，则根据(4.181)有

$$y_{13,44} = \frac{1}{U_3}\sum_{P_{14}^3}\left[(-1)^{\sigma} f(P_{14}^3)\sum_{t_3^*} f(t_3^*)\right]$$

$$= \frac{1}{U_3}\left\{ G_b[g_b + (g_e - ag_c) + g_c] + g_b(g_c - ag_c) \right\} \tag{4.184a}$$

式中 $$\begin{aligned} U_3 &= U_{14,4,3} + U_{1,4,3} + U_{13,4,4} + U_{1,43,4} \\ &\quad - U_{1,4,3} = g_b + g_c + (g_e - ag_e) \end{aligned} \tag{4.184b}$$

根据式(4.182)，式(4.184b)中的所有项也就是从G(Y)中把节

点1、3和4短接所得的有向图G″中的有向树。在G″中可以任何点为参考点，而式(4.182)将全部简化为式(4.184b)的结果。

如果要计算放大器的短路电流增益函数$\alpha_{12,44}$，那么根据式(4.174)，只需计算分母项$Y_{33,44}$，它由下式给出

$$(g_b+G_b)(g_e+g_e-\alpha g_e)-g_bG_b$$

6.3 开路阻抗矩阵和短路导纳矩阵

根据上面的讨论，显然公式(4.166)和(4.181)可以直接应用来求二端口网络的开路阻抗参数或短路导纳参数（CHEN[1969c]）。更具体地说，图4.36的二端口网络经常用下面的方程系来描述与负载无关，

$$\begin{bmatrix} I_{rs} \\ I_{pq} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} y'_{11} & y'_{12} \\ y'_{21} & y'_{22} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{rs} \\ V_{pq} \end{bmatrix} \tag{4.185}$$

式(4.185)的系数矩阵是二端口网络的短路导纳矩阵，用符号Y_{sc}表示。Y_{sc}的元素称为短路导纳参数或处于短路情况下的y参数。如果Y_{sc}是非奇异的，Y_{sc}的逆用符号Z_{oc}来表示，它

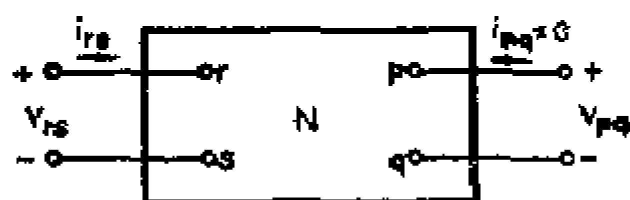


图 4.36 一般二端口网络

是二端口网络的开路阻抗矩阵，而Z_{oc}的元素称为开路阻抗参数或简称为z参数。注意到这些参数可以通过短路或开路二端口网络的适当端子而得到，所以用“短路”和“开路”这些名称的理由是很清楚的。例如，为了得到y'_{12}，可以将端子r和s短路，而将电压源跨接在端子p和q上。那么短路端电流的(拉普拉斯)变换对输入电压的变换之比就是y'_{12}，这也是$y_{pr,qs}$的负值。类似地，对y'_{11}，y'_{21}和y'_{22}也适用。另一方面，如果$Z_{oc}=[Z'_{ij}]$，那么为了求Z'_{21}，可以使端子p和q开路，在端子r和s间连接一电流源，开路端上电压的拉氏变换对输入电流的拉氏变换之比就是Z'_{21}。类似地，Z'_{11}和Z'_{22}是相应端口上当另一个端口开路时的驱动点阻抗函数，而Z'_{12}是开路转移阻

抗函数$Z_{pr,qs}$。

为了方便起见，使用以下简化符号

$$W_{rp,sq} = \sum_{t_{rp,sq}} f(t_{rp,sq}) \tag{4.186}$$

式中$t_{rp,sq}$是G(Y)的有向2-树。

推论4.29：设G(Y)是如图4.36所示的二端口网络的伴随有向图。那么其短路导纳矩阵Y_{sc}由下式给出

$$Y_{sc} = \frac{1}{U_3}\begin{bmatrix} W_{p,q} & W_{qr,ps} - W_{pr,qs} \\ W_{rq,sp} - W_{rp,sq} & W_{r,s} \end{bmatrix} \tag{4.187}$$

式中 $U_3 = U_{rq,s,p} + U_{r,sq,p} - U_{rp,s,q} - U_{r,sp,q} \neq 0$。

同样，为了方便起见，设

$$V_k = \sum_{t_k} f(t_k) \tag{4.188}$$

式中t_k是G(Y)的有向树。

推论4.30，如果$V_k \neq 0$，则图4.36的二端口网络的开路阻抗矩阵Z_{oc}由下式给出，

$$Z_{oc} = \frac{1}{V_k}\begin{bmatrix} W_{r,s} & W_{pr,qs} - W_{qr,ps} \\ W_{rp,sq} - W_{rq,sp} & W_{p,q} \end{bmatrix} \tag{4.189}$$

由于Z_{oc}是Y_{sc}的逆，则Y_{sc}的行列式是Z_{oc}的行列式的倒数。利用这一点连同式(4.187)和(4.189)，有以下推论：

推论4.31：

$$\det Y_{sc} = 1/(\det Z_{oc}) = V_k/U_3 \tag{4.190}$$

因此，特别是如果二端口网络N是无源的且不含有互感，则伴随有向图G(Y)即为二端口网络本身。在本节和前面两节中导出的所有公式只要稍微动一下都可以直接应用于二端口网络本身。例如，

真路径P_{rs}^{r}变成N中连接节点r和s以及含有附加边e_{pq}的路径，而有向3 树变成3 树，这些项是不言而喻的，没有必要再一次详细讨论。因此，我们满足于简单地指出这种可能性。

利用图 4.31 的直观表示法，式(4.187)和(4.189)的非对角线元素可以用下列图形方式表示：

$$W_{qr,ps} - W_{pr,qs} = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}, \quad (4.191a)$$

$$W_{rq,sp} - W_{rp,sq} = \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} r & p \\ s & q \end{pmatrix}, \quad (4.191b)$$

这说明在公式中涉及两种类型的有向2-树。

例 4.14：考虑如图 4.37(a)所示的有源二端口网络 N，其伴随有向图G(Y)如图4.37(b)所示。假定要求计算N的短路导纳参数和开路阻抗参数。根据式(4.187)和(4.189)，可以计算出下列各项：

$$W_{23,14} = 0,$$

$$W_{21,34} = y_1 y_3 y_6 y_4,$$

$$W_{13,42} = g_m y_1 y_6 g_m,$$

$$W_{12,43} = y_1(y_3 - g_m) y_6 (y_4 - g_m),$$

$$V_k \quad V_1' \quad (y_1 + y_2) y_3 (y_4 - g_m) \quad (y_1 + y_2) y_3 g_m$$

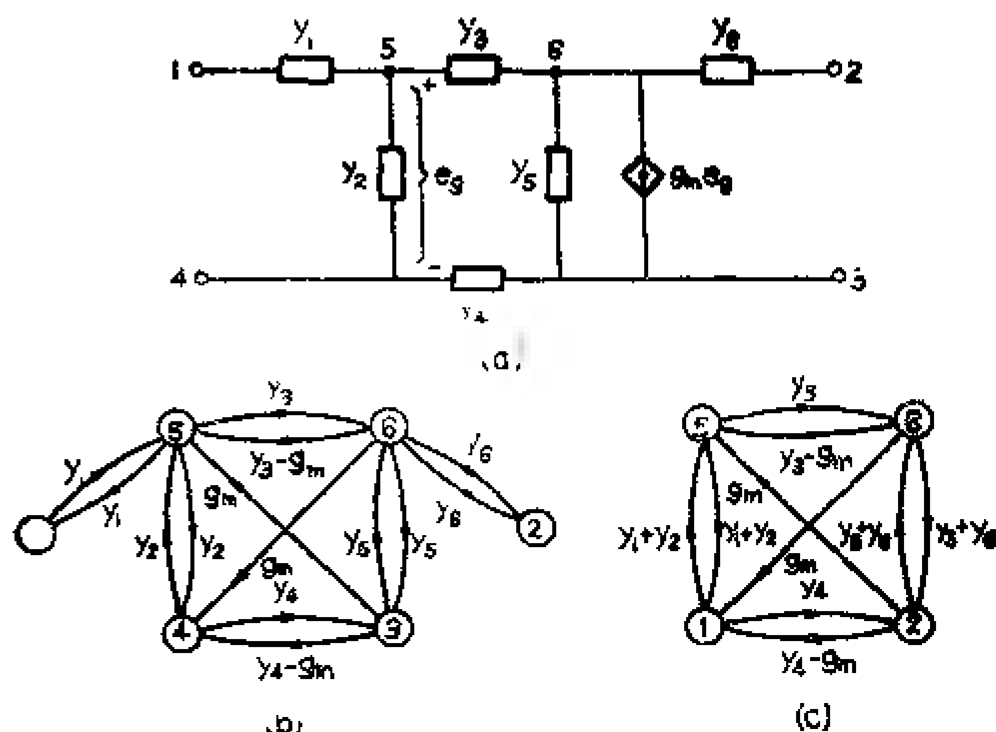


图 4.37 (a) 有源两端口网络；
(b) 其伴随有向图；
(c)从(b)中分别把节点 1 和 4，及节点 2 和 3 短接而导出的有向图。

$$+(y_1+y_2)y_3(y_5+y_6)+y_4(y_5+y_6)(y_1+y_2)$$
$$+y_4(y_5+y_6)y_3+y_4g_my_3$$

式中V_6''等于从G(Y)中把节点 1 和 4 以及节点 2 和 3 分别短接所得的有向图中，以 6 为参考点的有向树导纳乘积之和。所得的图如图4.37(c)所示。为了减少有向树数目以及也是对消项数目，选节点 6 为参考节点。

类似地，可以计算：

$$W_{2,3}=y_4(y_5+y_6)y_1y_2+y_4(y_5+y_6)y_1y_3+$$
$$y_2y_3(y_4-g_m)y_1+y_2y_3y_1+(y_5+y_6)+$$
$$y_4g_my_3y_1+y_2y_3y_1g_m,$$

这与从G(*Y*)中把节点 2 和 3 短接所得的有向图中以 6 为参考点的有向树导纳乘积之和相同。再一次说明在所得的图中参考点的选择是任意的。但是，一般来说项数是不同的。

$$
\begin{aligned}
W_{1,4} = {} & (y_1 + y_2)y_3(y_4 - g_m)y_6 + (y_1 + y_2)y_3 g_m y_6 + \\
& (y_1 + y_2)y_3 y_5 y_6 + y_4 y_5 y_6(y_1 + y_2) \\
& + y_4 g_m y_3 y_6 + y_4 y_5 y_6 y_3,
\end{aligned}
$$

这与从G(Y)中把节点 1 和 4 短接所得的有向图中，以 6 为参考点的有树导纳乘积之和相同。

于是所要求的网络函数可以用式(4.187)和(4.189)来计算。

6.4 伴随有向图的物理意义

到目前为止，我们都是利用给定网络的不定导纳矩阵来系统地阐述网络问题。利用不定导纳矩阵的理由是所有无源支路的导纳都以极其对称的形式填入不定导纳矩阵。每个支路导纳出现于形成主对角线为中枢的正方形的四个元素位置上，与这一正方形有关的两行和两列具有与所考虑的支路连接到网络上的节点那样相同的号码。在主对角线上支路导纳以正号填入，而在正方形的非主对角线的角上以负号填入。此外对于非互易元件，例如晶体管或电子管或任何受控源的跨导，则在构成矩形边框的四个元素位置上填入不定导纳矩阵，但不再是以主对角线为中枢。这种表述的用处在于这种情况，即便于直接建立从网络中任何节点对到其它节点对的开路转移阻抗和电压增益函数，或者短路导纳和电流增益函数的公式，而不必借助于以某特定节点为电位参考点。

这种选择电位参考点的自由是由于网络的不定导纳矩阵是等代数余子式矩阵的反映，这也表明矩阵的伴随有向图中有向树的参考点的选择是任意的。这些叙述实际上是同一件事的三种不同的说法。这种方法强调这样一个事实：在解决电网络问题中，关于取那一个节点为电压参考点，或者从给定的一组线性方程式中那一个方程式认为是多余的而删去它，这是无关紧要的，因为在每种情况下，解必定是相同的。实际上这表明绝对电位上是没有意义的。

考虑一个受控电流源，其等效网络如图 4.83(a)所示，网络的不定导纳矩阵由下式给出：

$$
\begin{array}{c|cccc|}
 & v_a & v_b & v_c & v_d \\
i_a & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i_b & 0 & 0 & 0 & 0 \\
i_c & y & -y & 0 & 0 \\
i_d & -y & y & 0 & 0
\end{array}
\qquad (4.192)
$$

式中v和i是网络的节点电压和输入电流．正如前面所述，单向网络元件的跨导y以矩形形式(不一定以主对角线为中枢)填入不定导纳矩阵，这种非对称性是违反互易条件的根据。显然跨导是通过对应于矩阵前面两列的节点a和b上的电压所激动。同样，跨导影响与矩阵第三行和第四行相联系的节点c和d的电流。因此，矩阵的伴随有向图如图 4.38(b)所示，这种表现法当然是十分普遍的。节点a、b、c和d不必是完全相异的。例如，如果b和d是相同的，且 y　g_m，g_m——电子管的跨导，那么除了无源元件之外，图 4.38 就是电子管的模型。类似地，如果b－d，以及y　$-\alpha g_e$，那么除了无源元件之外，它就是晶体管的模型；这里α是电流放大因子，而g_e是发射极电导。

对于回转器的模型，参见习题 4.56 和图 4.55 。

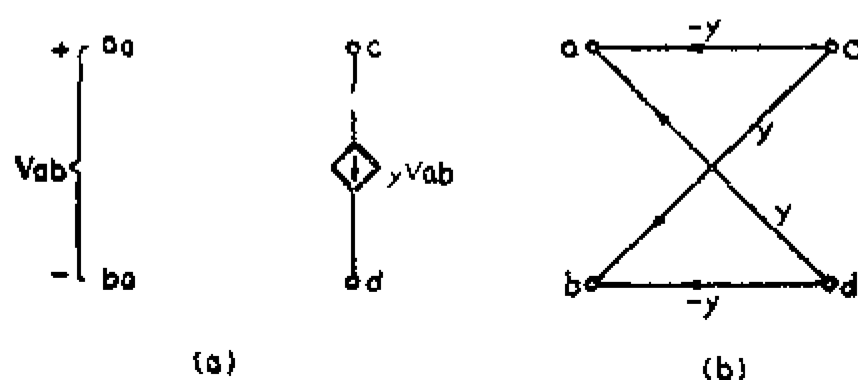


图 4.38 (a) 电压控制电流源，(b) 及其伴随有向图。

另一个经常出现在网络中的元件模型是理想变压器。理想变压器的特性用一个实常数 n 来表征，它显示了两个绕组的电流和电压的关系，如图 4.39(a)所示．理想变压器本身具有无穷大短路导

纳和无穷大的开路阻抗，因此，形式上不能在节点基础上表征特性。但是，实际上变压器通常与具有一个有限导纳的某个其它网络元件串联出现。如果把比如说 y_0 这个元件与变压器串联起来，那么不定导纳矩阵元素变成有限的。矩阵由下式给出：

$$\begin{bmatrix} y_0 & y_0 & -ny_0 & ny_0 \\ y_0 & y_0 & ny_0 & -ny_0 \\ -ny_0 & ny_0 & n^2y_0 & -n^2y_0 \\ ny_0 & ny_0 & n^2y_0 & n^2y_0 \end{bmatrix} \quad (4.193)$$

由于矩阵是对称的，矩阵的伴随（无向）图在图 4.39(b)中给出。

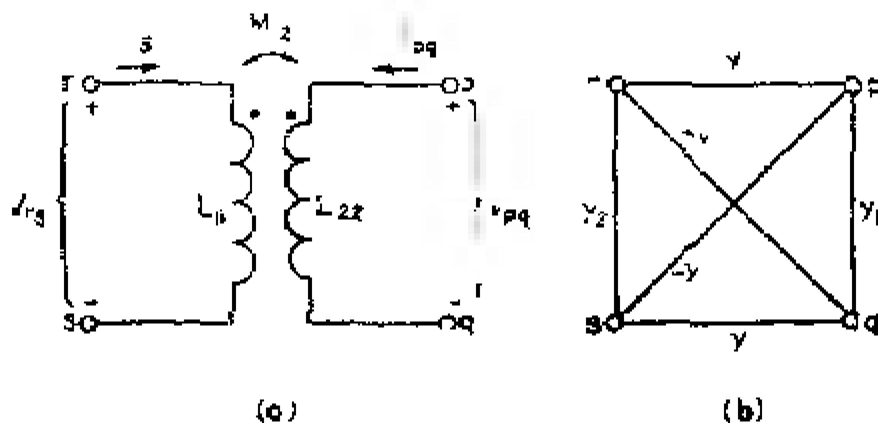


图 4.39 (a) 具有有限串联导纳的理想变压器；(b) 及其伴随图。

对于两个非全耦合线圈的模型，参见习题 4.53 和图4.49。

因此，如果这些元件接入网络，并将完整的网络视为这些小网络以对应节点连接在一起的并联形式，网络的不定导纳矩阵只不过是子网络的不定导纳矩阵之和。理由是并联连接（叠加于对应的节点）意味着在每个节点上电压相等和电流相加，那么不定导纳矩阵的相加是必然的结果，这就导致了我们直接从给定网络建立伴随有向图。

在前一节中，我们已经表明网络函数怎样可以由观察直接从网络的伴随有向图中来得。因此，这种方法取决于构成伴随有向图的效率。下面对最常用的大型网络提出构成伴随有向图的简单步骤。所考虑的网络是由电阻、电容器、电感器（包括与某个有限导纳串

联的理想变压器)、回转器、晶体管、电子管和受控源这些元件组成的。假设受控源是受控电流源,它们仅取决于其它支路和节点对的电压。这种假设完全是一般的,因为所有其它类型的受控源可以很容易地转变为以上类型的受控源(如果有必要,采用 BIAKESLY 变换,例如,参见 SESHU 和 BALABANIAN[1959])。当然,有可能推广这种方法到极其一般类型的线性网络。这里不这样作的理由是这里所需的规则不多而且这些规则容易记住且运用简单。假如网络由其它类型元件组成还是从矩阵画出伴随有向图比较简单。

下面是从给定的网络得出伴随有向图的步骤:

(i) 去掉所有独立电源:短路电压源和开路电流源。

(ii) 从第一步中所得的网络得出等效网络:用对应的等效网络替换所有有源元件。

(iii) 用图 4.38(b) 和 4.55(b) 对应的有向图模型替换有源元件(受控电流源和回转器),移去有源之元件,然后由它们对应的有向图模型叠加在第(ii)中已经得到的等效网络上。

对于理想变压器和互感器,处理步骤是相似的,唯一的差别是使用图 4.39(b)和 4.49(b)的伴随对称有向图。

(iv) 用一对方向相反的边替换每个无源元件,这一对边中的每条边权是无源元件的导纳。

(v) 如果必要的话,合并并联边:在相同节点对之间相同方向的边合并成一个边,其权等于平行边权之和。

对于网络的不定导纳矩阵 Y 的伴随有向图 G(Y) 来说,有一个简单的物理解释。由于 G(Y)的节点与 Y 的列或行相联系,则很方便地就把变量 v_1, $v_2\cdots$和 v_n分配给 G(Y)的节点 1, 2, ···, 和 n。这些节点的有关权被认为在节点 1、2, ···n和某个任意的但未特指的参考点之间所测的节点电位。如果 v_{jk} 表示节点 j 和 k 之间的电位差,即 $v_{jk}=v_j-v_k$, 进入节点 j 的源电流 I_j (对于 j=1, 2, ···, n)由下式给出:

$$I_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq j}}^{n} f(j,k) v_{jk} \qquad (4.194)$$

这就是式(4.152)中给出的网络节点方程系。换言之，伴随有向图G(Y)的每条边可以认为是称为双极子的基本网络元件，如图4.40(a)所示。电流i_{jk}在双极子中只能沿箭头方向移动，且与其端点电位v_j和v_k的电位差成正比，比例常数称为双极子导纳y_{jk}。实际上，双极子本身就是具有导纳为y_{jk}的无源支路和理想二极管串联连接的模型。显然双极子并不满足互易性，因为它是一个单向元件。但是双极子网络包括满足互易性的网络，作为它的一种特殊情况。为了看清这一点，只需注意到，以相反方向指向和具有相同导纳的两个双极子并联等效于一个普通服从欧姆定律的单个两端支路导纳。对于单个双极子；欧姆定律由传输定律所代替

$$i_{jk} = y_{jk}(v_j - v_k) \qquad (4.195)$$

此式与克希荷夫电流定律一起给出了式(4.152)为一般节点方程系。

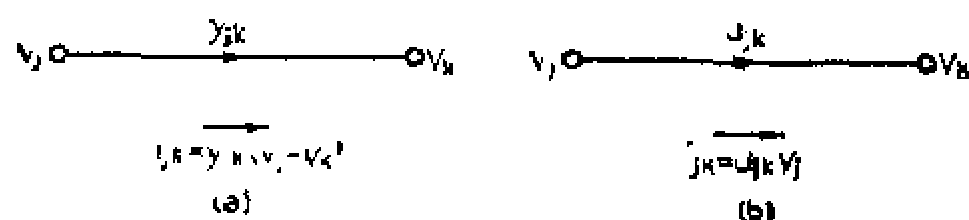


图 4.40 (a) 双极子；(b) 单极子。

出现于一般网络中表示如晶体管或电子管的受控电流源具有图4.38(b)的双极子表示法。与图4.38(a)给出的较普遍的受控电流表示法相比较，这种模型初看起来可能不习惯和不直观，但是，可以表明，这模型实际上更加逼近于实际情况。如果v_a、v_b、v_c和v_d分别表示节点a、b、c和d与某个任意的但未指明的参考点之间所测得的节点电位，那么流出节点c的电流量恰好是$y(v_a - v_b)[= -y(v_c - v_a) + y(v_c - v_b)]$，并有电流$y(v_a - v_b)$流入节点d，电流$y(v_c - v_d)$流出节点a，以及电流$y(v_c - v_d)$流入节点b。如果把节点

b 和 d 等同起来，并设 $y = g_m$(电子管的跨导)，那么，图4.38(b)即表示电子管的模型(加入无源元件)。以上的量对应于电子管中正电流流动，因为正电流实际上从阳极通过栅极向阴极流动。

存在着另一种如 MASON[1957]提出的可能性，这里，可对 G(Y)的每条边都看成为称为单极子的基本网络元件，如图4.40(b)所示，单极子有一个导纳 u_{jk}，而其电流只能沿箭头方向流动，并与其两个端点电位中的一个 v_j 成正比，和另一端点电位 v_k 无关。事实上，单极子本身是一个板极电阻非常大的栅极接地的三极管模型。这里 j 是阴极端，而 k 是板极端。此外，单极子网络包括满足互易性的网络，作为它的一种特殊情况。对于单个单极子，欧姆定律由传输定律代替

$$i_{jk} = u_{jk} v_j \tag{4.196}$$

因此，在 G(Y)中，如果设 $f(k, j) = u_{jk}$，式(4.196)与克希荷夫电流定律：

$$\sum_x i_{jx} = \sum_x i_{xj} \tag{4.197}$$

一起，给出单极子网络的一般节点方程系：

$$v_j \sum_x u_{jx} = \sum_x u_{xj} v_x \tag{4.198}$$

式中 j，x = 1，2，…，n，但 x ≠ j。由于

$$\sum_x u_{jx} = \sum_x u_{xj} \tag{4.199}$$

则式(4.198)可以以稍微不同的形式写出：

$$\sum_x u_{xj}(v_j - v_x) = 0 \tag{4.200}$$

这恰好是式(4.152)中给出的节点方程系。因此，任何线性网络也可以完全由单极子的相互连接来表示。

6.5 伴随有向图的直接分析

在前面我们已经导出一般线性网络的各种类型的网络函数的拓扑公式，这些拓扑公式将网络函数用网络的伴随有向图中各种类型的拓扑量来表示。我们也指出怎样构成最常用的大型网络的图，并且对它们提供了一些简单的物理解释。因此伴随有向图本身可以认为是网络的物理模型。在这一节中，将表明怎样以系统和简单的方式来表示一般网络的各种拓扑公式。

象在这一章中讨论的其它许多论题一样，这里提出方法的基本概念并不是新的，而是由 KIRCHHOFF[1847]为了解网孔方程系以及 MAXWELL[1892]为了解节点方程系而首先利用的。在这里提出的处理方法类似于由 MASON[1957]给出的方法。但是，如前所述，其方法、观点和解释是完全不同的，但基本结论是一样的。

定义 4.23：电表支路。

电表支路是用来表示或是电流表（用符号 a_m 表示）或是电压表（用符号 v_m 表示）的有向边，电流参考方向由边的方向给出，而电压参考方向的正号落在电流参考方向箭头的尾部。

定义 4.24：电源支路

电源支路是用来表示独立电流源（用符号 cs 表示）或独立电压源（用符号 vs 表示）的有向边。电流参考方向由边的方向给出，而电压参考方向的正号落在电流参考方向的头部。

由于网络的伴随有向图 G(Y) 可以认为是它的物理模型，则连接电源支路和电表支路到 G(Y) 上使电表作出记录。如果它是电流表，那读数表示流过电表支路的电流量。如果它是电压表，那么读数表示跨接电表支路的电压降。

定义 4.25：传输系数。

设在 G(Y) 中接入从节点 p 指向节点 q 的电表支路和从 s 指向 r 的电源支路。电表读数对电源量值之比定义为 G(Y) 的节点对 rs 和 pq 之间的传输系数，用符号 $H_{rp,sq}$表示。

换言之，在前面几节中定义的所有网络函数都是传输系数 $H_{rp,sq}$的特殊情况，例如，如果电表支路表示电流表，而源支路表示电压源，那么传输系数 $H_{rp,sq}$表示短路转移导纳 $y_{rp,sq}$。另一方面，如果电表支路表示电压表，而源支路表示电流源，那么传输系数 $H_{rp,sq}$表示开路转移阻抗 $Z_{rp,sq}$。对于其它类型的网络函数，也都一样。为了方便起见，各种可能的组合在表 4.1 中给出：

表 4.1

		电表支路	
		电流表	电压表
电源支路	电流源	$\alpha_{rp,sq}$	$z_{rp,sq}$
	电压源	$y_{rp,sq}$	$g_{rp,sq}$

当然以上的结果是十分普遍的，因为字母 r、s、p 和 q 可以涉及任何线性网络中任意四个节点的标号。一般说来，也包括表支路和源支路首先串联连接，然后接入 G(Y) 中。

有了这些定义，不难看到在前面一节中导出的拓扑公式可以用下述方法用公式来表示。

定理 4.16：设 G 是一般线性网络的不定导纳矩阵 Y 的伴随有向图。设在 G 中接入从节点 p 指向 q 的电表支路和从 s 指向 r 的电源支路，那么对于 r≠s 和 p≠q，G 的传输系数 $H_{rp,sq}$由下式给出

$$H_{rp,sq}=\frac{\sum_{P^{p}_{rs}}(-1)^{\sigma}f(P^{p}_{rs})V^{*}_{k}}{V''_{r}} \tag{4.201}$$

式中

$$V_k^* = \sum_{t_k^*} f(t_k^*) \quad (4.202\text{a})$$

$$V_j' = \sum_{t_j'} f(t_j') \quad (4.202\text{b})$$

P_{rs}^p是相对于节点p，连接节点r和s，并含有G的电表支路的真路径，电表支路看作为权为1的边；如果表支路和源支路二者的取向都与由P_{rs}^p和源支路所形成有向回路的取向相反或者一致，则$\alpha=0$，否则$\alpha=1$。t_k^*和t_j'分别是$G(P_{rs}^p;\phi)$和G''中以k和j为参考点的有向树，而G''是从G中移去电流源和电压表支路，以及短接电压源和电流支路所得的有向图。

符号问题也可以另外考虑，α也可以直观地确定如下：如果在电流与电源的正方向的一致的情况下，使电表在真路径和电表支路形成的回路中记下一个正读数，则$\alpha=0$，否则$\alpha=1$。

可以注意到，在定理中参考节点k和j的选择是任意的，因为有向图$G(P_{rs}^p;\phi)$和G'的伴随矩阵是等代数余子式矩阵。此外，要求电压源支路vs和电流表支路am，作为短路是它们具有零的内部阻抗。要求电流源支路cs和电压表支路V_m作为开路(移去)，是因为它们具有无穷大的内阻抗。

基于单极子与式(4.201)相类似的公式也是由MASON[1957]给出的。但是，公式推导中给出的论据是启发式的，而且是十分曲折的。对于单极子图的拓扑规则的正式证明是由NATHAN[1962]根据两个矩阵乘积行列式的Binet Cauchy展开式而给出的。在以上所给的规则和MASON给出的规则之间唯一的差别是在真路径P_{rs}^p上，所有的边是指向节点P而不是离开节点P。这样作的理由是不难发现的。与从节点i指向节点j的单极子有关的单极子导纳是式(4.21)的元件y_{ji}。换言之式(4.21)的伴随单极子图实际上是矩阵(4.21)转置的伴随有向图。因此，毫不奇怪这两种方法的公式几乎是相同的。这一事实也已经由TALBOT[1966]指出。除了以

上讨论的公式以外，其它的方法也是可利用的。例如，参见PERCIVAL[1955]，COATES[1958]，MAYEDA[1958]，NATHAN[1965]，TALBOT[1965]以及NUMATA和IRI[1973]。

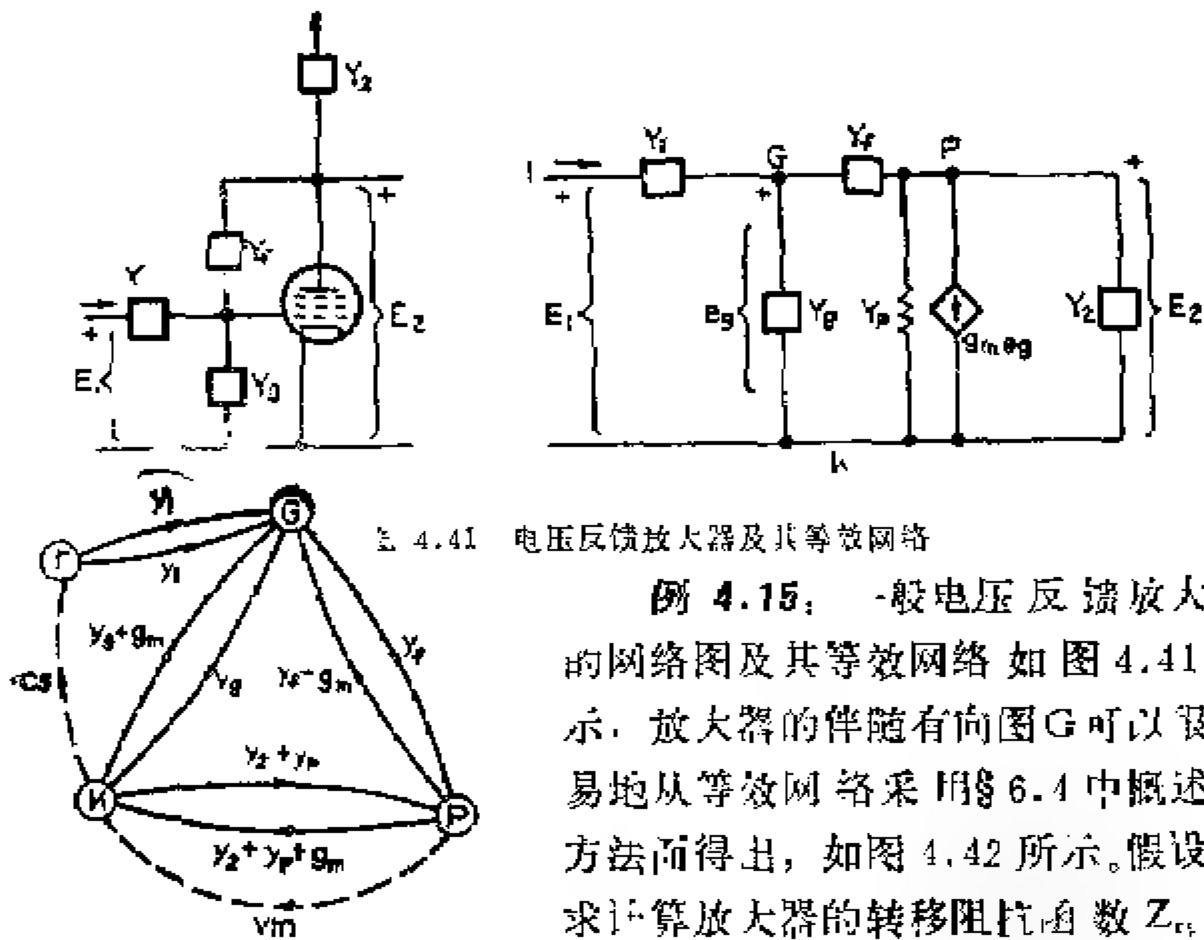


图 4.41 电压反馈放大器及其等效网络

图 4.42 放大器的伴随有向图

例 4.15：一般电压反馈放大器的网络图及其等效网络如图 4.41 所示，放大器的伴随有向图G可以很容易地从等效网络采用§6.4 中概述的方法而得出，如图 4.42 所示。假设要求计算放大器的转移阻抗函数 $Z_{rp,kk}$，为此在G中从节点P到k接入一电压表支路 V_m，而从节点k到节点r接入电流源支路CS，它仍在图 4.42 中用虚线表示出来。根据式(4.201)，有 $H_{rp,kk}=Z_{rp,kk}$ 以及

$$Z_{rp,kk}=\frac{1}{V_j''}\sum_{P_{rk}^p}(-1)^q f(P_{rk}^p)V_k^*$$

$$=\frac{y_1(y_f-g_m)(1)}{V_j''} \tag{4.203}$$

式中 $V_j''=V_k=y_1y_g[(y_f-g_m)+(y_2+y_p+g_m)]$

$$+y_1y_f(y_2+y_p+g_m)$$

$$=y_1[y_f(y_p+y_2+g_m)+y_g(y_f+y_p+y_2)], \tag{4.204}$$

式(4.204)中所需 G'' 的有向树集 t_k 可以在 G'' 中通过在节点对 r 和 k 上展开式而得出，而 G'' 是从 G 中移去电源支路和电表支路所得的有向图。

类似地，如果需要计算放大器的输入导纳函数，则如图 4.43(a)所示接入电表支路 am 和电源支路 VS。根据式(4.201)，有 $H_{rr,kk}=(1/Z_{rr,kk})$以及

$$\frac{1}{Z_{rr,kk}}=\frac{1}{V''}\sum_{P_{rk}^{r}}(-1)^{\sigma}f(P_{rk}^{r})V_{k}^{*}$$

$$=\frac{y_1y_f(y_2+y_p+g_m)(1)+y_1y_g[(y_f-g_m)+(y_2+y_p+g_m)]}{(y_1+y_g)(y_2+y_p)+(y_1+y_g+g_m)y_f+(y_2+y_p)y_f} \tag{4.205}$$

式中分母中的项对应于 G'' 中的有向树 t_p，如图 4.43(b) 所示。对于 G'' 的有向树 t_p'' 而言，选择节点 P 为参考点避免了产生相互对消的冗余项。显然，分子上的项实际上是与式(4.204) 中所给的那些一样的。

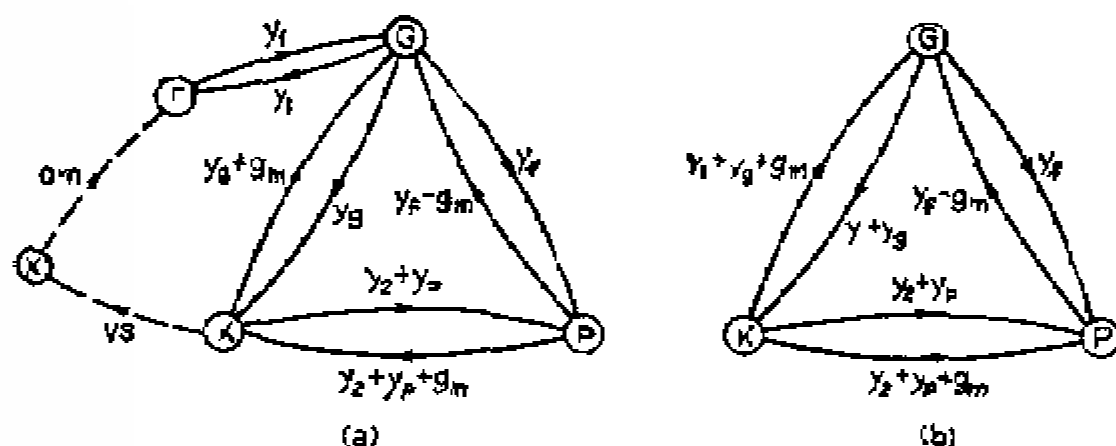


图 4.43 用于计算图 4.41 放大器的驱动点导纳函数的有向图

根据刚才作出的例子，显然如果用一条无向边代表一对方向相反的有向边，则伴随有向图 G(Y)的每条有向边的权与无向边的权相同，则可以进一步简化。借助这个简化，显然所得的 G(Y)是混合图(第一章§6)，它可以直接从等效网络作出，只需将单项元件的对应有向图，或理想变压器和互感耦合线圈的伴随图叠加到由原

网络的电阻、电容和(自)电感组成的子图上就可得出。用下面的例子来说明这个问题。

例 4.16：考虑如图 4.44 所示的梯形网络，受控电压源 $Z_m I_2$

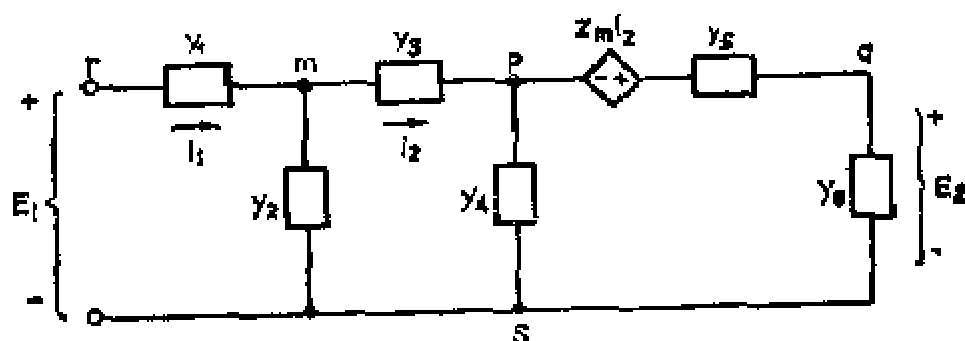


图 4.44 有源梯形网络

可以变换为如图 4.45 所示的等效受控电流源。按照§6.4中概述的步骤，得到的伴随有向图如图 4.46 所示。假设要求计算开路电压增益函数 $g_{rq,sr}$，为此在G中接入电表支路 y_m 和电源支路 y_g，如虚线所示。根据式(4.201)，有 $H_{rq,ss}$ $g_{rq,sr}$ 以及

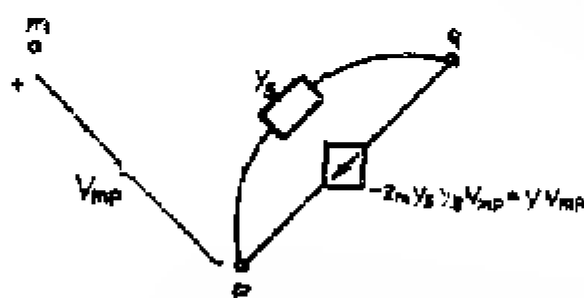


图 4.45 等效电压控制电流源

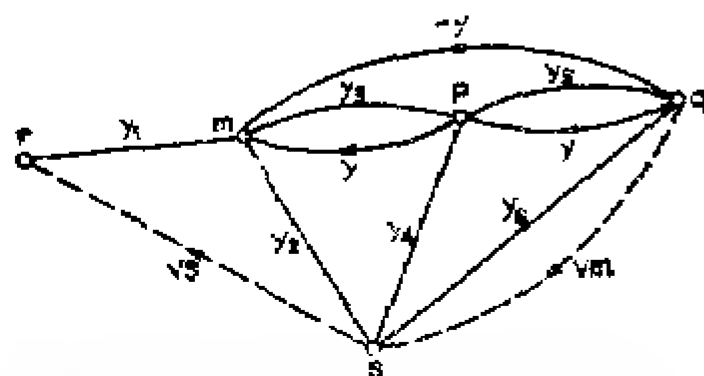


图 4.46 梯形网络的伴随有向图

$$g_{rq,sr} = \frac{1}{V_r^*} \sum_{P_{rr}^*} (-1)^\sigma f(P_{rr}) V_r^*$$

$$-[y_1(y_3+y)(y_5+y)+(-y)y_1(y_3+y_4+y_5+y)]/V_j$$

(4.206)

式中 $V''_j=V''_q=y_3y_5(y_1+y_2+y_4+y_6)+(y_1+y_2)y_4y_5$

$$+(y_1+y_2)y_6(y_3+y_4+y_5+y)+y_3y_4y_6 \quad (4.207)$$

而V'_q中所需的G''的有向树t''_q的集合由G''中节点对m和q上展开而得，而G''是在图4.47中给出。

假设要求计算网络的开路转移阻抗函数$Z_{rp,sq}$，接入电表支路vm和电源支路cs，如图4.48所示，根据式(4.201)，有$H_{rp,sq}=Z_{rp,sq}$，以及

$$Z_{rp,sq}=\frac{1}{V''_j}\sum_{P^p_i}(-1)^q f(P^p_i)V^*_i$$

$$=\frac{y_1(y_3+y)y_6-(-y)y_1y_4}{V'_j} \qquad (4.208)$$

式中

$$V''_j=V''_q=y_1y_3y_5(y_2+y_4+y_6)+y_1y_3y_4y_6$$

$$+y_1y_2y_6(y_3+y_4+y_5+y)+y_1y_2y_4y_5$$

(4.209)

而式(4.209)中的项对应于G''中的有向树t''_q，并且由G''中节点对r和q上展开而得，而G''是从G中移去电表支路和电源支路得出的。

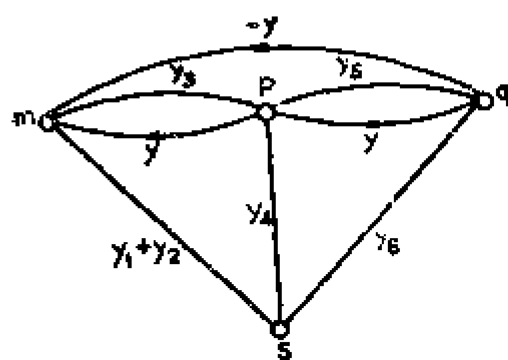


图 4.47 从图4.46中移去vm和短接vs后得出的混合图

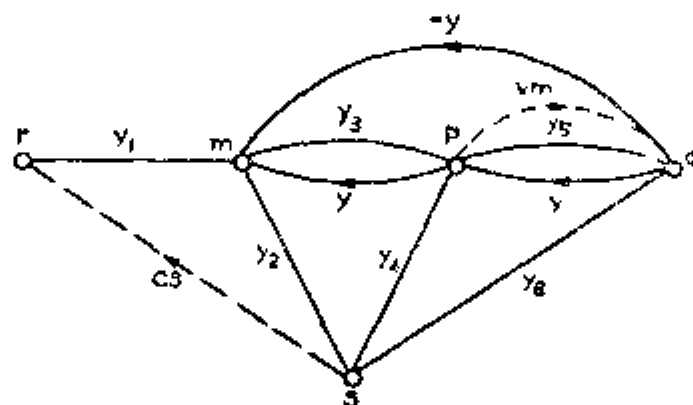


图 4.48 用来计算$Z_{rp,sq}$的混合图

现在考虑图 4.49(a)两个非全耦合线圈模型。仿照类似于§6.4中对受控电流源和理想变压器所给的依据，对两个非全耦合的线圈的伴随图给出如图 4.49(b)所示(习题 4.53)，这里

$$\begin{aligned} y_1 &= L_{11}/s(L_{11}L_{22}-M_{12}^2) \\ y_2 &= L_{22}/s(L_{11}L_{22}-M_{12}^2) \\ y &= M/s(L_{11}L_{22}-M_{12}^2) \end{aligned} \tag{4.210}$$

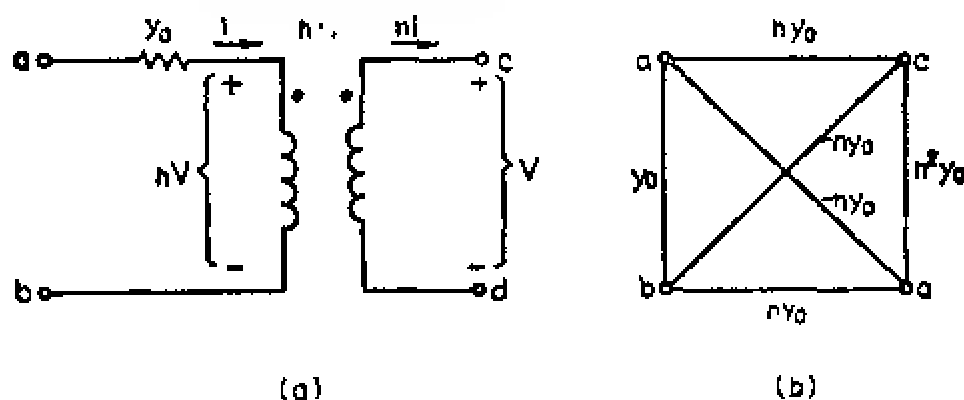


图 4.49 (a) 两个非全耦合线圈，(b) 其伴随有向图。

例 4.17：考虑如图 4.50 所示的变压器耦合的晶体管放大器。利用前面概述的步骤，放大器的伴随混合图如图 4.51 所示。假设要求计算放大器电压增益函数 $g_{12,55}$。为此在G中接入电表支路 vm 和电源支路 vs，在图 4.51 中用虚线表示。根据式(4.201)有下式：

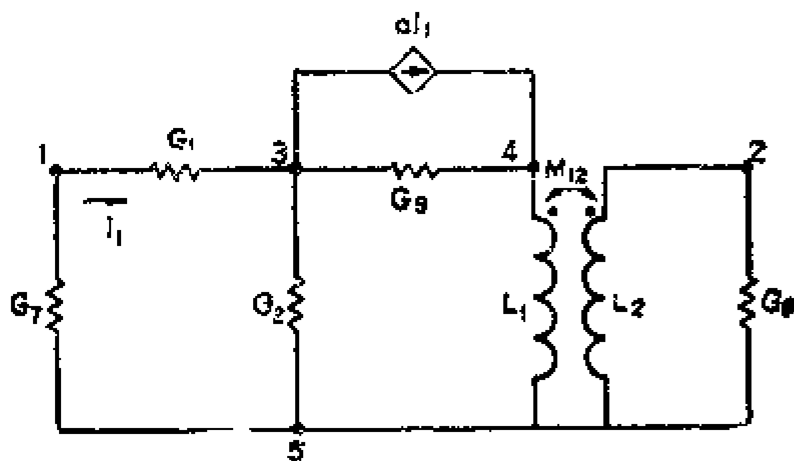


图 4.50 变压器耦合晶体管放大器

$$g_{12.55}=\frac{1}{V''_j}\sum_{P^t_s}(-1)^c f(P^t_{1j})V^*_k$$

$$=[G_1G_3y+(\alpha G_1)y(G_1+G_2+G_3-\alpha G_1)+G_1(-\alpha G_1)y$$
$$+(-\alpha G_1)G_3y+(-\alpha G_1)(-\alpha G_1)y]/V''_j$$
$$=y(G_1G_3+\alpha G_1G_2)/V''_j \tag{4.211}$$

式中 $V''_j=V''_4=(y_2-y)[G_3+(G_1+G_2)-\alpha G_1][y$
$+(G_5+y_1-y)]+(G_1+G_2)G_3y+(G_5$
$+y_1-y)]+(G_6+y_1-y)y[G_3+(G_1+G_2)$
$-\alpha G_1]$ (4.212)

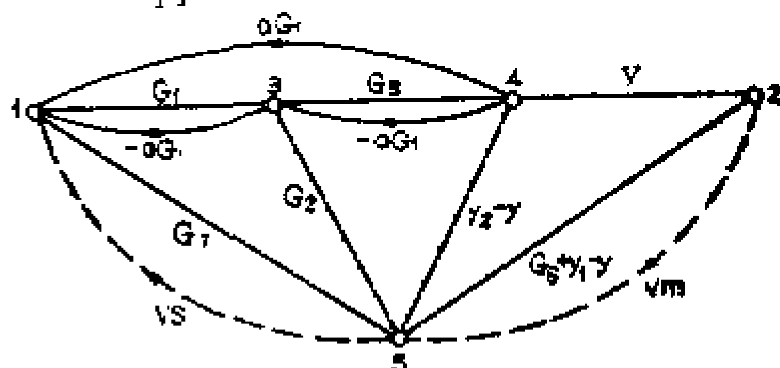


图 4.51 图4.50放大器的伴随混合图

式中 y，y_1 和 y_2 由式(4.210)所定义的，而 V''_4 中的项对应于如图4.52所示的有向图 G'' 中的有向树 t''_4，G'' 的有向树 t''_4 的集合由节点对5和4上的展开而得。选节点4为参考点，以便减少由对消项产生的冗余项数。

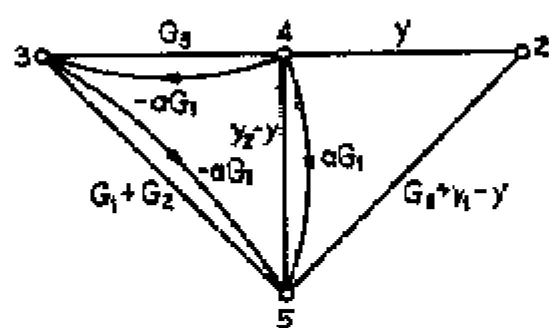


图 4.52 从图4.51中移去表支路和短接源支路而得出的混合图

最后，如果需要放大器的转移阻抗函数 $Z_{12.55}$ 可以用类似的方法计算，所要做的仅是在G中用电流源支路 cs 替换电压源支路 vs。因此，$Z_{12.55}$ 的分子与式(4.211)给出的 $g_{12.55}$ 的分子相同。$Z_{12.55}$ 的分母 V''_j 中的项对应于从G中移去电表支路和电源支路所得混合图中的有向树，事实上，这就是放大器本身不定导纳矩阵的伴随混合图。换言之，V''_j 仅仅是放大器的

节点导纳矩阵的行列式。为了方便起见，设由节点对 5 和 4 上展开而产生的有向树集为：

$$
\begin{aligned}
V'_4 &\ (y_2 \quad y)(G_{\cdot} + y_3)[(G_3 \quad G_2)(G_{\cdot} \quad G_7) + (G_{\cdot} - aG_1)G_{\cdot}] \\
&+ G_2G_3(G_{\cdot} + G_7)(G_6 + y_{\cdot}) + G_7G_1G_3(G_6 + y_{\cdot}) \\
&+ (G_6 + y_1 \quad y)y[(G_2 + G_3)(G_1 \quad G_7) \quad (G_1 \quad \alpha G_1)G_{\cdot}] \\
= &\ (y_{\cdot} \quad G_6)[(G_{\cdot} + G_7)(G_{\cdot}G_{\cdot} + G_2)_2 + G_3y_2) \\
&+ G\ G(G_3 + y_2) - aG_{\cdot}G_{\cdot}y_2] + aG\ G_{\cdot}y_2^2 \\
&- y^2(G_2 \quad G_{\cdot})(G_{\cdot} \quad G \qquad y^2G\ G_{\cdot}
\end{aligned}
\tag{4.213}
$$

所求的转移阻抗函数 $Z_{12,55}$ 于是可以求得。

需要提一下，除了所有边的方向相反之外，式(4.201) 中的真路径 P_{15}^{s} 也由 MASON[1957]称为真传输路径与真传输路径有关的权乘积称为真传输路径值，即 $f(P_{15}^{s})$。项 V_s^s 定义为真传输路径 P_{15}^{s} 的余子式，因为它是当 P_{15}^{s} 中所有节点等同后余下的网络节点导纳矩阵的行列式。

§ 7. 结 束 语

在这一章中已经涉及了称为不定导纳矩阵的一种特殊类型的系统矩阵。当节点方程组用于分析一般线性电网络时，就出现不定导纳矩阵，它也称为等代数余子式矩阵，因为其元素的所有一阶代数余子式都相等。我们也探讨了它的某些基本性质，也表明了与其元素的二阶代数余子式是怎样联系的。

我们论证了式(4.21)类型的等代数余子式矩阵元素的一阶和二阶代数余子式的展开式中的项和矩阵的伴随有向图中称为有向树和有向 2 树的某些类型的子图之间的基本关系。指出这些子图和对应 COATES 图中子图的关系。也给出了表明怎样消去伴随有向图的某些节点而不影响一阶和/或二阶代数余子式之比的方法。特别是在电网络理论中它简化为 Y-Δ 变换。

介绍了产生有向树和有向 2-树的三种方法，第一种方法类似

于上一章中所讨论的产生部分因子和k-部分因子的方法，其公式是简单的，但必定产生对消项，因此它不是非常有效的。另外两种方法是迭代法，它不会引入任何对消的冗余项。此外，它们都适用于数字计算机。

已经讨论了有向树方法对电网络拓扑分析的应用，表明这种方法可以对一般网络进行快速分析，网络函数可以凭观察直接从伴随有向图写出，并概述了直接从网络图建立伴随有向图的方法。还需提一下，根据这种方法的计算机程序已由MCCLENAHAN和CHAN[1972]编制出来。

拓扑方法对网络的性质提供了深入的了解，这种方法与知识对于网络设计者或者分析工作者可以给出更直观的帮助，甚至于在很多用矩阵和行列式的方法来列方程式，并求解这类问题的情况下也是如此。由于有向树和有向路径是容易识别的，这一章中提出的规则对在答案中检验任何有可疑的项的合理性，或者在近似法中估计误差是一种非常有效的手段。在包含相当复杂网络的实际问题中，如果各种支路导纳的数值是已知的，则可以着重察看那些数值上占优势项的有向路径和有向树。可以忽略的项根本不必写下来，这实在是省时间！

习 题

4.1 证明推论4.1

4.2 证明如果G(Y)的某些边用并联边集来表示，使得每个集合的并联边权之和等于原来G(Y)的边权，则恒等式(4.25)仍然有效。

4.3 证明推论4.5。

4.4 证明推论4.6。

4.5 证明如果矩阵Y每行元素之和都等于零，并属于式(4.21)的类型，则对于 x 1，2，…，n，有

$$Y_x = \sum_i f(t_i) \tag{4.214}$$

式中 t_i 是 G(Y)中的有向树。

4.6 证明 $Y_{ab,cd} = Y_{cd,ab}$。

4.7 证明恒等式(4.32)。

4.8 证明推论 4.9。

4.9 对于节点对的节点不与参加节点完全不同的情况，导出类似于式(4.41)的公式。

4.10 证明推论 4.11。

4.11 如果 Y 是具有每行元素之和均等于零性质的矩阵，并具有式(4.2?)的形式，证明恒等式(4.45)仍然有效。

4.12 推广有向 2 树和有向 3 树的概念到“有向 k 树”。

4.13 利用习题 4.13 中所定义的“有向 k 树”的概念，证明如果 i_1，$j_1<i_2, \cdots, i_k$，或 i_1，… $i_2, \cdots, i_k$，则对于 k≥2，有

$$(-1)^{i_1+j_1}\det Y_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k} = \sum f(t_{i_1j_1,i_2,\cdots,i_k}) \tag{4.215}$$

式中 $Y_{i_1j_1,i_2i_2,\cdots,i_ki_k}$ 是从矩阵 Y 中删去行 i_1，$i_2, \cdots, i_k$ 和列 j_1，i_2，…，i_k 所得的子矩阵；$t_{i_1j_1,i_2,\cdots,i_k}$ 是 G(Y)中以 i_1，i_2，…，和 i_k 为参考节点的有向树，Y 是式(4.21)型的等代数余子式矩阵，而求和是取遍 G(Y)中所有的 $t_{i_1j_1}$，i_2，…，i_k。

4.14 如果 Y 是具有每行元素之和均等于零性质的式(4.21)型的矩阵，证明恒等式(4.215)仍然有效。

4.15 对于任何 i_1，j_1，$i_2, \cdots$，和 i_k，推广恒等式(4.215)(提示：推广定义 4.2)。

4.16 在一个对称的有向四面体中，有多少有向树?

4.17 证明如果 G_n 是从 n 节点的完备图中移去具有不同终点的 P 条边所得的图，则 G_n 中的树数目 N(t)由下式给出

$$N(t) = (n-2)^P n^{n-P-2} \tag{4.216}$$

式中 n>1 以及 n≥2P(WEINBERG[1958])。

4.18 证明如果 G_u 是从 n-节点的完备图中移去在 G_u 的一个节点上相关联的 P 条边所得的图，则 G_u 的树数目 N(t) 由下式给出

$$N(t)=(n-P-1)(n-1)^{P-1}n^{n-P-2} \qquad (4.217)$$

式中 n>1 和 P<n(WEINBERG[1958])。

4.19 计算图 4.53 中给出的每个图中树的数目。

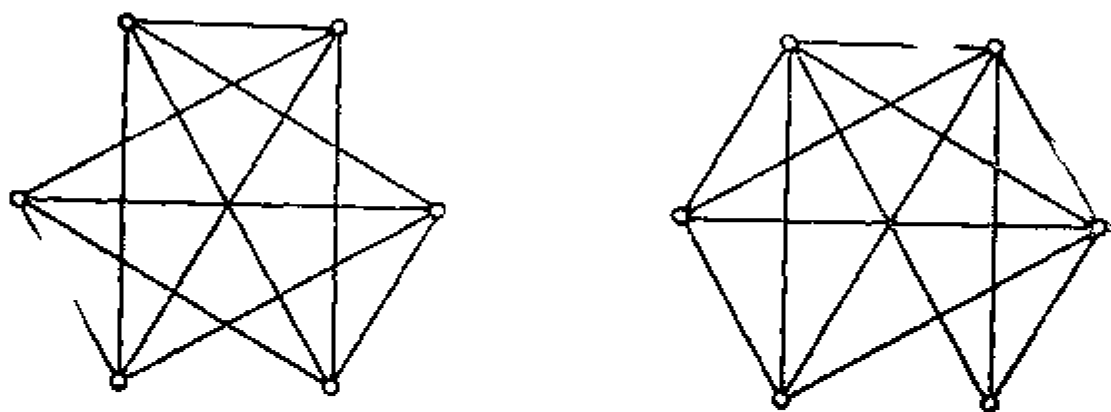


图 4.53 两个非完备图

4.20 对于 $i=j$ 的情况，证明定理 4.4。

4.21 利用习题 4.13 中所定义的"有向 k 树"的概念，证明在 P 阶的 n 节点完备有向图中以 i_1, i_2, …和 i_k 为参考节点的有向 k 树 $t_{i_1j_1, i_2, \cdots, i_k}(i_1 \neq j_1)$ 的数目 $N(t_{i_1j_1, i_2, \cdots, i_k})$ 由下式给出：

$$N(t_{i_1j_1, i_2, \cdots, i_k})=P(nP)^{n-k-1} \qquad (4.218)$$

式中 n>k≥2(CHEN[1966 d])。

4.22 证明在式(4.218)中，如果 $i_1=j_1$，则

$$N(t_{i_1, i_2, \cdots, i_k})=kP(nP)^{n-k-1} \qquad (4.219)$$

4.23 证明推论 4.13。

4.24 证明如果 G_d 是加权图 G_u 的伴随对称有向图，则在 G_u 的 2-树 $t^u_{i,j}$ 和 G_d 的有向 2-树 $t^d_{i,j}$ 之间存在一一对应关系，因而

$$f(t^u_{i,j})=f(t^d_{i,j}) \qquad (4.220)$$

4.25 如果存在一有向图，它的有向树 t_i 都在 T_i 中，且所有 T_i 中的树 t_i，没有一个不是这一有向图的有向树，则有向树 t 的

集合T称为是可实现的。证明有向树t的给定集合T是可实现的必要和充分条件是T_i的有向树t_i的和图不会产生任何不包含于T_i中有向树t。

4.26 证明推论4.15。

4.27 证明恒等式(4.75)。

4.28 证明恒等式(4.84)。

4.29 证明推论4.17。

4.30 设t_n是有向图G的一有向树，并设(i, j)是G中不在t_n中的一条边，(i, k)是t_n的一条边，i对于$i \neq n$，以下运算

$$t_n \cup (i, j) - (i, k) = t_n' \qquad (4.221)$$

如果t_n'为以G中节点n为参考节点的一有向树，(i, k)称为对于t_n的初等变换。证明G的任一有向树t_n可以从任一其它有向树通过有限序的初等变换得出。

4.31 设t_n和t_n'是有向图中以n为参考节点的两个有向树。证明如果$t_n \neq t_n'$，至少存在一条在t_n中但不在t_n'中的有向边$(i, n)(i \neq n)$，使和图$t_n' \cup (i, n)$是非圈的。

4.32 对于部分因子，证明恒等式(4.126)。

4.33 证明定理4.6。

4.34 证明推论4.20。

4.35 证明定理4.10。

4.36 推广定理4.11和4.12，同样使它们包括含有并联边的有向图。

4.37 证明定理4.12。

4.38 实现下列有向树集T

$$T = \{agec, aged, agid, ahid, ahic, agic\},$$

如果实现不是唯一的，你能用两个非同构的有向图来实现这集合吗?

4.39 如果有向图的子图用其边标识符的乘积来表示，则称为子图乘积。给定一有向2树乘积的集合，证明当且仅当这一集

合可实现为一有向图的有向树乘积时，它是可实现的。

4.40 证明有向树乘积的集合 T_i 和有向 2 树乘积的集合 $T_{i,j}$ 同时实现为有向图的必要和充分条件是 $T_i \cup (\{e_0\} \otimes T_{i,j})$ 可实现为有向图的有向树乘积的集合，这里 i 是有向树的参考节点，i 和 j 是有向 2 树的参考节点，e_0 是不包含于 $T_{i,j}$ 的任一元素的任选边(CHEN[1966 b])。

4.41 利用习题 1.41 中给出的条件，求同时实现下列给定的有向树和有向 2 树的乘积集合的有向图：

T_i $\{e_1e_2e_3,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_4e_5\}$，

$T_{i,j}$ $\{e_3e_4,\ e_2e_3,\ e_2e_5,\ e_3e_6,\ e_4e_6\}$。

4.42 证明定理 4.13。

4.43 证明定理 4.14。

4.44 证明推论 4.22。

4.45 证明引理 4.5 和 4.6。

4.46 考虑如图 4.54 所示的电网络，它表示一个一般的电压反馈放大器，计算下列网络函数：

(i) 当输入端开路时，从节点 P 和 R 看进去的输出阻抗函数。

(ii) 放大器的电压增益函数。

(iii) 转移电压比 V_{kr}/E_1，这里 V_{kr} 是从 k 到 r 的电压降。

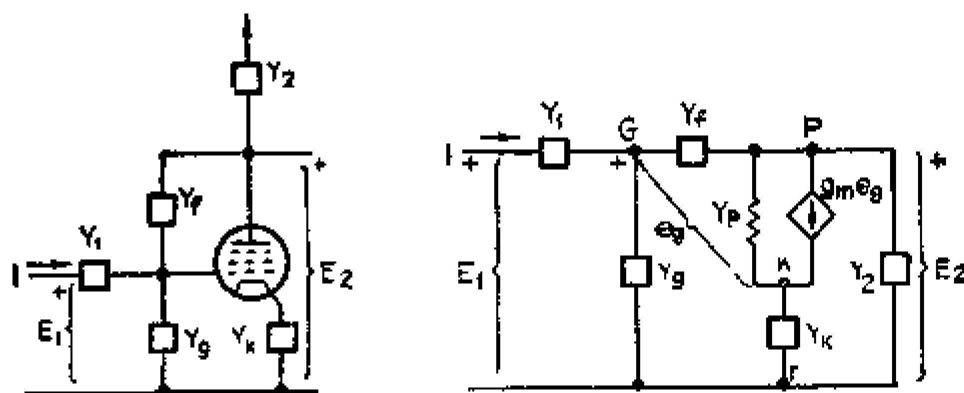


图 4.54 一般的电压反馈放大器及其等效网络

4.47 证明推论 4.26。

4.48 在图 4.54 中，计算 $Z_{GP,rr}$ 和 $y_{GP,rr}$。

4.49 导出恒等式(4.187)和(4.189)。

4.50 在式(4.187)中，证明

$$W_{p,q} \quad W_{p,sq} \quad W_{q,sp} \tag{4.222 a}$$

$$W_{qr,ps} \quad W_{pr,qs} \cdot W_{qr,s} - W_{pr,as} \tag{4.222 b}$$

(提示：利用恒等式(4.9)和(4.56))。

4.51 证明恒等式(4.179)成立。

4.52 证明图 4.49 (a)的两个非完全耦合线圈的模型是图 4.49 (b)。

4.53 把在§5.1 中所讨论生成有向 2 树的方法推广到在习题 4.13 中所定义的有向 k 树。

4.54 利用式(4.187)和(4.189)中所给的拓扑恒等式，证明

$$\det \mathbf{Y}_{sc} \quad 1/(\det \mathbf{Z}_{pc}) \quad V \quad U_3。$$

4.55 证明图 4.55 (a)回转器的模型是图 4.55 (b)。

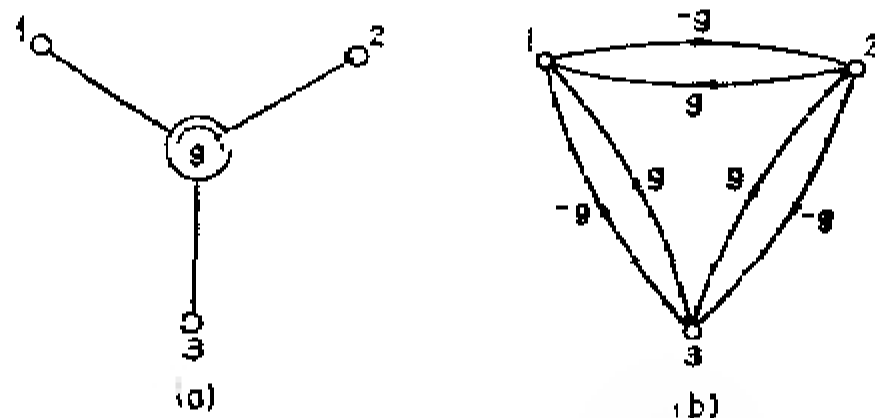


图 4.55 (a) 回转器；(b) 其伴随有向图。

4.56 考虑和式

$$\sum_{x=1}^{k} Y_{p_x, r_{x+1}} \tag{4.223}$$

证明如果 i_1 i_{x+1}，则和式等于零（提示：利用恒等式

(4.59))。

4.57　导出下列关系式

$$-\sum_{\substack{x=1\\x\neq q}}^{n} Y_{pq,rx} = \sum_{\substack{x=1\\x\neq q}}^{n} Y_{px,rq}。\tag{4.224}$$

4.58　设 P_{ab} 和 P_{cd} 分别是给定的有向图G从节点 a 到节点 b 和从节点 c 到节点 d 的两节点不相接有向路径。证明G的有向 2 树 $t_{ba,dc}$ 的集合 $T_{ba,dc}$ 由下式给出

$$T_{ba,dc} = \bigcup \{P_{ab}P_{cd}\} \times T^*_{b,d} \tag{4.225}$$

式中G的子图由其边标识符的乘积来表示．$T^*_{b,d}$ 表示 G^* 中以 b 和 d 为参考节点的有向 2 树 $t^*_{b,d}$ 的集合．G^* 是分别把在 P_{ab} 和 P_{cd} 中的节点等同起来，用 b 和 d 表示组合点所得的图，而并集取遍所有G的 P_{ab} 和 P_{cd}。

4.59　考虑如图 4.56 所示的两个二端对网络的级联．证明整个网络的不定导纳矩阵元素的二阶代数余子式 $Y_{ag,bh}$ 等于各自网络的二阶代数余子式 $Y^1_{ac,bd}$ 和 $Y^2_{eg,fh}$ 的乘积：

$$Y_{ag,bh} = Y^1_{ac,bd} \cdot Y^2_{eg,fh}。\tag{4.226}$$

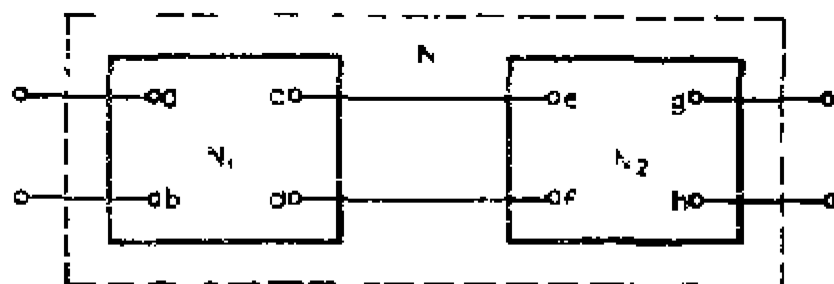


图 4.56　两个二端对网络的级联

4.60　象习题 4.60 那样，设 G_1 和 G_2 是级联连接的两个有向图，假定有向图的所有子图都用它们的边标识符的乘积来表示，证明

$$T_{ag,bh} \cup T_{ah,bg} = (T^1_{ac,bd} \cup T^1_{ad,bc}) \times (T^2_{eg,fh} \cup T^2_{eh,fg}). \tag{4.227}$$

式中 $T^1_{ab,cd}$、$T^2_{ab,cd}$ 和 $T_{ab,cd}$ 分别是 G_1，G_2 和 $G_1 \cup G_2$ 中的有向 2-树 $t_{ab,cd}$ 的集合，节点 c 和 d 是有向图 G_1 和 G_2 的共有节点。

4.61 假定有向图G的所有子图都用它们的边标识符来表示，假设 a、b 和 c 是终止于G的节点 i 的仅有的边，证明G的有向树 t_i 的集合 T_i 由下式给出

$$
\begin{aligned}
T_i = & \{a\} \times T(a;\ bc) \cup \{b\} \times T(b;\ ac) \cup \{c\} \times T(c;\ ab) \\
& \cup \{ab\} \times T(ab;\ c) \cup \{ac\} \times T(ac;\ b) \cup \{bc\} \times T(bc;\ a) \\
& \cup \{abc\} \times T(abc;\ \phi).
\end{aligned}
\tag{4.228}
$$

式中 T(a;bc)是G(a;bc)中以 i 为参考节点的有向树集合，G(a; bc)是在§5.3 中所定义的，用 i 表示组合节点，所有其它项以类似的方式定义，这一方法对于无向图相当于 MASON 和 ZIMMERMANN[1960]的节点展开式。

4.62 推广恒等式（4.228），使之适应在G的节点 i 终止有任何数的边，例如，如果 c_i 是由终止于节点 i 的所有边组成的子图，则

$$
T_i = \cup \{E_q\} \times T(E_q;\ \bar{E}_q), \tag{4.229}
$$

式中 E_q 是 c_i 的子图，$\bar{E}_q$ 表示 c_i 中 E_q 的补图，$T(E_q;\ \bar{E}_q)$ 是 $G(E_q;\ \bar{E}_q)$ 中以节点 i 为参考点的有向树集合，其中 i 是组合节点，并集是取遍所有 c_i 的非空子图 E_q。

4.63 利用有向树方法，导出一组非齐次方程式的求解公式，这一方程组的伴随有向图是怎样的？这一方法效率高吗？如果不是，给出理由，（提示：利用恒等式(3.97)）。

4.64 证明在式(4.85 a)中

$$
-c = \sum_{j=h+1}^{n} \left[\left(\sum_{q=1}^{h} c_{qr} \right) + c_{ir}^{22} + c_{jr}^{22} \right]. \tag{4.230}
$$

4.65 证明利用式(4.83)、式（4.94 a）的权 w_{52} 也可以从图 4.16

的有向图中，移去节点3来得出，将得出的结果与式(4.95a)相比较。

4.66 利用 Thévenin 或 Norton 定理，证明恒等式(4.176)。

4.67 对于一给定网络G，设 $\mathbf{A}_a$ 和 $\mathbf{Y}_b$ 是其关联矩阵(包括G的所有节点)和支路导纳矩阵。证明 $\mathbf{A}_a\mathbf{Y}_b\mathbf{A}_a'$ 是G的不定导纳矩阵，这里撇号“′”表示矩阵的转置。此外，证明 $\mathbf{A}_a\mathbf{Y}_b\mathbf{A}_a'$ 是式(4.21)型的等代数余子式矩阵(提示：设E是一矢量，其所有元素都是1，则 $\mathbf{A}_a\mathbf{Y}_b\mathbf{A}_a'\mathbf{E}=\mathbf{0}$)。

4.68 设A是一阶为n的方阵，n>1，其代数余子式中至少有一个是非零的。证明当且仅当A的所有代数余子式都相等时，它是等代数余子式矩阵。如果A的所有元素的代数余子式都是零，这结果能普遍成立吗？

4.69 证明如果等代数余子式矩阵A的任何两行互换一下，则所产生的新矩阵，其元素的代数余子式等于A中元素的代数余子式的负值。

第五章 树和树的生成

就工程应用而论，树或许是图论中最重要的子图之一。在第三章和第四章中，已经建立电网络理论中与树的概念有关的性质。例如，独立的基尔霍夫方程式的数目，选择独立方程式的方法，以及网络函数的拓扑公式都是纯以树的概念来表示的。除了这些应用之外，树已成功地用于化学表示式，状态和分布问题，以及其他各种应用(例如，参见 BUSACKER 和 SAATY[1965]和 KAUFMANN[1967])。事实上，树这术语是首先由CAYLEY[1987]在成功地应用图论于化学来解决化学表示式问题中提出的。

在线性系统的拓扑分析中，问题最终归结为在伴随有向图中求树集或有向树集。生成这些树的三种有效方法已在前一章作了介绍。这一章的首要目的是提出树的某些基本性质，以及表明树、补树、回路和割集之间存在的密切关系。根据这些关系，第二个目的是提供各种现有生成树的方法的统一概述和某些有关的结果。

由于有向图中树的定义和(无向)图中的定义相同，本章主要只涉及有限图。

象在第二章所用的那些符号一样，在整章中分别用b、n、c表示图G或有向图 G_d 的边、节点、和片。此外，分别用r和m表示秩和零度。

§1. 树的特征

根据定义(定义 2.2)的简单推论，树还可以用许多种其它的方法来表征，今后我们将使用下面的定理所给出的那些等价说法（习题5.1)。

定理 5.1．图G是一个树，当且仅当下列性质的任何一个成立：

(1) G是连通的且不含任何回路。

(2) G具有 $n-1$ 条边，且不含有任何回路。

(3) G是连通的，且具有 $n-1$ 条边。

(4) G是连通的，且其零度 $m=0$。

(5) G是连通的，但是如果移去任何一条边，就将失去连通性。

(6) 在G的任何两个节点之间存在一条唯一的路径。

定理 5.2：图G含有一个树，当且仅当它是连通的。

证明，如果G不是一个树，G必定含有回路。通过移去回路的一条边，就得到一个连通的且有比G较少回路的生成子图。根据定理 5.1 的性质(1)，重复应用这个步骤，就产生G的一个树。

推论 5.1：设 $d(x)$ 表示树中节点 x 的度，那么有

$$\sum_x [d(x)-2] = -2 \tag{5.1}$$

式中求和取遍树的所有节点 x。

证明：

$$\sum_x [d(x)-2] = 2b-2n = 2(b-n+1)-2 = 2m-2 = -2$$

式(5.1)的一个简单推广以问题形式提出，其证明留作为练习(习题 5.2)。

推论 5.2：一个树至少有两个节点的度为1。

证明：根据定理 5.1 的性质(6)，一个树含有长度为最大的一个路径，在树中路径的两端必定是度为1。因为如果不是这样，路径就不是最长。推论证毕。

事实上，如果一个图是不可分的，则图中的任何节点都可以用为图的树中度为1的节点。这可用下述定理来表达。

定理 5.3：在至少含有两条边的不可分图G中，至少存在两个

树，其中G的任意一个节点在这些树中都是度为1。

证明：设G^*是从G中移去任意一个节点x以及与节点x并联的所有边而得的子图。由于G是不可分的，根据定理1.10，从而有G^*是G的连通子图。根据定理5.2，G^*中存在一个树t^*。如果e是与节点x关联的G的一条边，显然，子图$t^* \cup e$，是G的所要求的树。由于G是不可分的，在x上至少存在两条关联边。因此，由以上性质至少存在两个树。定理证毕。

前面(习题2.43和2.44)已经指出，一个子图可以形成一个树的一部份，当且仅当它不含有回路，以及一个子图可以形成一个补树的一部份，当且仅当它不含有割集。那么一个子图可以形成为树的一部份，而另一子图含于对应的补树中，它的必要和充分条件是什么？这个问题可以用下述定理来表征。

如果t是图G的一个树，则用$\bar{t}$表示相对于G中t的补树。

定理 5.4：设g_1和g_2是连通图G的两个边不相接子图。如果在G中存在一个树t_1和一个补树$\bar{t}_2$，使g_1和g_2分别是t_1和$\bar{t}_2$的子图，那么存在G的一个树t，而g_1是t的子图，g_2是$\bar{t}$的子图。

证明：设G^*是从G中移去g_2的所有边而所得的图。由于t_2含于G^*中，则G^*是连通的且含有G的所有节点。显然，由于g_1和g_2是G的边不相接子图，则g_1也含于G^*中。由假设，由于g_1含于t_1中，则g_1没有回路，因而，由习题2.43，它可能形成G^*的一个树的一部份。设这个树是t，那么t也是G的一个树，于是满足定理中所得出的条件。

这一定理的另一陈述如下：

推论 5.3：设g_1和g_2是连通G的两个边不相接子图，那么存在G的一个树t，g_1是t的子图，而g_2是$\bar{t}$的子图，当且仅当g_1不含有回路以及g_2不含有割集。

这个结论是很有实际意义的。例如，在电网络问题的状态空间公式中，通常要求构成称为常态树的一种树，使某些指定的边是树支，而另一些边是连支(例如，参见BALABANIAN和BICKART

[1969]).

除了这些性质之外，在第二章§1中已经指出，图也可以由其割集矩阵或特别由其关联矩阵来表征。对于一个(无向)图G，其术语割集，基本割集和基本回路与第二章§1中对于有向图所给的定义，除了不考虑与这些子图有关的所有方向之外，其它完全相同。除了用1代替所有的−1和利用代数学的整数模2运算以外，G的关联矩阵A_a，完全割集矩阵Q_a和完全回路矩阵B_a的表述也完全相似。这样，除了所有负号消失之外，第二章§1中有向图的所有结果都可以转到无向图上。在同样范围内重复一遍几乎没有什么意义，所以我们这里仅简单地陈述一下结论，而略去其细节。为了方便起见，再一次用G的基本关联矩阵A表示A_a的阶为$r\times b$和秩为r的子矩阵。对于G的基本切割矩阵Q和基本回路矩阵B也同样有效。在这里符号的选择是基于下述这一情况，这些矩阵的基本结构，对于有向图和无向图来说是相同的。同样，撇号"′"表示矩阵的转置。

定理 5.5：图G的完全回路矩阵B_a的秩等于G的零度。

定理 5.6：连通图G的基本回路矩阵的方子阵是大子阵，当且仅当这个子矩阵的列对应于G的补树的连支。

定理 5.7 图G的完全割集矩阵Q_a的秩等于G的秩。

定理 5.8：连通图G的基本割集矩阵的方子阵是大子阵，当且仅当这个子矩阵的列对应于G的树的树支。

定理 5.9：如果图的矩阵B_a和Q_a的列以同样的边序排列，那么有

$$Q_aB_a'=0 \quad 和 \quad B_aQ_a'=0 \tag{5.2}$$

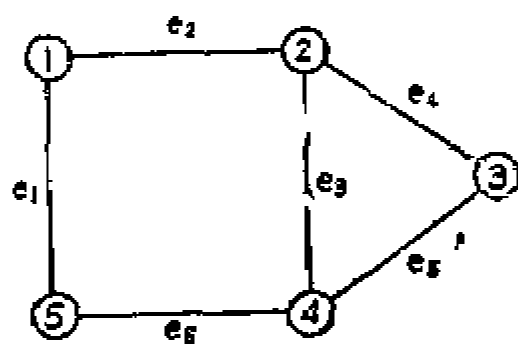


图 5.1 说明例子的图

定理 5.10：如果图G的A、B_f和Q_f的列按定义基本回路矩阵B_f和基本割集矩阵Q_f的树t先连支后树支的序排列，并分块为

$$\mathbf{A}=[\mathbf{A}_{11}\mathbf{A}_{12}],\ \mathbf{B}_f=[\mathbf{U}_m\mathbf{B}_{f12}]\text{和}\ \mathbf{Q}_f=[\mathbf{Q}_{f11}\mathbf{U}_r], \tag{5.3a}$$

那么有

$$\mathbf{B}_f=[\mathbf{U}_m \quad \mathbf{A}_{11}'\mathbf{A}_{12}'^{-1}]\text{和}\ \mathbf{Q}_f=\mathbf{A}_{12}^{-1}\mathbf{A}=[\mathbf{B}_{f12}' \ \ \mathbf{U}_r] \tag{5.3b}$$

例 5.1：在图 5.1 中，设 $g_1=e_1e_3e_4$ 和 $g_2=e_2e_5$，根据推论 5.3，存在一个树 $t=e_1e_3e_4e_6$，g_1 是 t 的子图，而 g_2 是 $\bar{t}=e_2e_5$ 的子图。以 5 为参考节点的G的基本关联矩阵 A 由下式给出

$$\mathbf{A}=\begin{array}{c} \\ 1\\2\\3\\4\end{array}\!\!\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}\end{array} \tag{5.4a}$$

类似地，对应于树 t 的G的基本割集矩阵由下式给出，

$$\mathbf{Q}_f=\begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} e_1 & e_3 & e_4 & e_6 & e_2 & e_5\end{array}\\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\end{array} \tag{5.4b}$$

所得的G的树集T如下：

$$\begin{aligned} T=\{&e_1e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_3e_5,\ e_1e_2e_4e_5,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_5e_6,\\ &e_1e_3e_4e_6,\ e_1e_3e_5e_6,\ e_1e_4e_5e_6,\ e_2e_3e_4e_6,\ e_2e_3e_5e_6,\\ &e_2e_4e_5e_6\} \end{aligned} \tag{5.4c}$$

很容易验证，A 或 $\mathbf{Q}_f$ 中阶为 4 的方子阵是非奇异的(在模 2 域内)，当且仅当这个子阵的列对应于T中的树支集。

对应于 t 的G的基本回路矩阵由下式给出

$$\mathbf{B}_f=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{5.5}$$

式中 $\mathbf{B}_f$ 的列是以与式(5.4b)的 $\mathbf{Q}_f$ 那样相同的边序排列的。同样，很容易验证，$\mathbf{B}_f$ 中阶为 2 的方子阵是非奇异的，当且仅当这个子

阵的列对应于G中补树的连支。此外，有 $B_f Q_f^T=0$。

§ 2. 树结构的编码

到目前为止，我们主要是从抽象定义来讨论树，而对于如图5.2所示那样树的几何结构仅仅用于说明理论。在二度欧几里特空间中，对每一抽象树都可作出相应的几何结构。在上一节中，树也用其支路标知符号的乘积来表示。但是，要从这个乘积形式来恢复(抽象)树或树的几何结构是不充分的。在这一节中，我们将指出如何对一个有n个节点的树结构用一排n－2个符号来编码，使根据这个编码可以把树的结构恢复出来。这种编码方法最初是由NEVILLE[1953]提出的，根据逆推关系的另一种方法是由CHEN[1972(C)]提出的。

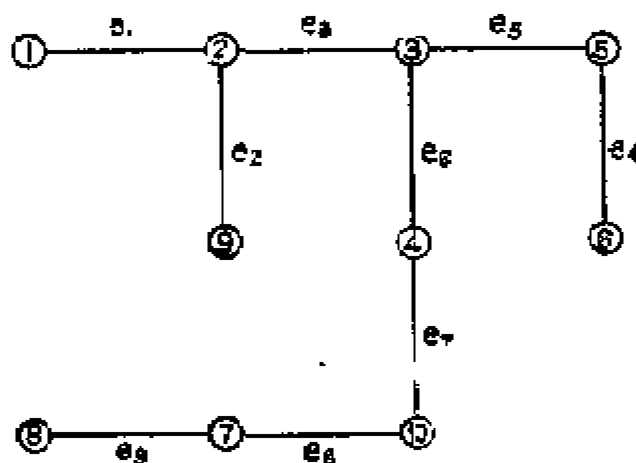


图 5.2 树的几何结构

设树的节点用整数1，2，···，n(n≥2)来标号其中一个节点要求在编码中起一个特殊的作用。树t的任何一个节点都可起这一作用，而在展开式中，就方便地假设这个特殊节点就是节点n。强调一下，对于以下所讨论的每一种编码，这个节点n总是事先指定的。

2.1 用路径来编码

设 $d(x)$ 表示树 t 中节点 x 的度，并且令

$$P_1 = (i_1, i_2) \cup (i_2, i_3) \cup \cdots \cup (i_{k-1}, i_k) \qquad (5.6)$$

式中 $k \geqslant 2$ 和 $i_1 \neq n$，P_1 是 t 中的一条路径，要求 $d(i_1)=1$，而对于 $u=2, 3, \cdots, k-1$，$d(i_u)=2$，以及 $i_k=n$，或者如果 $i_k \neq n$，则 $d(i_k) \geqslant 3$。t 中 P_1 的存在可以直接根据推论 5.2 得出。显然，P_1 可以用一行 $k-1$ 个整数序列来编码，

$$\mathscr{C}_1 = (i_2, i_3, \cdots, i_k) \qquad (5.7)$$

其次，考虑图 $t-P_1$。如果 $t-P_1$ 不是空集，它必定是一个树，于是以上的分析过程可以重复进行。设该路径及其代码分别用 P_2 和 $\mathscr{C}_2$ 来表示，于是再考虑图 $t-P_1-P_2$。如果继续这个过程，则树 t 将最终被分解为一组边不相接路径 P_1、P_2、$\cdots P_q$。设 $\mathscr{C}_1$，$\mathscr{C}_2$，$\cdots$，$\mathscr{C}_q$ 是对应于这些路径的代码，如果把括号删去，并将这些代码排列成行，就可得到树 t 的代码为

$$\mathscr{C} = \mathscr{C}_1 \mathscr{C}_2 \cdots \mathscr{C}_q \qquad (5.8)$$

根据分解树 t 的过程，$\mathscr{C}_1$ 中的最后一个整数 i_k 也会出现在 $\mathscr{C}_2\mathscr{C}_3\cdots\mathscr{C}_q$ 中，但 $\mathscr{C}_1$ 的所有其它整数则在 $\mathscr{C}$ 中出现一次且仅出现一次。类似地，在 $\mathscr{C}_j$ 中最后一个整数 $(1<j<q)$ 也会在 $\mathscr{C}_{j+1}$，$\mathscr{C}_{j+2}\cdots\mathscr{C}_q$ 中出现，但不会在 $\mathscr{C}_1\mathscr{C}_2\cdots\mathscr{C}_{j-1}$ 中出现，并且 $\mathscr{C}_j$ 的所有其它整数在 $\mathscr{C}_j$、$\mathscr{C}_{j+1}\cdots\mathscr{C}_q$ 中出现一次且仅出现一次。显然，在 $\mathscr{C}_q$ 中最后一个整数必定是 n。反过来看，如果 $\mathscr{C}$ 是给定的，则 $\mathscr{C}_1$ 和 $\mathscr{C}_j$ 中最后一个整数是可以辨认的，因为它们要在代码 $\mathscr{C}$ 中后面的整数中重复出现。因此，一个树可以从其代码中重新构造出来，由于在路径的代码中整数的数等于路径的长度，从而在 $\mathscr{C}$ 中的最后一个整数，即 n 是多余的，因而可以删去。设这个简化的代码用 $\mathscr{C}^*$ 来表示，因此有 n 个节点的树可以用 $n-2$ 个整数排成的序列来表示。

最后应当指出，如果一个整数在 $\mathscr{C}^*$ 中出现 k 次，则与之相对

应的树中的节点是 $k+1$ 度。此外，不在 $\mathscr{C}$ 中出现的那些节点在 t 中是度为 1 的节点。对它们的证明留作为练习（习题 5.4 和 5.7）。

作为一个例子，考虑图 5.2 中给出的树，树可以分解为 4 条边不相接路径：$P_1=(8,7)\cup(7,10)$，$P_2=(9,2)$，$P_3=(1,2)\cup(2,3)$ 和 $P_4=(6,5)\cup(5,3)\cup(3,4)\cup(4,10)$。与这些路径相对应的代码是 $\mathscr{C}_1=(7,10)$ $\mathscr{C}_2=(2)$ $\mathscr{C}_3=(2,3)$ 和 $\mathscr{C}_4=(5,3,4,10)$。因此，与树相对应的代码由下式给出：

$$\mathscr{C}=(7,10,2,2,3,5,3,4,10)$$

反之，如果 $\mathscr{C}$ 是已知的，则可以如下重新构成树：由于整数 10，2，和 3 在 $\mathscr{C}$ 中出现的次数大于 1，代码可以分为 (7，10)，(2)，(2，3)，和 (5，3，4，10)，其中每一个代码对应于一个路径编码。这些路径可以很容易地根据它们的代码重新构成，路径由 $P_1=(W,7)\cup(7,10)$，$P_2=(X,2)$，$P_3=(Y,2)\cup(2,3)$ 和 $P_4=(Z,5)\cup(5,3)\cup(3,4)\cup(4,10)$ 给出，于是树可以从这些路径重新构成。另一方面，如果 $\mathscr{C}^*=(7,10,2,2,3,5,3,4)$ 是已知的，$\mathscr{C}$ 可以很容易从 $\mathscr{C}^*$ 中重新构成，因为最后一个整数 n 等于 $\mathscr{C}^*$ 中整数的数目加上 2。于是如果计算在 $\mathscr{C}^*$ 中整数出现的次数，发现整数 2 和 3 都出现两次，而 7，10，5 和 4 每个只出现一次。因此，节点 2 和 3 在树中的度为 3，而节点 7，10，5 和 4 的度为 2，所有其它节点度为 1。

注意，树的节点 W、X、Y 和 Z 除了这些点的度为 1 之外都不能唯一地确定。假定要求已标号的树编码并要求可以从这一编码完全恢复这一树的结构，而不是仅在同构范围之内。这易于如下作到：在分解树为路径过程的每一步中，在所有度为 1 的节点中总是选择起点具有最小值的路径。用这种方法，一个树可以从其编码中完全恢复出来。作为一个例子，再一次考虑如图 5.2 所示的图。树被唯一地分解为四个边不相接路径：$P_1=(1,2)$，$P_2=(6,5)\cup(5,3)$，$P_3=(8,7)\cup(7,10)$ 和 $P_4=(9,2)\cup(2,3)\cup(3,4)\cup(4,10)$，相应的代码是 $\mathscr{C}_1=(2)$，$\mathscr{C}_2=(5,3)$，$\mathscr{C}_3=(7,10)$ 和 $\mathscr{C}_4=(2,3,$

4，10），因此，树的代码由下式给出

$$\mathscr{C}=(2,\ 5,\ 3,\ 7,\ 10,\ 2,\ 3,\ 4,\ 10)$$

反之，如果$\mathscr{C}$是已知的，树可以重新构成如下，由于节点1，6，8和9在$\mathscr{C}$中没有出现，它们必定是这些路径的起始点，这些节点以1，6，8和9的顺序出现于路径P_1，P_2，P_3，和P_4之中。由于整数2，3和10在$\mathscr{C}$中出现的次数大于1，$\mathscr{C}$可以分解为(2)，(5,3)，(7，10)和(2，3，4，10)。因此，这些路径可以从它们的代码中完全恢复出来。

作为另一个例子，让我们对图5.3中给出的树进行编码，所得出的代码如下：

$$\mathscr{C}^*=(15,\ 8,\ 3,\ 12,\ 32,\ 5,\ 1,\ 25,\ 29,\ 23,\ 25,\ 27,\ 17,\ 29,\ 29,\ 21,\ 1,\ 10,\ 21,\ 13,\ 13,\ 9,\ 6,\ 21,\ 32,\ 19,\ 23,\ 10,\ 15,\ 19)。\tag{5.9}$$

图 5.3 代码在式(5.9)中所给的几何图形树

2.2 用终端边来编码

上面我们已经讨论了把树分解为路径来对树编码的方法，在本节中我们将讨论一个树怎样可以用终端边的终点来进行编码 参

见习题 5.9)。

定义 5.1：终端边。

图的一条边称为终端边，在图中只要它的一个终端的度为 1。

对于给定的树 t，设$(i_x, j_x)(x=1, 2, \cdots, k)$是 t 的终端边，于是$d(i_x)=1$和$j_x=n$或$d(j_x)\geq 2$。此外，对于$u=1, 2, \cdots, k-1$，要求$i_u<i_{u+1}$。显然，节点$i_x$是各不相同的，但是$j_x$可能重复。设

$$\mathscr{U}_1=(i_1, i_2, \cdots, i_k), \qquad (5.10\text{a})$$

$$\mathscr{D}_1=(j_1, j_2, \cdots, j_k), \qquad (5.10\text{b})$$

并设E_1是仅由 t 的终端边组成的子图，考虑图$t-E_1$。如果$t-E_1\neq\phi$，那么它们是一个树，以上过程可以重复进行下去，设$\mathscr{U}_2$和$\mathscr{D}_2$是由此产生的相应整数序列。如果继续这个过程，最终会产生两个编码数列$\mathscr{U}_1, \mathscr{U}_2, \cdots, \mathscr{U}_q$和$\mathscr{D}_1, \mathscr{D}_2, \cdots, \mathscr{D}_q$，其中的每一个都具有以上性质。如果将后一个数列排列成行，并删去其中的括号部份，可以得到另一种树 t 的编码$\mathscr{D}$：

$$\mathscr{D}=\mathscr{D}_1\mathscr{D}_2\cdots\mathscr{D}_q \qquad (5.11)$$

其中$\mathscr{U}_1$的元素是不出现于$\mathscr{D}$中的树 t 的节点。如果给定$\mathscr{D}$，则$\mathscr{U}_1$中的元素数 k，以及$\mathscr{D}_1$也可以随之确定。在$\mathscr{U}_j(1<j<q)$中的整数$(1<j<q)$是这样的一些整数，它们仅存在于$\mathscr{D}_{j-1}$中，但不存在于$\mathscr{D}_j, \mathscr{D}_{j+1}\cdots\mathscr{D}_q$中。由于在每一步中所有合适的节点(整数)都已取遍，当 k 为已知时，$\mathscr{D}_2$或$\mathscr{U}_2$的元素数隐含于$\mathscr{D}$的组成之中，表现为$\mathscr{D}$的前 k 项与这一序列的剩余部份的上述关系。当$\mathscr{D}_1$和$\mathscr{D}_2$中的数被求出以后，$\mathscr{D}_3$或$\mathscr{U}_3$中的元素数具有同样的隐含性质，等等。最后，$\mathscr{U}_q$的元素是不存在于$\mathscr{U}_1$、$\mathscr{U}_2\cdots$和$\mathscr{U}_{q-1}$中的整数，但小于 n。这样，一行由 $n-1$ 个整数组成，其最后一个整数为 n 的数列，作为树的编码$\mathscr{D}$，便能如此推断，于是树就可以从其代码$\mathscr{D}$中重新构成。

作为一个例子，考虑图 5.2 中给出的树。树 t 的终端边集由(1, 2), (6, 5), (8, 7)和(9, 2)组成。这些边的代码是$\mathscr{U}_1=$

$(1, 6, 8, 9)$和$\mathscr{D}_1$ $(2, 5, 7, 2)$。类似地，其它的代码是$\mathscr{U}_2$ $(2, 5, 7)$和$\mathscr{D}_2$ $(3, 3, 10)$，$\mathscr{U}_3$ (3)和$\mathscr{D}_3$ (4)，以及$\mathscr{U}_4$ (4)和$\mathscr{D}_4$ (10)。因此，树的代码由下式给出

$$\mathscr{D}=(2, 5, 7, 2, 3, 3, 10, 4, 10)$$

反之，如果$\mathscr{D}$是给定的，树可以完全重新构成如下：由于1、6、8和9是不存在于$\mathscr{D}$中的树t的节点，它们必定属于$\mathscr{U}_1$，即$\mathscr{U}_1$ $(1, 6, 8, 9)$。因此，有$k=4$及$\mathscr{D}_1$由$\mathscr{D}$的前面四项组成，即$\mathscr{D}_1=(2, 5, 7, 2)$按$\mathscr{U}_1$和$\mathscr{D}_1$中相应节点对，可以得到树t的终端边集，它们是$(1, 2)$，$(6, 5)$，$(8, 7)$和$(9, 2)$。由于$\mathscr{U}_2$中元素是存在于$\mathscr{D}_1$中的整数，但不存在于$\mathscr{D}_2\mathscr{D}_3\mathscr{D}_4$ $(3, 3, 10, 4, 10)$的整数之中，求得$\mathscr{U}_2$ $(2, 5, 7)$。因此，$\mathscr{D}_2=(3, 3, 10)$。$\mathscr{U}_3$中元素是存在于$\mathscr{D}_2$中但不存在于$\mathscr{D}_3\mathscr{D}_4$ $(4, 10)$中的整数，所以有$\mathscr{U}_3$ (3)和$\mathscr{D}_3$ (4)。由于$\mathscr{U}_4$中元素是不存在于$\mathscr{U}_1$，$\mathscr{U}_2$，和$\mathscr{U}_3$中的整数，以及它比$10(=n)$小，所以有$\mathscr{U}_4$ (4)和$\mathscr{D}_4$ (10)。因此，树的其它边是$(2, 3)$，$(5, 3)$，$(7, 10)$，$(3, 4)$和$(4, 10)$。于是树就从这些边重新构成。

作为另一个例子，让我们对如图5.3所示的树编码，得出的树的代码给出如下：

$$\begin{aligned}\mathscr{D}=(&15, 8, 5, 23, 29, 23, 25, 29, 1, 21, 13, 13,\\ &19, 23, 1, 3, 9, 10, 27, 10, 12, 6, 17, 21,\\ &15, 32, 29, 19, 21, 32, 32\end{aligned} \qquad (5.1$$

象前一节所讨论的代码$\mathscr{C}$一样，如果$\mathscr{D}$仅作为树的代码存在，那么最后一个整数总是n，是多余的，故可以删去。设这个简化代码用$\mathscr{D}^*$表示，因此，具有n个节点的树同样由$n-2$个整数序列表示，此外，如果整数在$\mathscr{D}^*$中出现k次，那么其对应节点在树t中的度为$k+1$。例如，对于图5.2的树的代码$\mathscr{D}^*$由下式给出：

$$\mathscr{D}^*=(2, 5, 7, 2, 3, 3, 10, 4)。$$

由于整数2和3每一个在$\mathscr{D}^*$中出现两次，树t中节点2和3的度为3，对于$\mathscr{D}^*$中其它整数来说，这同样是有效的。

§ 3. 分解为路径

在§2.1中已经论证怎样通过将树分解为路径来对树编码。下面将考虑分解树为最小数量的边不相接路径的问题、然后确定这种分解的数目。此成果来自KOTZIG[1967]的研究工作，是以图中度为奇数的节点数总是偶数这一事实为基础的(推论1.2)。

定理 5.11：设$2k(k>0)$是树t中度为奇数的节点数，则t可以分解为k条边不相接路径，并且t的任何分解为边不相接路径至少含有k条路径。

证明：根据推论1，2，有$k\geq 1$。设

$$P_1=(i_1, i_2)\cup(i_2, i_3)\cup\cdots\cup(i_u, i_{u+1}) \tag{5.13}$$

是树t的一条路径，这样节点i_1和i_{u+1}是树t中度为奇数，而节点$i_z(z=2, 3, \cdots, u)$是度为偶数的节点。考虑图$t-P_1$，显然，在$t-P_1$中度为奇数的节点有$2(k-1)$个。如果$k-1\neq 0$，对于每个$t-P_1$的片，相同的步骤可以重复进行，因此，t可以分解为k条边不相接路径。

假设树t分解为不相接路径，含有的路径少于k条，那么这些路径的并会产生度为奇数的节点数小于2k的树，这是由于一个图和一条路径(与图边不相接)的并使度为奇数的节点数至多增加2的缘故。因此，任何分解至少含有k条边不相接路径。定理证毕。

定理 5.12：设n_i是树t中度为i的节点数，而2k是t中度为奇数的节点数，那么树t分解为不同的k条边不相接路径的数目β由下式给出

$$\beta=\prod_{i=1}^{n-1} f(i)^{n_i} \tag{5.14}$$

式中$f(2i-1)=f(2i)=1、3、5\cdots(2i-1)$。

证明：对于一个集合R，设$\alpha(R)$表示其元素数目，设S_u(u=

1，2，$\cdots$，n）是由树 t 在节点 u 上关联的所有边组成的集合。划分 S_u 的元素为下述性质的不相接子集 r_{ux} 的集合 R_u：设 $R_u=\{r_{ux}\}$，如果 $\alpha(S_u)$ 是偶数，那么对于所有的 x，$\alpha(r_{ux})=2$。如果 $\alpha(S_u)$ 是奇数，那么 $\alpha(r_{u_1})=1$，而对于 $x\geqslant 2$ $\alpha(r_{ux})=2$。不难看到，如果节点 u 的度是 i，那么将 S_u 的元素划分为 R_u，有 f(i) 个不同的划分法。

考虑具有以上性质的划分的一个系统 $\mathscr{R}=\{R_1, R_2, \cdots, R_n\}$，在下面将证明，对于 $\mathscr{R}$ 的每一选择，相应地有一唯一的分解树 t 为 k 个边不相接路径，反之亦然。分解过程总的说来是反复产生与相应的一条路径，然后把它移去。产生与 $\mathscr{R}$ 相应的路径的规则概述如下：

（1）在度为奇数的节点 w 上开始，然后沿着含于 R_w 的 r_{w1} 中的边行进。

（2）如果在 R_v 的 r_{vx} 上得出一条边（u，v），那么对于 $x\neq 1$，沿着含于 r_{vx} 中另一条边行进，而对于 $x=1$，路径即已构成。

显然，以上步骤将分解树为 k 条边不相接路径，反之，对于每个分解相应地有一组具有以上性质的划分，从而不同的划分数 β 等于具有所要求性质的不同组的数目。因此，有

$$\beta=\prod_{x=1}^{n} f(d(x))=\prod_{i=1}^{n-1} f(i)^{n_i}, \tag{5.15}$$

定理证毕。

作为一个例子，考虑如图 5.2 所示的树 t，有 $n_1=4$，$n_2=4$，$n_3=2$ 以及对于 $i=4, 5, \cdots 9$，$n_i=0$。由于在 t 中有 6 个度为奇数的节点，即 $k=3$，从而任何分解树 t 为边不相接路径至少含有 3 条路径，事实上树 t 可能的不同分解数有

$$\beta=(1)^4(1)^4(3)^2=9,$$

给出如下：

$\{e_1e_2,\ e_3e_5e_4,\ e_6e_7e_8e_9\}$，$\{e_1e_2,\ e_3e_6e_7e_8e_9,\ e_5e_4\}$，
$\{e_1,\ e_2e_3e_5e_4,\ e_6e_7e_8e_9\}$，$\{e_1,\ e_2e_3e_6e_7e_8e_9,\ e_5e_4\}$，
$\{e_2,\ e_1e_3e_5e_4,\ e_6e_7e_8e_9\}$，$\{e_2,\ e_1e_3e_6e_7e_8e_9,\ e_5e_4\}$，
$\{e_1e_3,\ e_2,\ e_4e_5e_6e_7e_8e_9\}$，$\{e_2e_3,\ e_1,\ e_4e_6e_5e_7e_8e_9\}$，
$\{e_3,\ e_1e_2,\ e_4e_5e_6e_7e_8e_9\}$。

§4. Wang-代数公式

在图论的许多工程应用中，有必要列出图的所有的树和补树。例如，网络函数的拓扑公式是用树和补树乘积来表述的。因此，一个复杂线性系统采用拓扑公式作为工具，用数字计算机来分析的效率很大程度上取决于产生伴随有向图的树或补树的效率。

对于一个 n 节点的连通图来说，生成全部树的最简单的方法是观察 $n-1$ 个边的所有可能的组合。如果 b 是其边的总数，必须观察 $\binom{b}{n-1}$ 个组合。对于一个中等大小的图来说，这些组合的数目甚至对于高速数字计算机来说也是太大了。例如，对于一个具有 ? 个节点和 40 条边的图，要观察的数目是 137846528820。

用直接方法生成树的主要困难在于随着节点数的增加，运算的次数按指数规律增加。这就需要有一种新的生成全部树的方法，它要求运算次数随图的节点数的变化接近于线性关系，而且不需要对每一新生成的树都要与已经产生的树核对一下是否重复，因为这是一种非常消耗时间的过程。如在上面所示的例子中，树数可以达到上百万。除了降低这个过程之外，由于在计算机存贮器中必须保存全部树集和根据所有可能的重复项来检验每一个新树，这也进一步限制了用计算机来分析系统的规模。

在这一节中将讨论树、补树、多树、多补树、回路、路径和割切之间的密切关系。然后表述怎样利用这些关系式来生成树和补树。整个一节是以 CHEN 和 MARK[1969]，BERGER 和 NATHAU

[1968]和CHEN[1969 d～h，1971 c]的最近研究成果为基础的。

4.1 Wang-代数

Wang 代数首先是由WANG[1934]在试图对展开网络行列式找到一套简捷规则中提出的。由于网络(图)的树或补树和网络行列式的非对消项之间的密切关系，这种代数在计算图的树和补树中有广泛的应用。

对于一个给定的图G，设$\mathscr{G}$是G的所有不包含孤立节点（空图ϕ除外)的子图的集合，每个子图都用它的边标识符的乘积来表示。在普通意义上，认为$\mathscr{G}$的全部子集的集合$\mathscr{G}$定义等价关系"="。在φ中我们定义两个二元运算，其中一个二元运算称为环和（或对称差)，以符号⊕来表示，而另一个称为Wang积，以符号ⓐ来表示。这些运算要求满足以下规律：对于φ中任何S_1和S_2，有

$$S_1 \oplus S_2 = \{g;\ g\text{ 或在 }S_1\text{ 中或在 }S_2\text{ 中，但不为 }S_1\text{ 和 }S_2\text{ 所共有}\} \quad (5.16)$$

和

$$S_1 ⓐ S_2 = \{W_1\} \oplus \{W_2\} \oplus \cdots \oplus \{W_{\alpha(W)}\} \quad (5.17\text{a})$$

式中$\alpha(W)$表示集合$W=\{W_i\}$中元素的数目，以及

$$W = \{g_1 \cup g_2;\ g_1\text{ 在 }S_1\text{ 中，}g_2\text{ 在 }S_2\text{ 中，及 }g_1 \cap g_2 = \phi\}。 \quad (5.17\text{b})$$

换言之，集合S_1和S_2的Wang积是通过取所有集合的环和运算所得G的子图的集合，其中每一个集合仅仅含有通过取两个边不相接子图(一个来自S_1，另一个来自S_2)的并而得到的一个元素。

不难检验，集合φ形成一个满足单位元的可换环(习题5.13)：对于φ中的任何S_1、S_2和S_3，有

A 环和

1．可交换性： $S_1 \oplus S_2 = S_2 \oplus S_1$；

2．结合性： $S_1 \oplus (S_2 \oplus S_3) = (S_1 \oplus S_2) \oplus S_3$；

3．封闭性： $S_1 \oplus S_2$ 在 φ 中；

4．零元：　　　$S_0 \oplus S_1 = S_1$；

5．负元：　　　$S_1 \oplus S_1 = S_0$。

式中 S_0 表示 φ 的空集；

B　Wang 积

1．可交换性：　$S_1 \oplus S_2 = S_2 \oplus S_1$；

2．结合性：　　$S_1 ⓐ (S_2 ⓐ S_3) = (S_1 ⓐ S_2) ⓐ S_3$；

3．封闭性：　　$S_1 ⓐ S_2$ 在 φ 中；

4．单位元：　　$\{\phi\} ⓐ S_1 = S_1$；

C　分配性　$S_1 ⓐ (S_2 \oplus S_3) = S_1 ⓐ S_2 \oplus S_1 ⓐ S_3$。

除了这些性质之外，有

$$S_0 ⓐ S_1 = S_0.$$

$$S_1 ⓐ S_1 = \begin{cases} S_0 & \text{如果 } \phi \text{ 不在 } S_1 \text{ 中。} \\ \{\phi\} & \text{如果 } \phi \text{ 在 } S_1 \text{ 中。} \end{cases}$$

作为一个例子，考虑如图 5.1 所示图G的子图集：

$$S_1 = \{e_1e_2,\ e_3e_4e_5,\ e_5e_6\},$$

$$S_2 = \{e_1e_2,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_6\}。$$

那么　$S_1 \oplus S_2 = \{e_3e_4e_5,\ e_5e_6,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_6\}$

$S_1 ⓐ S_2 = \{e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_2e_5e_6\}$。

4.2　线性相关

设 g_x　$(x = 1, 2, \cdots, k)$是图G的子图，如果对于某些常数集 $c_x = 1$ 或 0，而不全为零，有

$$c_1g_1 \oplus c_2g_2 \oplus \cdots \oplus c_kg_k = \phi, \qquad (5.18)$$

式中 $1\, g_x = g_x$，而 $0\, g_x = \phi$，那么子图 $g_1, g_2, \cdots, g_k$ 称为线性相关。但是，如果式(5.18)只有当所有的常数 c_x 均为零时才得以满足，则这些子图称为线性独立。特别是，如果对于某些 i 和 j $(i \neq j)$ 以及 $i, j \leq k$，有 $g_i = g_j$ 或 $g_i = \phi$，那么子图 g_x 总是线性相关的。

另一方面，子图的线性相关可以用矢量的线性相关来解释。与图G有关的线性矢量空间由G的所有子图的集合 $\mathscr{G}$ 组成。G的子图

构成线性矢量空间上域$\mathscr{F}$是整数模2域，矢量的加是环和运算，不难检验，$\mathscr{G}$构成了维数为b的线性矢量空间$\mathscr{N}(G)$。如果G的边标号为e_1、e_2、…、e_b，任何一个子图可以表示为1和0的b一元组。基本的b矢量(其中每一个矢量由G的一个边构成)形成$\mathscr{N}(G)$的基底(对于某些有关的性质，参见习题5.14和5.70~5.71)。那么G的子图g_1、g_2、…和g_k是线性相关(独立)，当且仅当它们相对应的b矢量在$\mathscr{F}$上是线性相关(独立)。特别是，完全关联矩阵A_a，完全回路矩阵B_a和完全割集矩阵Q_a的转置矩阵，它们的列是$\mathscr{N}(G)$中的元素。因此，根据第二章§1和第五章§1中的论证，有(习题5.15)。

推论 5.4：设$\{L_x\}$($x=1$、2、…，m)是图G线性无关的回路或边不相接回路的并的集合，那么G的任何回路或边不相接回路的并可以表示为这些L_x的线性组合(环和)。

推论 5.5：设$\{C_x\}$($x=1$，2，…，r)是图G的线性无关的割切的集合，那么G的任何割切可以表示为这些割切C_x的线性组合。

作为一个例子，考虑如图5.1所示的图G的回路集合：$L_1=e_1e_2e_3e_4$，$L_2=e_3e_4e_5$和$L_3=e_1e_2e_4e_3e_5$。由于

$$L_1 \oplus L_2 \oplus L_3=\phi,$$

从而回路L_1，L_2和L_3是线性相关的。但是这三个回路的任何两个是线性独立的。因此，任何一个可以表示为其它两个线性组合，例如，L_1可以表示为L_2和L_3的环和。

类似地，可以定义φ元素的线性相关。设S_x($x=1$，2，…，k)是φ的元素，如果对于某些常数$c_x=1$或0的集合(它们不全为零)，有

$$c_1S_1 \oplus c_2S_2 \oplus \cdots \oplus c_kS_k=S_0 \tag{5.19}$$

式中$1 S_x=S_x$和$0 S_x=S_0$，那么集合S_1，S_2，…S_k称为线性相关。但是，如果式(5.19)只有当所有常数c_x均为零才能得以满足，则集合称为线性无关。象$\mathscr{G}$的情况一样，也可以表明，集合φ在$\mathscr{F}$上相对于环和运算是一个线性矢量空间(习题5.68)。

对于一个非空子图 g，在 φ 中有时方便地用由其边组成的集合 H(g) 来表示，

$$H(g)=\{e: e\text{ 是 }g\text{ 的边}\} \tag{5.20}$$

例如，如果 $L_1=e_1e_2e_3e_6$，那么 $H(L_1)=\{e_1, e_2, e_3, e_6\}$。

推论 5.4 和 5.5 的直接结果如下，它们的证明留作为习题（习题 5.17）。

推论 5.6：设 L 是图 G 的一个回路或边不相接回路的并，那么 H(L) 可以表示为集合 $H(L_x)$ $(x=1,2,\cdots m)$ 的一个线性组合。

推论 5.7：设 C 是一个割切，那 H(C) 可以表示为集合 $H(C_x)$ $(x=1,2,\cdots,r)$ 的一个线性组合。

作为一个例子，考虑如图 5.1 所给的图 G 的割切：$C_1=e_2e_6$，$C_2=e_2e_3e_5$，$C_3=e_3e_5e_6$，和 $C_4=e_1e_2$ 那么有

$$H(C_1)=\{e_2, e_6\},\qquad H(C_2)=\{e_2, e_3, e_5\},$$
$$H(C_3)=\{e_3, e_4, e_5\},\quad H(C_4)=\{e_1, e_2\}。$$

要检验这些割集是线性无关的并不困难。考虑割集 $C=e_1e_3e_4$，以及相应的集合 $H(C)=\{e_1, e_3, e_4\}$。这个集合可以表示为以上四个集合的线性组合，即

$$H(C)=H(C_1)\oplus H(C_2)\oplus H(C_3)\oplus H(C_4)$$

定理 5.13：设 $\{L_x\}$ 和 $\{L_x^*\}$ $(x=1,2,\cdots,n)$ 是图的两个线性无关的回路或边不相接回路的并的集合，那么有

$$H(L_1)\textcircled{a}H(L_2)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(L_n)=H(L_1^*)\textcircled{a}H(L_2^*)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(L_n^*), \tag{5.21}$$

证明：由于 L_i^* 是线性无关的，根据推论 5.6，有

$$H(L_x)=c_{x1}H(L_1^*)\oplus c_{x2}H(L_2^*)\oplus\cdots\oplus c_{xm}H(L_m^*), \tag{5.22}$$

式中 $c_{xi}=1$ 或 0 以及 $i=1, 2, \cdots, m$。利用式(5.22) 以及 Wang 积运算在环和运算上是服从分配律的，于是有

$$H(L_1)\textcircled{a}H(L_2)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(L_m)$$
$$=\bigoplus_{(j_1,j_2,\cdots,j_m)} c_{1j_1}H(L_{j_1}^*)\textcircled{a}c_{2j_2}H(L_{j_2}^*)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}c_{mj_m}H(L_{j_m}^*)$$

$$= \bigoplus_{(j_1 j_2 \cdots j_m)} c_{1j_1} c_{2j_2} \cdots c_{mj_m} [H(L^*_{j_1}) ⓐ H(L^*_{j_2}) ⓐ \cdots ⓐ H(L^*_{j_m})]$$

$$(\det M) H(L^*_1) ⓐ H(L^*_2) ⓐ \cdots ⓐ H(L^*_m), \tag{5.23}$$

式中 $j_1 j_2 \cdots j_m$ 是 1、2⋯m 的排列，**M** 是在模 2 域上阶为 m 的一个矩阵，其第 i 行 j 列的元素是 c_{ij}，而环和是取遍所有可能的排列 $j_1 j_2 \cdots j_m$。

现在我们将证明 **M** 是非奇异的，即 det **M** = 1。假设 **M** 是奇异的，考虑 **M** 的转置 **M′**，它也是奇异的。那么对系统

$$M' X = 0 \tag{5.24}$$

在 $\mathscr{F}$ 上存在一个非零解，式中 X 的转置由 $[x_1, x_2, \cdots, x_m]$ 给出，因此，对于 j = 1, 2, ⋯, m，有

$$\sum_{i=1}^{m} c_{ij} x_i = 0 \tag{5.25}$$

由于根据式(5.22)和(5.25)

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m} x_i H(L_i) &= \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} x_i c_{ij} H(L^*_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{m} x_i c_{ij} H(L^*_j) \\ &= \sum_{j=1}^{m} 0\, H(L^*_j) = S_0 \end{aligned} \tag{5.26}$$

以及并不是所有 x_i 均为零，从而 $H(L_1)$, $H(L_2)$, ⋯, $H(L_m)$ 是线性相关。根据假设，这是不可能的。因此，**M** 在 $\mathscr{F}$ 上是非奇异的。定理证毕。

类似地，可以证明 G 的割集的对偶性结论，由于证明以类似方式进行，所以细节留作为习题(习题 5.19)。

定理 5.14：设 $\{C_i\}$ 和 $\{C^*_i\}$ (i = 1, 2, ⋯, r) 是图 G 的两个线性无关的割切集合，那么有

$$H(C_1) ⓐ H(C_2) ⓐ \cdots ⓐ H(C_r) = H(C^*_1) ⓐ H(C^*_2) ⓐ \cdots$$

$$\textcircled{a}\, H(C_r^*)。\tag{5.27}$$

用下面例子来说明以上结论。

例 5.2：考虑如图 5.1 所示的图G，由于 $L_1=e_1e_2e_3e_6$，和 $L_2=e_3e_4e_5$，以及 $L_1^*=e_1e_2e_3e_6$ 和 $L_2^*=e_1e_2e_4e_5e_6$ 是两个线性无关的回路集合，有

$$\begin{aligned}
H(L_1)\textcircled{a}H(L_2)&=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_6\}\textcircled{a}\{e_3,\ e_4,\ e_5\}\\
&=\{e_1e_3,\ e_1e_4,\ e_1e_5,\ e_2e_3,\ e_2e_4,\ e_2e_5,\ e_3e_4,\\
&\quad e_3e_5,\ e_6e_3,\ e_6e_4,\ e_6e_5\},\\
H(L_1^*)\textcircled{a}H(L_2^*)&=\{e_1,\ e_2,\ e_3,\ e_6\}\textcircled{a}\{e_1,\ e_2,\ e_4,\ e_5,\ e_6\}\\
&=\{e_1e_2\}\oplus\{e_1e_4\}\oplus\{e_1e_5\}\oplus\{e_1e_6\}\oplus\{e_2e_1\}\\
&\quad\oplus\{e_2e_4\}\oplus\{e_2e_5\}\oplus\{e_2e_6\}\oplus\{e_3e_1\}\oplus\{e_3e_2\}\\
&\quad\oplus\{e_3e_4\}\oplus\{e_3e_5\}\oplus\{e_3e_6\}\oplus\{e_6e_1\}\oplus\{e_6e_2\}\\
&\quad\oplus\{e_6e_4\}\oplus\{e_6e_5\}\\
&=\{e_1e_4,\ e_1e_5,\ e_2e_4,\ e_2e_5,\ e_3e_1,\ e_3e_2,\\
&\quad e_3e_4,\ e_3e_5,\ e_3e_6,\ e_6e_4,\ e_6e_5\}\\
&=H(L_1)\textcircled{a}H(L_2)
\end{aligned}$$

这就证明了恒等式(5.21)。类似地，可以证明割集 $C_1=e_2e_6$，$C_2=e_2e_3e_5$，$C_3=e_3e_4e_6$ 和 $C_4=e_1e_2$，以及割集 $C_1^*=e_1e_2$，$C_2^*=e_2e_3e_4$，$C_3^*=e_4e_5$ 和 $C_4^*=e_1e_6$ 是两个线性无关的集合。于是

$$\begin{aligned}
&H(C_1)\textcircled{a}H(C_2)\textcircled{a}H(C_3)\textcircled{a}H(C_4)\\
&\quad=\{e_2,\ e_6\}\textcircled{a}\{e_2,\ e_3,\ e_5\}\textcircled{a}\{e_3,\ e_4,\ e_6\}\textcircled{a}\{e_1,\ e_2\}\\
&\quad=\{e_2e_3,\ e_2e_5,\ e_6e_2,\ e_6e_3,\ e_6e_5\}\textcircled{a}\{e_3e_1,\ e_3e_2,\ e_4e_1,\ e_4e_2,\\
&\qquad e_6e_1,\ e_6e_2\}\\
&\quad=\{e_2e_3e_4e_1,\ e_2e_5e_3e_1,\ e_2e_5e_4e_1,\ e_2e_5e_6e_1,\ e_6e_2e_4e_1,\ e_6e_3e_4e_1,\\
&\qquad e_6e_3e_4e_2,\ e_6e_5e_3e_1,\ e_6e_5e_3e_2,\ e_6e_5e_4e_1,\ e_6e_5e_4e_2\}\\
&H(C_1^*)\textcircled{a}H(C_2^*)\textcircled{a}H(C_3^*)\textcircled{a}H(C_4^*)\\
&\quad=\{e_1,\ e_2\}\textcircled{a}\{e_2,\ e_3,\ e_4\}\textcircled{a}\{e_4,\ e_5\}\textcircled{a}\{e_1,\ e_6\}\\
&\quad=\{e_1e_6,\ e_2e_6,\ e_2e_1\}\textcircled{a}\{e_2e_4,\ e_2e_5,\ e_3e_4,\ e_3e_5,\ e_4e_5\}\\
&\quad=\{e_1e_6e_2e_4,\ e_1e_6e_2e_5,\ e_1e_6e_3e_4,\ e_1e_6e_3e_5,\ e_1e_6e_4e_5,\ e_2e_6e_3e_4,
\end{aligned}$$

$e_1e_6e_3e_4$, $e_2e_6e_4e_5$, $e_2e_1e_3e_4$, $e_2e_1e_3e_5$, $e_2e_1e_4e_5\}$

$= H(C_1) ⓐ H(C_2) ⓐ H(C_3) ⓐ H(C_4)$

这就证明了恒等式(5.27)。注意：以上运算中应用了 Wang 积服从结合律和交换律的性质。

4.3 树和补树

在这一节中，将在 Wang 代数的意义上来阐述树和补树及独立割切和回路或边不相接回路的并之间的关系。这个概念并不是新的，而首先是由 WANG[1934]提出的。但是，Wang 的规则仅适合于平面图，TING[1935]推广了 Wang 的规则，使它适用于任何图。以图的关联割切为基础的 Wang 和 Ting 的对偶方法首先是由 TSAI[1939]所阐述的，而由 DUFFIN[1959]推广到任何独立割切。

定理 5.15：设$\{L_x\}$ $(x=1, 2, \cdots, m)$是连通图G的线性独立回路或边不相接回路的并的集合，那么G的补树集$\bar{T}$由下式给出

$$\bar{T} = H(L_1) ⓐ H(L_2) ⓐ \cdots ⓐ H(L_m) \tag{5.28}$$

证明：不失一般性，根据定理 5.13，可以假设$\{L_x\}$是相对于树 t 的基本回路集，首先证明G的每一个补树都含于$H = H(L_1) ⓐ \cdots ⓐ H(L_m)$。假定不是这样，即存在一个不含于H中的补树。设这个补树$\bar{t} = e_1e_2\cdots e_m$是G中树 t 的补。由于$e_i$ $(i=1, 2, \cdots, m)$是在$H(L_i)$中，但不在任何其它集合$H(L_x)$ $(x \neq i)$中，从而$\bar{t}$是在H中，这与上面的假定产生了矛盾。因此，G的每个补树都含于H中。

其次，必须证明在H中的每一项都是一个补树。由于G的每个回路L都可被包括在m个线性独立回路集中，设$\{L_i^*\}$是包括L的m个线性独立回路集，那么对于在$H^* = H(L_1^*) ⓐ H(L_2^*) ⓐ \cdots ⓐ H(L_m^*)$中的每个元素$h^*$，都有$L \cap h^* \neq \phi$。由于根据定理 5.13，有$H = H^*$，从而对于H中每个 h，有

$$L \cap \bar{h} \neq \phi。 \tag{5.29}$$

假设在H中存在一个不是补树的元素h，那么G中h的补$\bar{h}$必定是至少含有一个回路的子图。设这个回路是L，因为L是含于$\bar{h}$中的，显然有$L \cap h = \phi$。由式(5.29)，这是不可能的。因此，H中的每一项必定是补树。定理证毕。

以割切为基础的对偶结论由下给出

定理 5.16 设$\{C_x\}(x=1, 2, \cdots, r)$是连通图G的线性独立的割切的集合，那么G的树集T由下式给出，

$$T = H(C_1) ⓐ H(C_2) ⓐ \cdots ⓐ H(C_r) \tag{5.30}$$

证明类似于定理5.15的证明，这里略去(习题5.31)。

根据定理5.15和5.16，可以得出结论，例5.2中给出的$H(L_1) ⓐ H(L_2)$和$H(C_1) ⓐ H(C_2) ⓐ H(C_3) ⓐ H(C_4)$中的项对应于图5.1中所示图的补树和树。论述的正确性可由读者自己来验证。

4.4 k-树和k-补树

在这一节中将介绍k-树和k-补树与独立割集和独立回路之间的联系。k-树或k-补树的概念是在第二章§6.2中(定义2.32和2.34)所定义的2-树或2-补树定义的简单推广。

定义 5.2：k-树。

图G的生成子图被称为k-树(k≥1)，当且仅当它具有k个不含回路的连通片，这些连通片中可以有不止一个孤立节点。如果k没有明确给定，一个k-树也可以就称为多树或林。

定义 5.3：k-补树。

对于一个图G，图G中k-树的补图称之为图G的k-补树。如果k没有明确给定，一个k-补树也可就称之为多补树或补林。

常用到这样的k-树，某些指定的节点要求处于不同的连通片中。为了方便起见，我们用分号来分隔需要出现在不同连通片中的

节点组①。例如，符号 $t(i_1, i_2; i_3, i_4, i_5; i_6, i_7)$ 或者简记为 $t(I)$，这里 $I=\{i_1, i_2; i_3, i_4, i_5; i_6, i_7\}$，它表示一个 3 树，其中节点 i_1 和 i_2 处于一个连通片中，节点 i_3，i_4 和 i_5 处于一个连通片中，以及节点 i_6 和 i_7 处于一个连通片中。如果 I 仅由一个元素组成，定义 $t(I)=t$，即，1-树亦就是树。上面的例子很易推广到一般情况。我们用 $T(I)$ 表示图G所有可能的多树 $t(I)$ 的集合。类似地 $\bar{t}(I)$ 和 $\bar{T}(I)$ 分别表示图G中多补树（多树 $t(I)$ 的补）和所有可能多补树 $\bar{t}(I)$ 的集合。显然，如果 I 仅由一个元素组成，那么 $\bar{t}(I)=\bar{t}$，即，1-补树也就是补树。为了简化起见，设 T 和 $\bar{T}$ 分别是G的树集和补树集。

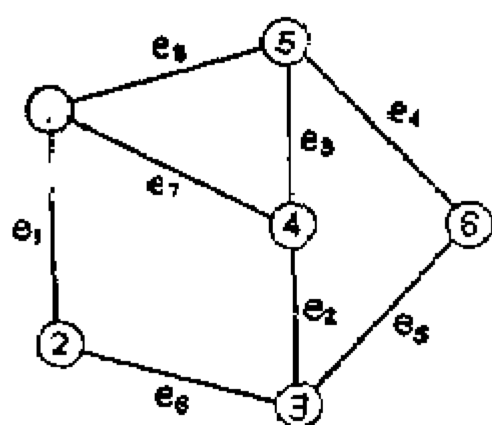


图 5.4 说明多树和多补树的图

例如，在图5.4中，3 树 $t(1, 2; 4; 3, 6)$ 和 3 补树 $\bar{t}(1, 2; 4; 3.6)$ 的集合分别如图 5.5 和 5.6 所示。

对于一个给定的图G，设 $G(I)$ 是从G中把含于I中的诸节点等同起来所得的图，这一运算可能会产生自环，假定不把这些自环移去。由于G(I)中的树（补树）和G的多树 $t(I)$（多补树 $\bar{t}(I)$）是处于一一对应的关系，

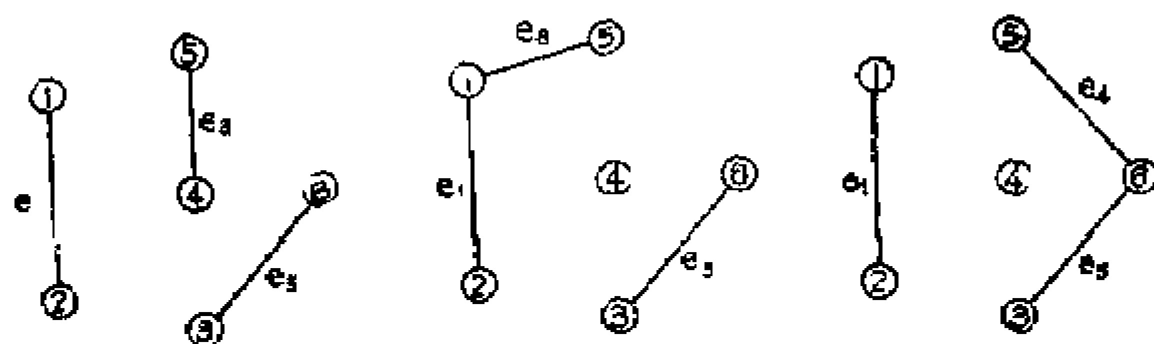


图 5.5 图 5.4 3 树 $t(1, 2; 4; 3.6)$ 的集合

① 为了避免双下标和简化符号，在此所定义的 2 树符号 $t(\cdot, \cdot)$ 与第二章§6.2中所给的 t_{ij} 稍有不同，这不会产生任何困难。

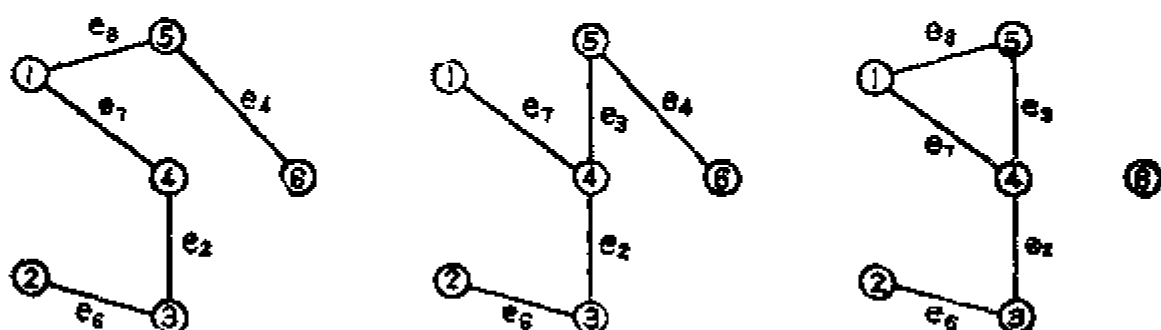


图 5.6 图 5.4的3 补树$t(1，2；4；3，6)$的集合

所以定理5.15和5.16也可以用来产生这些子图(习题5.22-5.25)。对此，我们仅阐述以关联割切为基础的情况(参见文献CHEN[1966 a])。

定理 5.17：设C_x $(x=1, 2, \cdots, n)$是连通图G的节点x的关联割切，那么G的k树$t(I)$的集合(包括空图)由下式给出

$$T(I)=H(C_{i_{k+1}})\textcircled{a}H(C_{i_{k+2}})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{i_n}) \tag{5.31}$$

式中$I=\{i_1; i_2; \cdots; i_k\}$和$\{i_{k+1}; i_{k+2}; \cdots i_n\}$是整数集$\{1;2;\cdots;n\}$的补集。

证明：设$C^*_{j_y}$ $(y=1, 2, \cdots, n-k-1)$是$G(I)$的节点j_y的关联割切，由于G的k-树$t(I)$与$G(I)$的树处于一一对应关系，以及由于对于$Z=i_{k+1}, i_{k+2}, \cdots i_n$，有$C_Z=C^*_Z$，推论直接从定理5.16得出。

定理5.15和5.16的另一个结果是G的2补树集可以从补树集中得到，而树集可以从2-树集中得到。

定理 5.18：设P_{ij}是连通图中连接节点i和j的路径，那么有

$$\bar{T}(I)=T\textcircled{a}H(P_{ij}) \tag{5.32}$$

式中$I=\{i; j\}$。

证明：设G^*是从G的节点i和j之间连接一条外加边e所得的图。设t^*是含有路径P_{ij}的G^*的树(参见习题2.43)。如果L^*_x $(x=1, 2, \cdots, m-1)$是相对于G^*中树t^*的f回路，以及如果

L^*_{m+1}是由弦e确定的f回路，那么根据定理5.15，G^*的补树集T^*由下式给出⊖。

$$T^* = H(L^*_1)ⓐH(L^*_2)ⓐ\cdots ⓐH(L^*_{m+1})$$
$$= Tⓐ H(L^*_{m+1})$$
$$= Tⓐ H(P_{ij})\oplus Tⓐ\{e\} \quad (5.33)$$

第二行是根据定理5.15以及L^*_1，L^*_2，…，L^*_m也是G中相对于t^*的f回路这一事实而得出的，而第三行是在表示$H(L^*_{m+1})=H(P_{ij})\oplus\{e\}$之后而得到的。

由于G^*中补树可以分成为那些含有边e的$\overline{T}^*(e)$和那些不含有边e的$T^*(e)$，从而有

$$T^* = \overline{T}^*(\bar{e})\oplus T^*(e)$$
$$= \overline{T}^*(I)\oplus Tⓐ\{e\} \quad (5.34)$$

由于$\overline{T}^*(e)$中补树与G中2补树处于一一对应关系，而$T^*(e)$中补树与G中补树处于一一对应关系，把式(5.33)和(5.34)等同起来，并且对于在φ中的每个S_x，利用$S_x\oplus S_x=S_0$，于是可以得到所要求的结果，定理证毕。

定理 5.19：设C_{ij}是连通图G中使节点i和j分离的割集，那么有

$$T = T(I)ⓐH(C_{ij}), \quad (5.35)$$

式中$I=\{i, j\}$。

证明：设G^*是从G的节点i和j之间连接一条附加边e所得的图，设t^*是含有边e但不含有任何C_{ij}的边的G^*的一个树，由于G^*-C_{ij}是连通的，这总是可能的。如果$C^*_x(x=1, 2, \cdots, r)$是由树t^*所确定的G^*的基本割集，其中C^*_r是由边e形成的f割集，那么$G^*(I)$中$C^*_y(y=1, 2, \cdots, r-1)$的对应割集$C'_y$是$G^*(I)$中$t^*$的所对应树$t''$的f割集。此外，有$t''=t^*-e$和$C''_y=C^*_y$。

⊖ 在不用括弧的情况下，运算的次序为Wang积，环和以及并。

根据定理 5.16，G^* 的树集 T^* 可以用 $G^*(I)$的树集 T'' 来表示：

$$
\begin{aligned}
T^* &= H(C_1^*)\textcircled{a}H(C_2^*)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_r^*) \\
&= H(C_1')\textcircled{a}H(C_2'')\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{r-1}'')\textcircled{a}H(C_r'\cup\{e\}) \\
&= T''\textcircled{a}[H(C_r)\cup\{e\}] \\
&= T(I)\textcircled{a}H(C_r)\oplus T''\textcircled{a}\{e\} \qquad (5.36)
\end{aligned}
$$

最后一行是根据 $G^*(I)$中的树与G中的 2-树 $t(I)$处于一一对应关系的情况而得出的

由于 G^* 中的树可以分为那些含有边 e 的 $T^*(e)$ 和那些不含有边 e 的 $T^*(\bar{e})$，从而有

$$
\begin{aligned}
T^* &= T^*(e)\oplus T^*(\bar{e}) \\
&= T(I)\textcircled{a}\{e\}\oplus T \\
&= T''\textcircled{a}\{e\}\oplus T \qquad (5.37)
\end{aligned}
$$

于是式 5.35 直接从式(5.36)和(5.37)得出。定理证毕。

例 5.3：假设要求生成如图 5.4 所示图G的所有 3-树 $t(1;3;5)$，那么根据定理 5.17，有 $I=\{1;3;5\}$，以及

$$
\begin{aligned}
T(I) &= H(C_2)\textcircled{a}H(C_4)\textcircled{a}H(C_6) \\
&= \{e_1, e_6\}\textcircled{a}\{e_2, e_3, e_7\}\textcircled{a}\{e_4, e_5\} \\
&= \{e_1e_2e_4,\ e_1e_2e_5,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_4e_7,\ e_1e_5e_7, \\
&\quad e_2e_4e_6,\ e_2e_5e_6,\ e_3e_4e_6,\ e_3e_5e_6,\ e_5e_6e_7,\ e_4e_6e_7\}
\end{aligned}
$$

例 5.4，考虑图 5.7 给出的图G，首先由式(5.31)生成G的 2-树集 $t(1;3)$，那么 $I=\{1;3\}$，以及

$$
\begin{aligned}
T(I) &= H(C_2)\textcircled{a}H(C_4) \\
&= \{e_3, e_2, e_6\}\textcircled{a}\{e_1, e_5, e_5\} \\
&= \{e_1e_2,\ e_1e_3,\ e_1e_6,\ e_2e_4,\ e_3e_6,\ e_2e_5,\ e_3e_5,\ e_5e_6\}
\end{aligned}
$$

于是使用式(5.35)来生成G的树集，设 $C_{13}=e_1e_4e_6$，

$$
\begin{aligned}
T &= T(I)\textcircled{a}\{e_1, e_4, e_5\} \\
&= \{e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_5,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_5e_6,\ e_1e_2e_4,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_4e_6, \\
&\quad e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_6,\ e_2e_4e_5,\ e_3e_4e_5,\ e_4e_5e_3,\ e_1e_2e_6,\ e_2e_3e_6, \\
&\quad e_2e_6e_5,\ e_3e_5e_6\}
\end{aligned}
$$

最后，使用式(5.32)来生成G的2补树集，设$P_{13}=e_4$，那么

$$
\begin{aligned}
\bar{T}(I) = & T \,\hat{\cap}\, \{e_4\} \\
= & \{e_4e_5e_6,\ e_3e_4e_6,\ e_2e_4e_6,\ e_2e_3e_4,\ e_3e_5e_6,\ e_2e_5e_6, \\
& e_2e_3e_5,\ e_1e_5e_6,\ e_1e_2e_5,\ e_1e_3e_6,\ e_1e_2e_6,\ e_1e_2e_3, \\
& e_3e_4e_5,\ e_1e_4e_5,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_2e_4\} \,\hat{\cap}\, \{e_4\} \\
= & \{e_3e_4e_5e_6, e_2e_4e_5e_6, e_2e_3e_4e_5, e_1e_4e_5e_6, e_1e_2e_4e_5, \\
& e_1e_3e_4e_6,\ e_1e_2e_4e_6,\ e_1e_2e_3e_4\}
\end{aligned}
$$

很容易验证，$\bar{T}(I)$中每一项都是T(I)中相应项的补，我们还记得，在上述过程中所产生的项都是不重复的项，但是，如果选$P_{13}=e_1e_5$，则在上述过程中下列各项会产生二次：$e_1e_3e_5e_5$，$e_1e_2e_5e_6$，$e_1e_2e_3e_5$和$e_1e_3e_4e_5$，当然最终结果是一样的。因此，可以得出结论，在式(5.32)中，适当地选择P_{ij}可以使由于重复所产生的冗余项的数目大大地减少。对于所有其它根据Wang代数得出的公式来说，这同样是有效的(习题5.26和5.27)。

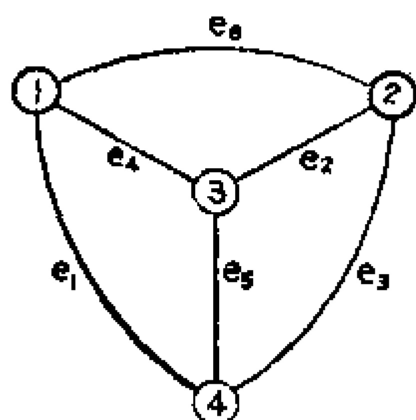


图 5.7 用于生成树，2树和2补树的图

4.5 分块

在前面我们已经表明如何利用独立割集或独立回路来生成树或补树。但是，如果给定的网络很复杂，这些方法并不是高效率的，因为在此过程中会产生数目很大的对消项。

为了减少计算方面的困难，以下将叙述如何把一个原始图分解为n个部分，在每个部分中确定适当的子图，然后组合这些子图以得到所要求的结果，虽然这些公式仍会由于重复而导致冗余项。但其数目将大大减少。在下一节中我们将讨论可以避免重复项的条件。

设G是通过分别叠加图G′的节点i_1'、i_2'，…，i_k'到另一个图

G″的节点 i_1''，i_2''，…，i_k'' 上所形成的连通图。图中组合节点用 i_1，i_2，…，i_k 来表示，其中 $0<k-1\leqslant\min(r', r'')$，而 r′ 和 r″ 分别是图 G′ 和 G″ 的秩。如果 T，T′(I′) 和 T″(I″) 分别是图 G，G′ 和 G″ 中形成 t，t(I′) 和 t(I″) 的树集和 k 树集，其中 $I'=\{i_1'; i_2'; \cdots; i_k'\}$ 和 $I''=\{i_1''; i_2''; \cdots; i_k''\}$，那么有如下定理。

定理 5.20：

$$T=T'(I')\textcircled{a}T''(I'')\textcircled{a}H(C_{i_1})\textcircled{a}H(C_{i_2})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{i_{k-1}}), \quad (5.38)$$

式中 C_{i_x}($x=1, 2, \cdots, k-1$) 是 G 中节点 i_x 的关联割集。

证明 不失一般性，设 $i_x=x$($x=1, 2, \cdots, k$)，此外，设G的节点用下列方法标号：包含在 G′ 中但不在 $I=\{1; 2; \cdots; k\}$ 中的那些节点用 $k+1, k+2, \cdots, k+n'$ 来标号，而包含在 G″ 中但不在 I 中那些节点用 $k+n'+1, k+n'+2, \cdots, k+n'+n''$ 来标号，这里 $k+n'$ 和 $k+n''$ 分别是 G′ 和 G″ 中的节点数。因此，如果 C_u，C_u' 和 C_u'' 分别是 G、G′ 和 G″ 中节点 u 的关联割集，则对于 $u=k+1, \cdots, k+n'$，有 $C_u=C_u'$；对于 $u=k+n'+1, \cdots, k+n'+n''$，有 $C_u=C_u''$，而 C_u 对于 $u=1, 2, \cdots, k$ 来说是 C_u' 和 C_u'' 的边不相接并，根据定理5.16，有

$$\begin{aligned}
T&=H(C_1)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{k-1})\textcircled{a}H(C_{k+1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{k+n'+n''})\\
&=H(C_1)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{k-1})\textcircled{a}H(C'_{k+1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C'_{k+n'})\\
&\quad\textcircled{a}H(C''_{k+n'+1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C''_{k+n'+n''})\\
&=H(C_1)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{k-1})\textcircled{a}T_s'\textcircled{a}T_s''\\
&=H(C_1)\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_{k-1})\textcircled{a}T'(I')\textcircled{a}T''(I''), \quad (5.39)
\end{aligned}$$

式中 T_s' 和 T_s'' 分别是 G′(I′) 和 G″(I″) 中的树集。定理是根据 G′ 和 G″ 中 k 树 t(I′) 和 t(I″) 分别与 G′(I′) 和 G″(I″) 中的树处于一一对应关系的情况直接得出的。定理证毕。

类似地，如果 $\bar{T}$、$\bar{T}'$ 和 $\bar{T}''$ 分别是 G、G′ 和 G″ 中的补树集，以及如果 $P'_{\alpha\beta}$ 和 $P''_{\alpha\beta}$ 分别是 G′ 和 G″ 中连接节点 α 和 β 的路径，这里 $\alpha=i_x$ 和 $\beta=i_{x+1}$($x=1, 2, \cdots, k-1$)，那么有如下定理。

定理 5.21： 如果 G′ 和 G″ 是连通的，那么有

$$T = T' ⓐ T'' ⓐ H(P'_{i_1i_2} \cup P''_{i_1i_2}) ⓐ \cdots ⓐ H(P'_{i_{k-1}i_k} \cup P''_{i_{k-1}i_k})。 \tag{5.40}$$

证明：不失一般性，设 $i_x = x$，此外，设

$$L_x = P'_{x(x+1)} \cup P''_{x(x+1)} \tag{5.41}$$

不难看到，回路集 $L_x(x=1, 2, \cdots, k-1)$ 是线性独立的。设 $\{L'_u\}$ $(u=1, 2, \cdots, m')$ 和 $\{L''_v\}$ $(v=1, 2, \cdots m'')$ 分别是 G' 和 G'' 中的线性独立回路集，这样 L'_u，L''_v 和 L_x 构成 G 中 $(m'+m''+k-1)$ 个线性独立回路，这里 m' 和 m'' 分别是 G' 和 G'' 的零度。由于 G 的零度 m 等于 $(m'+m''+k-1)$，从而根据定理5.15有

$$\begin{aligned} T &= H(L'_1) ⓐ \cdots ⓐ H(L'_{m'}) ⓐ H(L''_1) ⓐ \cdots ⓐ H(L''_{m''}) \\ &\quad ⓐ H(L_1) ⓐ \cdots ⓐ H(L_{k-1}) \\ &= T' ⓐ T'' ⓐ H(L_1) ⓐ \cdots ⓐ H(L_{k-1})。 \end{aligned} \tag{5.42}$$

定理因此得出(它的推广，参见习题5.29)。

用下面例子说明以上结果。

例 5.5：考虑图5.1的图 G，图 G 通过节点2和4可以分成两个子图 G' 和 G''，如图5.8所示。那么 $I=\{2; 4\}$，$I'=\{2'; 4'\}$ 和 $I''=\{2''; 4''\}$。G 中节点2的关联割集 C_2 是 $e_2e_3e_4$。因此，根据定理5.20有

$$\begin{aligned} T &= T'(I') ⓐ T''(I'') ⓐ H(C_2) \\ &= \{e_1e_2, e_1e_6, e_2e_6\} ⓐ \{e_4, e_5\} ⓐ \{e_2, e_3, e_4\} \\ &= \{e_1e_2e_3e_4, e_1e_2e_3e_5, e_1e_2e_4e_5, e_1e_2e_4e_6, e_1e_3e_4e_6, e_1e_2e_5e_6, \\ &\quad e_1e_3e_5e_6, e_1e_4e_5e_6, e_2e_3e_4e_6, e_2e_3e_5e_6, e_2e_4e_5e_6\}， \end{aligned}$$

该结果与例5.2中给出的结果相同。另外，可以用 C_4 代替 C_2，于是结果由下给出，

$$\begin{aligned} T &= T'(I') ⓐ T''(I'') ⓐ H(C_4) \\ &= \{e_1e_2, e_1e_6, e_2e_6\} ⓐ \{e_4, e_5\} ⓐ \{e_3, e_5, e_6\}， \end{aligned}$$

这产生与以上相同的结果。

现在假定要求利用式(5.40)来生成 G 的补树集。设 $P'_{24} = e_1e_2e_6$

和 $P_{24}=e_3$，那么有

$$
\begin{aligned}
T &= T'(\phi)\times T''(\phi)\times(P'_{24}\cup P''_{24})\\
&=\{\phi\}\times\{e_3,\ e_4,\ e_5\}\times\{e_1,\ e_2,\ e_6,\ e_3\}\\
&=\{e_3e_1,\ e_4e_1,\ e_5e_1,\ e_3e_2,\ e_4e_2,\ e_5e_2,\ e_3e_6,\ e_4e_6,\ e_5e_6,\\
&\qquad e_4e_3,\ e_5e_3\},
\end{aligned}
$$

此结果与例5.2中给出的结果相同。也可以利用 $P_{24}=e_4e_5$，来得到如上所示相同的结果。

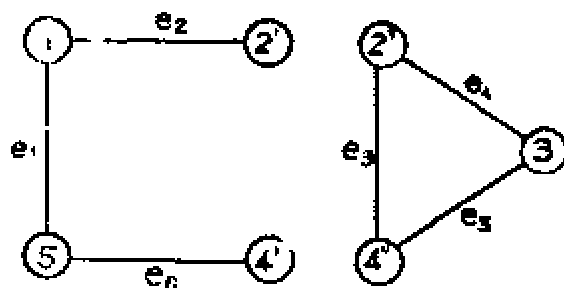


图 5.8 图5.1的图G的分块

现在我们着手表明定理5.20可以进一步简化，并且可以用环和运算来表示。此结果对我们来说特别感兴趣，因为在下一节中所讨论的由不产生重复项的分块方法来生成树的问题上将以它为出发点。

为了简化符号，从这里开始，用 $T'(I_k)$ 或 T'_{I_k} 来表示 $T'(I')$ 或 $T''(I'')$，这里 $I_k=\{i_1;\ i_2;\ \cdots;\ i_k\}$。对于 G' 和 G'' 中的 k 补树集 $T'(I_k)$ 和 $T''(I_k)$ 来说，这同样适用。

下面定义在 φ 中任意两个集合 S_1 和 S_2 的笛卡儿积运算，用符号 $S_1\times S_2$ 来表示，

$$S_1\times S_2=\{g_i\cup g_j,\ g_i \text{ 在 } S_1 \text{ 中，而 } g_j \text{ 在 } S_2 \text{ 中}\} \tag{5.43}$$

以及 $S_1\times S_0=S_0\times S_1=S_0$，即，它是由 S_1 中的一个子图和 S_2 中的一个子图的所有可能组合的并所得到的所有子图的集合。

例如，如果

$$S_1=\{e_1e_2,\ e_3e_4e_5,\ e_5e_6\}$$
$$S_2=\{e_1e_2,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_6\}$$

那么 $S_1\times S_2=\{e_1e_2,\ e_1e_2e_3e_4,\ e_1e_2e_6,\ e_1e_2e_3e_4e_5,\ e_1e_3e_4e_5,$
$e_1e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_2e_5e_6,\ e_1e_3e_4e_5e_6,\ e_1e_5e_6\}$

值得注意的是，以上所定义的 $S_1\times S_2$ 中的所有元素并不是一定

不同的。这个定义有点与笛卡儿(Cartesian)积的通常意义不同，或许应该用不同的名称，但我们并未发现有此必要。在上例中，$e_1e_2e_4e_5e_6$ 在乘积中出现两次。

引理 5.1：设C是在G中从 I_{k-1} 中的节点中分离节点 k 的一个割集，那么对于 $k\geq 2$，有

$$T(I_{k-1})=T(I_k)\textcircled{a}H(C) \tag{5.44}$$

引理直接根据定理 5.19 得出，而且可以认为是式(5.35)的推广，其证明是简单明了的，留作为练习(习题 5.30)。

引理 5.2：如果 S_1 和 S_2 分别是 G' 和 G'' 的子图集，那么

$$S_1\times S_2=S_1\textcircled{a}S_2。 \tag{5.45}$$

定理 5.22：设 J 是集合 I_{k-1} 的一个子集，而 $\bar{J}$ 是 I_{k-1} 中 J 的互补，那么对于 $k\geq 1$，有[注]

$$T=\bigoplus T'(J\cup\{i_k\})\times T''(\bar{J}\cup\{i_k\}) \tag{5.46 a}$$

$$=\bigoplus T'(\bar{J}\cup\{i_k\})\times T''(J\cup\{i_k\}) \tag{5.46 b}$$

式中 $I_0=S_0$，以及各个环和取遍所有 I_{k-1} 的子集 J。

证明：不失一般性，设 $i_x=x(x=1,2,\cdots,k>1)$。设 C_x、C_x' 和 C_x'' 分别是 G、G' 和 G'' 中节点 x 的关联割集。显然，C_x 是 C_x' 和 C_x'' 的边不相接并。因此，可以写为 $C_x=C_x'\oplus C_x''$。在 Wang 积运算上由归纳推理来证明定理如下：根据式(5.38)、(5.44)和(5.45)有

$$\begin{aligned}
T&=H(C_{k-1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_1)\textcircled{a}T'(I_k)\textcircled{a}T''(I_k)\\
&=H(C_{k-1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_2)\textcircled{a}[H(C_1')\textcircled{a}T'(I_k)\textcircled{a}T''(I_k)\\
&\quad\oplus H(C_1'')\textcircled{a}T'(I_k)\textcircled{a}T''(I_k)]\\
&=H(C_{k-1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_2)\textcircled{a}[T'(I_k-\{1\})\times T''(I_k)\\
&\quad\oplus T'(I_k)\times T''(I_k-\{1\})]\\
&=H(C_{k-1})\textcircled{a}\cdots\textcircled{a}H(C_2)\textcircled{a}[\bigoplus_{J\subseteq I_1}T'(I_k-J)\times T''(I_k-\bar{J})]\\
&=\cdots
\end{aligned}$$

[注] 在不用括号的情况下，运算次序为Wang-积，笛卡尔积以及并。

$$=H(C_{k-1})\textcircled{a}[\bigoplus_{J\in I_{k-2}} T'(I_k-J)\times T''(I_k-\bar{J})]$$

$$=[H(C'_{k-1})\oplus H(C''_{k-1})]\textcircled{a}[\bigoplus_{J\in I_{k-2}} T'(I_k-J)\textcircled{a}T''(I_k-\bar{J})]$$

$$=\bigoplus_{J\in I_{k-2}}[H(C'_{k-1})\textcircled{a}T'(I_k-J)\textcircled{a}T''(I_k-J)\oplus H(C''_{k-1})\textcircled{a}T'(I_k-J)\textcircled{a}T''(I_k-\bar{J})]$$

$$=\bigoplus_{J\in I_{k-2}}[H(C'_{k-1})\textcircled{a}T'(J\cup\{k-1,k\})\textcircled{a}T''(J\cup\{k-1,k\})\oplus H(C''_{k-1})\textcircled{a}T'(J\cup\{k-1,k\})\textcircled{a}T''(J\cup\{k-1,k\})]$$

$$=\bigoplus_{J\in I_{k-2}}[T'(J\cup\{k\})\textcircled{a}T''(J\cup\{k-1,k\})\oplus T'(\bar{J}\cup\{k-1,k\})\textcircled{a}T''(J\cup\{k\})]$$

$$=\bigoplus_{J\in I_{k-1}} T'(\bar{J}\cup\{k\})\times T''(J\cup\{k\})$$

$$=\bigoplus_{J\in I_{k-1}} T'(J\cup\{k\})\times T''(\bar{J}\cup\{k\}),$$

定理证毕。

由于在连通图中对每一个树都有唯一的补树相对应，则以上定理的另一种形式如下。

定理 5.23：设 J 是集合 I_{k-1} 的一个子集，另设 $\bar{J}$ 是 I_{k-1} 中 J 的互补，那么对 $k\geq 1$，有

$$T=\bigcup \bar{T}'(J\cup\{i_k\})\times T''(\bar{J}\cup\{i_k\}) \tag{5.47 a}$$

$$=\bigoplus \bar{T}'(\bar{J}\cup\{i_k\})\times T''(J\cup\{i_k\}), \tag{5.47 b}$$

式中 $I_0=S_0$，以及各个环和取遍所有 I_{k-1} 的子集 J。

推论5.8：对于 $k=2$，有

$$T=T'\times T''(I_2)\cup T'(I_2)\times T'', \tag{5.48 a}$$

$$T=\bar{T}'\times \bar{T}''(I_2)\cup \bar{T}'(I_2)\times \bar{T}''。 \tag{5.48 b}$$

以上推论最初由 PERCIVAL[1953] 给出。特别是，如果设 $G''=e$（G 的一条边），式(5.48 a)简化为 FEUSSNER [1902，1904] 的著名结果，

$$T=T(\bar{e})\cup T(e), \tag{5.49}$$

式中 $T(e)$ 和 $T(\bar{e})$ 分别表示含有边 e 和不含有边 e 的G的树集，它

们分别对应于从G中把边e的两端点等同起来和移去边e所得图的树集。因此，如果对所得的图重复这个过程，最终产生没有重复项的所有G的树 这种方法已由Mc [illegible] [1969]在数字计算机上实现在§7中将表明T(e)可以从T(e)获得而没有重复项。这个结果会在数字计算机上简化执行程序的方法

到目前为止，我们仅讨论把一个图分解为两部分的情况，在下面我们将表明怎样引用以上结果把一个图分解为几个部分的情况。

设 G_{k+1} 是连通G的一个子图，把它从G中移去后就可把G分解为k个部分 G_1，G_2，…，G_k，设V和 V_x 分别是G和 G_x 的节点集 $(x=1, 2, \cdots, k+1)$

定理 5.24：设 $T_x(J_x)(x=1, 2, \cdots, k+1)$ 是 G_x 的多树 $t(J_x)$ 的集合，那么G的树集T由下式给出

$$T=\oplus T_1(J_1)\times T_2(J_2)\times\cdots\times T_{k+1}(J_{k+1}) \tag{5.50}$$

式中 J_u 是 $V_{k+1}\cap V_u(u=1, 2, \cdots, k-1)$ 的非空子集，J_k 是 $V_{k+1}\cap V_k$ 的一个子集，使被任意指定的节点i总是含于 J_k 中，J_{k+1} 是在 $(V_1\cup V_2\cup\cdots\cup V_k)$ 中集合 $(J_1\cup J_2\cup\cdots\cup J_k)-\{i\}$ 的互补，而环和是取遍所有这样可能的子集 J_x。

证明：定理直接根据定理5.22通过设 $G'=G_1\cup G_2\cup\cdots\cup G_k$，$G''=G_{k+1}$ 和 $i=i_k$ 得出。

通过下面的例子来说明以上结论。

例 5.6：设要求由公式(5.46 a)生成图5.9的图G的树集。通过节点1，2和3，图G可以分解为两个子图G′和G″如图5.10所示。按式(5.46 a)有

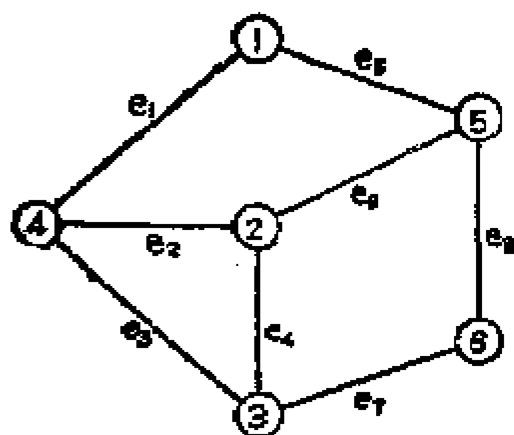
$$T=T'(3)\times T''(1;2;3)\oplus T'(1;3)\times T''(2;3)$$
$$\oplus T'(2;3)\times T''(1;3)\oplus T'(1;2;3)\times T''(3)$$

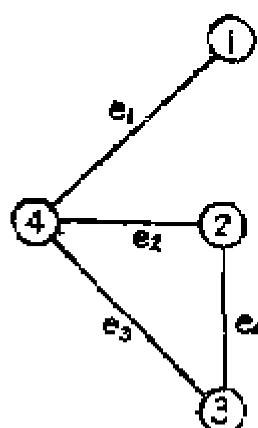
G′和G″所需的树和多一树给出如下：

$T'=T'(3)=\{e_1e_2e_2, e_1e_2e_4, e_1e_3e_4\}$

$T''=T''(3)=\{e_5e_6e_7e_8\}$

$T'(1;3)=\{e_2e_3, e_2e_4, e_3e_4, e_1e_2, e_1e_4\}$





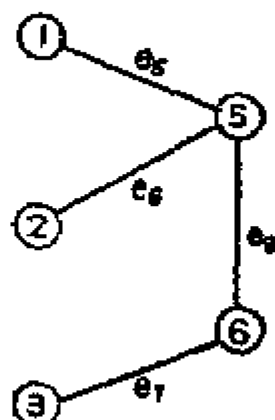


图 5.9 图G　　　　图 5.10 G分解为G′和G″

$T''(1;\ 3)=\{e_5e_6e_7,\ e_5e_6e_8,\ e_6e_7e_8\}$

$T'(2;\ 3)=\{e_1e_2,\ e_1e_3\}$

$T''(2;\ 3)=\{e_5e_6e_7,\ e_5e_6e_8,\ e_5e_7e_8\}$

$T'(1;\ 2;\ 3)=\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$,

$T''(1;\ 2;\ 3)=\{e_5e_8,\ e_6e_8,\ e_7e_8,\ e_5e_7,\ e_6e_7\}$

将它们代入公式，有

$T=\{e_1e_2e_3e_5e_6,\ e_1e_2e_3e_5e_8,\ e_1e_2e_3e_7e_8,\ e_1e_2e_3e_6e_7,\ e_1e_2e_3e_5e_7,$
$e_1e_2e_4e_5e_8,\ e_1e_2e_4e_6e_8,\ e_1e_2e_4e_7e_8,\ e_1e_2e_4e_6e_7,\ e_1e_2e_4e_5e_7,$
$e_1e_3e_4e_5e_8,\ e_1e_3e_4e_6e_8,\ e_1e_3e_4e_7e_8,\ e_1e_3e_4e_6e_7,$
$e_1e_3e_4e_5e_7,\ e_2e_3e_5e_6e_7,\ e_2e_3e_5e_6e_8,\ e_2e_3e_5e_7e_8,$
$e_2e_4e_5e_6e_7,\ e_2e_4e_5e_6e_8,\ e_2e_4e_5e_7e_8,\ e_3e_4e_5e_6e_7,$
$e_3e_4e_5e_6e_8,\ e_3e_4e_5e_7e_8,\ e_1e_2e_5e_7e_8,\ e_1e_4e_5e_6e_7,$
$e_1e_4e_5e_6e_8,\ e_1e_4e_5e_7e_8,\ e_1e_2e_6e_7e_8,\ e_1e_3e_5e_6e_7,$
$e_1e_3e_5e_6e_8,\ e_1e_3e_6e_7e_8,\ e_1e_5e_6e_7e_8,\ e_2e_5e_6e_7e_8,$
$e_3e_5e_6e_7e_8\}$。

在T中有35项，其中每一项是G的一个树。项$e_1e_2e_5e_6e_7$和$e_1e_2e_5e_6e_8$在该过程中均出现两次，因此，不出现于最终的展开式中。

例 5.7. 考虑如图5.11所示的图G，根据定理5.24来生成树

集。设 $G_3=e_6e_7e_8$ 以及 $i=5$，那么 $G_1=e_1$ 以及 $G_2=e_2e_3e_4e_5$，如图5.12所示。并有 $V_1=\{1;\ 2\}$，$V_2=\{3;\ 4;\ 5;\ 6\}$，以及 $V_3=\{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5\}$。按定理5.24有

$$
\begin{aligned}
T &= T_1(1)\times T_2(5)\times T_3(2;\ 3;\ 4;\ 5)\oplus T_1(2)\times T_2(5)\\
&\quad \times T_3(1;\ 3;\ 4;\ 5)\oplus T_1(1)\times T_2(3;\ 5)\times T_3(2;\ 4;\ 5)\\
&\quad \oplus T_1(1)\times T_2(4;\ 5)\times T_3(2;\ 3;\ 5)\oplus T_1(1)\times T_2(3;\ 4;\ 5)\\
&\quad \times T_3(2;\ 5)\oplus T_1(2)\times T_2(3;\ 5)\times T_3(1;\ 4;\ 5)\\
&\quad \oplus T_1(2)\times T_2(4;\ 5)\times T_3(1;\ 3;\ 5)\oplus T_1(2)\times T_2(3;\ 4;\ 5)\\
&\quad \times T_3(1;\ 5)\oplus T_1(1;\ 2)\times T_2(5)\times T_3(3;\ 4;\ 5)\\
&\quad \oplus T_1(1;\ 2)\times T_2(3;\ 5)\times T_3(4;\ 5)\oplus T_1(1;\ 2)\\
&\quad \times T_2(4;\ 5)\times T_3(3;\ 5)\oplus T_1(1;\ 2)\times T_2(3;\ 4;\ 5)\\
&\quad \times T_3(5)\\
&= T_1\times[T_2\times\{T_3(2;\ 3;\ 4;\ 5)\oplus T_3(1;\ 3;\ 4;\ 5)\}\\
&\quad \oplus T_2(3;\ 5)\times\{T_3(2;\ 4;\ 5)\oplus T_3(1;\ 4;\ 5)\}\\
&\quad \oplus T_2(4;\ 5)\times\{T_3(2;\ 3;\ 5)\oplus T_3(1;\ 3;\ 5)\}\\
&\quad \oplus T_2(3;\ 4;\ 5)\times\{T_3(2;\ 5)\oplus T_3(1;\ 5)\}]\oplus T_1(1;\ 2)\\
&\quad \times[T_2\times T_3(3;\ 4;\ 5)\oplus T_2(3;\ 5)\times T_3(4;\ 5)\\
&\quad \oplus T_2(4;\ 5)\times T_3(3;\ 5)\oplus T_2(3;\ 4;\ 5)\times T_3]\\
&= \{e_1\}\times[\{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_5,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_3e_5\}\times(\{e_7e_8\}\oplus\{e_6\})\\
&\quad \oplus\{e_2e_4,\ e_3e_4,\ e_2e_5,\ e_3e_5\}\times(\{e_6e_7,\ e_6e_8\}\oplus S_0)\\
&\quad \oplus\{e_2e_3,\ e_2e_5,\ e_4e_5\}\times(\{e_7e_8\}\oplus\{e_6e_7\})\oplus\{e_4e_5\}\\
&\quad \times(\{e_6e_7e_8\}\oplus S_0)]\oplus\{\phi\}\times[\{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_5,\ e_2e_4e_5,\\
&\qquad e_2e_3e_5\}\times\{e_6e_7,\ e_6e_8\}\oplus\{e_2e_4,\ e_2e_3,\ e_3e_4,\ e_3e_5\}\\
&\quad \times S_0\oplus\{e_2e_4,\ e_2e_5,\ e_4e_5\}\times\{e_6e_7e_8\}\oplus S_0]\\
&= \{e_1\}\times[\{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_5,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_3e_5\}\times\{e_6,\ e_7,\ e_8\}\\
&\quad \cup\{e_2e_4e_6e_8,\ e_3e_4e_6e_8,\ e_2e_5e_6e_8,\ e_3e_5e_6e_8,\ e_3e_4e_6e_7,\\
&\qquad e_3e_5e_6e_7,\ e_4e_5e_6e_7,\ e_2e_4e_7e_8,\ e_2e_5e_7e_8,\ e_4e_5e_7e_8,\\
&\qquad e_4e_6e_7e_8,\ e_5e_6e_7e_8\}]\cup[\{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_5,\ e_2e_4e_5,\ e_2e_3e_5\}\\
&\quad \times\{e_6e_7,\ e_6e_8\}]\cup\{e_2e_4e_6e_7e_8,\ e_2e_5e_6e_7e_8,\ e_4e_5e_6e_7e_8\},
\end{aligned}
$$

式中 T_1、T_2 和 T_3 分别是 G_1、G_2 和 G_3 的树集。在笛卡儿(Cartesian)积的最终展开式中有 35 项，每一项对应于G的一个树。在这过程中，项 $e_1e_2e_4e_6e_7$ 和 $e_1e_2e_5e_6e_7$ 均出现两次，因此，不会出现在以上所给的最后等式中。

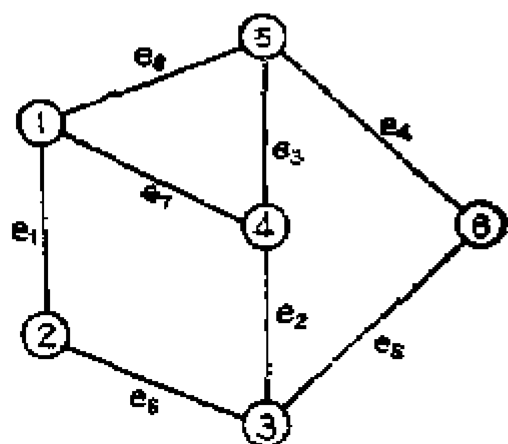


图 5.11 图G

从刚才的例子中，人们立即认识到，对于一个复杂的图来说，消去重复项的过程确实是麻烦的。除了降慢生成树的过程之外，由于在计算机存贮器中必须保存所有树的集合以及用它对照每一个新树，以检验是否出现重复。这种情况限制了能用数字计算机来分析的图的规模，因此在上述方法中得出不产生任何重复项的问题是非常重要的，而且这些结果是非常有用的。在下一节将详细地讨论这个问题。

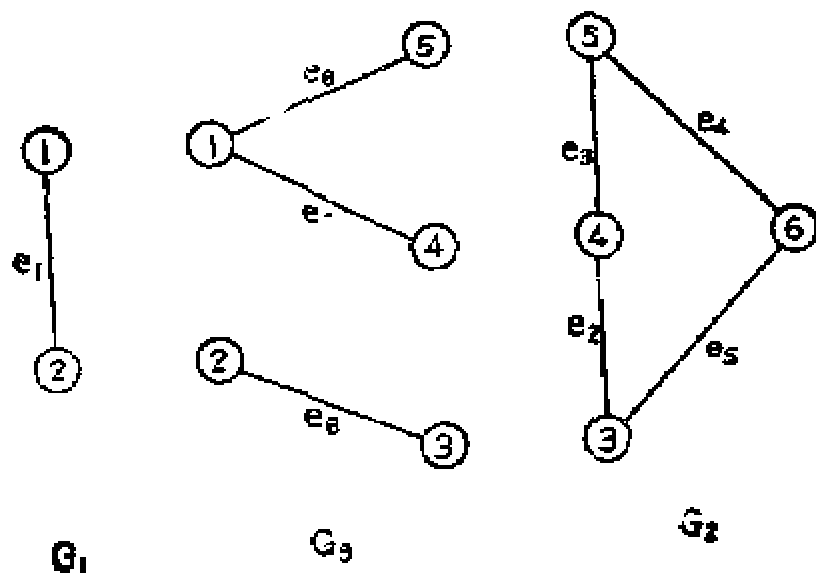


图 5.12 G分块为G，G_3 和 G_2

§ 5. 利用分块法不产生重复项的树生成法

在这一节中我们首先定义一个集合的“基本互补划分”，然后提出一个简单和有效的算法来检测一个划分块的基本性。最后将表明它们怎样应用于定理 5.22 来生成不产生重复项的树。

本节完全以 CHEN[1969 e, f]的研究成果为基础。

5.1 基本互补划分

对于一个给定的集合 V，用 $\alpha(V)$ 表示其元素的数目，用 $V \subset H$ 表示V是集合H的一个子集。除非另有相反说明，H_k 表示由 k 个元素组成的集合。

定义 5.4：划分。

用符号 $P(H_k)$表示的集合 H_k 的划分是 H_k 的非空子集 $V_x(x=1, 2, \cdots, q)$的群，有

$$H_k = V_1 \cup V_2 \cup \cdots \cup V_q \tag{5.51 a}$$

以及对于 $1 \leqslant u < w \leqslant q$ 有

$$V_u \cap V_w = \varnothing \tag{5.51 b}$$

定义 5.5：相异表示式的集合。

H_k 的 q 个相异元素的集合 V 称为划分 $P(H_k)$ 的相异表示式的集合(简写为 SDR)，$\alpha[P(H_k)]=q$，$P(H_k)$中每一个 V_x，对于所有的 x，都有 $\alpha(V \cap V_x)=1$，在 $V \cap V_x$ 中的元素可据以表示集合 V_x。

下面给出 SDR 概念的简要说明，考虑集合 $H_{12}=\{1, 2, \cdots, 12\}$，这个集合的划分由下面给出：

$P'(H_{12})$ {1; 2, 8; 3, 6, 7; 4, 5; 9, 10, 11, 12},

(5.52 a)

$P''(H_{12})$ {5; 6; 7; 8; 9; 4, 10; 3, 11; 1, 2, 12},

(5.52 b)

和前面一样，这里使用分号代替一般逗号，以及用曲括号来分隔子集集合的元素。$P'(H_{12})$和$P''(H_{12})$的SDR分别由下式给出：

$$V' = \{1; 2; 3; 4; 12\} \qquad (5.53\,a)$$

和

$$V'' = \{5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\} \qquad (5.53\,b)$$

显然，对于一给定的划分，可以有不止一个SDR。例如，集合{1; 8; 6; 5; 10}也是$P'(H_{12})$的一个SDR。

定义 5.6：互补划分

用符号$C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$表示的一对划分$P'(H_k)$和$P''(H_k)$称为相对于H_k元素j的互补，只要存在一个$V \subset H_k$（j在V中），并且V和$\overline{V-\{j\}}$分别是$P'(H_k)$和$P''(H_k)$的SDR，此处，$\overline{V-\{j\}}$表示H_k中集合$V-\{j\}$的互补

根据定义，显然，对于给定的H_k，总存在相对于H_k的任何元素的一对互补划分。例如，式(5.52)的H_{12}的一对划分是相对于12的互补，因为在式(5.53)中$V'' = \overline{V'-\{12\}}$。

一般如果$i \neq j$，则$C_i[P'(H_k), P''(H_k)] \neq C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$。但是，对于所有的i来说，$C_i[P'(H_k), P''(H_k)] = C_i[P''(H_k), P'(H_k)]$。因此，为使一对互补划分具有意义，下标i或j必须给定。显然，如果$P'(H_k)$具有q个元素，那么$P''(H_k)$必然具有$k-q+1$个元素，于是有

$$\alpha\{P'(H_k)\} + \alpha\{P''(H_k)\} = k+1。 \qquad (5.54)$$

定义 5.7：基本互补划分。

一对划分$C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$被称为是基本的，只要不存在$C_j[P'(V), P''(V)]$，此处V是H_k的非空真子集，而$P'(V) \subseteq P'$

(H_k)，$P''(V)\subseteq P''(H_k)$。

作为一个例子，考虑集合 $H_{10}=\{1, 2, \cdots, 10\}$，划分：

$$P'(H_{10})=\{1, 2, 3;\ 4, 5;\ 6, 7, 8;\ 9, 10\} \quad (5.55\,a)$$

$$P''(H_{10})=\{1;\ 2;\ 3, 4, 6;\ 5, 7;\ 8;\ 9;\ 10\} \quad (5.55\,b)$$

相对于 10 是互补的，由于存在 H_{10} 的子集 $J=\{3, 5, 6, 10\}$，这样，J 和 $J-\{10\}$ 分别是 $P'(H_{10})$ 和 $P''(H_{10})$ 的 SDR。但是，这一对不是基本的，因为存在一个 H_{10} 的非空真子集 $V=\{9; 10\}$，这样，一对

$$P'(V)=\{9, 10\} \quad 和 \quad P''(V)=\{9;\ 10\}$$

相对于 10 是互补的。

在下一节中，为了考查一对互补划分的基本性，提出了一种简单的算法。但是，在这以前，让我们讨论互补划分的某些基本性质。

定理 5.25：如果 H_k 的一对互补划分相对于 H_k 的一个元素是基本的，则它们相对于 H_k 的任何元素都是基本的。

证明：假设 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是基本的，根据习题 5.76，相对于任何 j 来说，这一对都是互补的。如果 $C_j[P'(H_k), P''(H_k)]$ $(j\neq i)$ 不是基本的，那么存在 $C_j[P'(V), P''(V)]$，此处，V 是 H_k 的最小非空真子集，并有 $P'(V)\subseteq P'(H_k)$ 和 $P''(V)\subset P''(H_k)$。如果 i 是包含于 $P'(V)$ 或 $P''(V)$ 的元素之中，那么存在 $C_i[P'(V), P''(V)]$，由假设，$C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是基本的，这是不可能的。因此在 H_k 中 i 是包含于 V 的互补 $\overline{V}$ 之中。现在让我们考虑 $\overline{V}$ 的一对划分：

$$P'(\overline{V})=P'(H_k)-P'(V) \quad 和 \quad P''(\overline{V})=P''(H_k)-P''(V)。$$

显然，相对于 i 来说，它们是互补的。换言之，存在 $C_i[P'(\overline{V}), P''(\overline{V})]$，此处 $\overline{V}$ 是 H_k 的一个非空真子集。由假设，由于 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是基本的，这又是不可能的。因此，$C_j[(P'(H_k), P''(H_k)]$ 必定是基本的，这就完成了定理的证明。

因此，可以得出结论，在一对基本互补划分 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$

中下标 i 是多余的，于是可以删去。为了简化起见，用 $C[P'(H_k), P''(H_k)]$ 来表示它。

推论 5.9： $C[P'(H_k), P''(H_k)]$ 是基本的，当且仅当 $C[P''(H_k), P'(H_k)]$ 是基本的。

5.2 算法

在这一节中，我们首先定义两种类型的算子 D' 和 D''，然后，在下面所讨论的算法中用来作为工具，来考查一对互补划分的基本性。

在 $C[P'(H_k), P''(H_k)]$ 中，设 V 和 $\overline{V-\{i\}}$ 分别是 $P'(H_k)$ 和 $P''(H_k)$ 的 SDR。如果 R' 和 R'' 分别是 $P'(H_k)$ 和 $P''(H_k)$ 的子集，那么算子 D' 和 D'' 定义如下：

$$D'(R') = \{p'';\ p''\in P''(H_k)，\text{而且存在一 } r'\in R'，\text{使 } p'' \text{ 和 } r'-(r'\cap V) \text{ 的交不是空集}\}, \tag{5.56 a}$$

以及

$$D''(R'') = \{p';\ p'\in P'(H_k)，\text{而且存在一 } r''\in R''，\text{使 } p' \text{ 和 } r''-r''\cap(\overline{V-\{i\}}) \text{ 的交不是空集}\}。 \tag{5.56 b}$$

有时，以上类型的算子可以重复许多次，为了方便起见，设 $D'(R') = D_1(R')$ 以及

$$D_2(R') = D''(D'(R')),$$
$$D_3(R') = D'(D''(D'(R'))) = D'(D_2(R')),$$
$$D_4(R') = D''(D'(D''(D'(R')))) = D''(D_3(R')),$$

等等。类似地，设 $D_1(R'') = D''(R'')$ 以及

$$D_2(R'') = D'(D''(R'')),$$
$$D_3(R'') = D''(D'(D''(R''))) = D''(D_2(R'')),$$
$$D_4(R'') = D'(D''(D'(D''(R'')))) = D'(D_3(R'')),$$

等等。显然，集合 $D_{2x}(R')$ 和 $D_{2x-1}(R'')$ 是 $P'(H_k)$ 的所有子集，而 $D_{2x-1}(R')$ 和 $D_{2x}(R'')$ 是 $P''(H_k)$ 的所有子集，此处 x 是正整数。

作为一个例子，考虑式 (5.52) 的互补划分以及式 (5.53) 中的 SDR。设 $R' = \{9, 10, 11, 12\}$ 和 $R'' = \{1, 2, 12\}$，利用以上所

定义的算子，下面的集合可以很容易得出：

$$D_1(R') = D'(R') = \{9; 4, 10; 3, 11\}$$

$$D_2(R') = D''(D'(R')) = D''(9; 4, 10; 3, 11)$$
$$= \{3, 6, 7; 4, 5\}$$

$$D_3(R') = D'(3, 6, 7; 4, 5) = \{5; 6; 7\} \qquad (5.57)$$

$$D_1(R'') = D''(1, 2, 12) = \{1; 2, 8\}$$

$$D_2(R'') = D'(D''(R'')) = D'(1; 2, 8) = \{8\}$$

注意到，由于子集合的集合元素用分号分隔，而子集的元素用逗号分隔，在圆括号或者曲括号内没有分号表示集合仅由一个元素组成。例如，在 $D''(1, 2, 12)$的括号内，仅有一个元素，即 H_{12}的一个子集，而1，2和12是这一子集的元素。

引理 5.3：给定 $C_1[P'(H_k), P''(H_k)]$，存在一个不是在 $P'(H_k)$中就是在 $P''(H_k)$中的元素p，使 $\alpha(p)=1$。

证明：假设引理不成立，那么，由于 $\alpha(P''(H_k))=k-q+1$，则 $k\geqslant 2q$ 和 $k\geqslant 2(k-q+1)$，此处 $q=\alpha(P'(H_k))$。从而有 $k\geqslant k+1$，这是不可能的。这样引理得到证明。

引理 5.4：给定 $C_1[P'(H_k), P''(H_k)]$，设 p' 和 p'' 分别是 $P'(H_k)$和 $P''(H_k)$的元素，每一个都含有i，那么对所有的整数u和v有

$$D_u(p')\cap D_v(p'')=S_0 \qquad (5.58)$$

证明：首先证明，如果 R_1和 R_2是 $P'(H_k)$或 $P''(H_k)$的两个不相接子集，即 $R_1\cap R_2=S_0$，那么 $D'(R_1)$和 $D'(R_2)$或者 $D''(R_1)$和 $D''(R_2)$也是不相接的。假设在 $P''(H_k)$中存在一个元素p，$D'(R_1)$和 $D'(R_2)$两者都含有它，那么在 R_1和R_2中分别存在 r_1'和 r_2'，使

$$p\cap[r_1'-(r_1'\cap V)]\neq S_0 \qquad (5.59\text{a})$$

和
$$p\cap[r_2'-(r_2'\cap V)]\neq S_0, \qquad (5.59\text{b})$$

式中V是 $P'(H_k)$的一个SDR，从而在p中至少存在两个元素 j_1和 j_2，显然，j_1和 j_2不可能在V中，这样，它们必定在$\overline{V-\{i\}}$中。由于p仅具有一个相异表示式，因此这是不可能的。所以 $D'(R_1)\cap$

$D'(R_1) = S_0$。类似地可以证明 $D''(R_1) \cap D'(R_2) = S_0$。显然，$R_1$ 和 $D''(R_2)$、或者 R_2 和 $D'(R_1)$，或者 R_1 和 $D''(R_2)$，或者 R_2 和 $D'(R_1)$ 的交也是空集。

现在，在 $w = u + v$ 上用归纳法来完成我们的证明。对于 $w = 2$，$D'(p')$ 和 $D''(p'')$ 显然是不相交的，因为如果不是这样，在 $D'(p')$ 和 $D''(p'')$ 二者中就存在一个相同的元素，比如说 p。根据算子 D' 的定义，有 $p \cap p' \neq S_0$。由于 p 也存在于 $D''(p'')$ 中，从而 p 和 p'' 是 $P''(H_k)$ 的不相交元素，即 $r \cap p' = S_0$，这是不可能的。这样 $D'(p')$ 和 $D''(p'')$ 是不相交的。现在我们假定对于任何 $w-1(w>2)$，式(5.58)成立。将证明对于任何 $w = u + v$，它也成立。为了方便起见，设 $D_0(p') = \{p'\}$ 和 $D_0(p'') = \{p''\}$。

在式(5.58)中，如果 u 和 v 是不同奇偶的，即一个是偶的，而另一个是奇的，那么由归纳假设，$D_{u-1}(p')$ 和 $D_{v-1}(p')$ 是 $P'(H_k)$ 或 $P''(H_k)$ 的不相交子集，因此，根据前面的论证，$D_u(p')$ 和 $D_v(p')$ 必定是不相交的。另一方面，如果 u 和 v 是相同奇偶的，并如果在 $D_u(p')$ 和 $D_v(p'')$ 二者中存在同一个元素 p，不失一般性，我们可以假定，$u>v$。由于 p 是在 $D_u(p)$ 中，则在 $D_{u-1}(p')$ 中存在一个 r，使 $r \cap p \neq S_0$。但 r 和 p 两者都在 $P'(H_k)$ 中或者都在 $P''(H_k)$ 中，它们必定是不相交的，这是矛盾的，所以引理得到证明。

在引理 5.4 中，如果设 u_m 和 v_m 分别是在 $D_u(p')$ 和 $D_v(p'')$ 中所得最大可能的整数 u 和 v，这样 $D_{um}(p') \neq S_0$ 和 $D_{vm}(p'') \neq S_0$，那么下面的引理显然成立。

引理 5.5：如果 p 是 $D_{um}(p')$ 或 $D_{vm}(p'')$ 的一个元素，那么 $\alpha(p) = 1$。

$$\text{设} \qquad F' = \{p'\} \cup \bigcup_{x=1}^{w'} D_{2x}(p') \cup \bigcup_{y=1}^{z'} D_{2y-1}(p'') \qquad (5.60\,a)$$

式中 w' 和 z' 分别是不大于 $\frac{1}{2}u_m$ 和 $\frac{1}{2}(V_m+1)$ 的最大整数，以及

$$F'' = \{p''\} \cup \bigcup_{x=1}^{w''} D_{2x-1}(p') \cup \bigcup_{y=1}^{z''} D_{2y}(p'') \qquad (5.60\ \mathrm{b})$$

式中 w'' 和 z'' 分别是不大于$\frac{1}{2}(u_m+1)$和$\frac{1}{2}V_m$的最大整数，于是有以下定理：

定理 5.26：设 p' 和 p'' 分别是 $P'(H_k)$和 $P''(H_k)$的元素，每一个都含有 i，那 $C_i[P'(H_k)、P''(H_k)]$ 是基本的，当且仅当 $F'=P'(H_k)$或者 $F''=P''(H_k)$。

证明：必要性，如果 $F'\neq P'(H_k)$，那么 $P'(H_k)$ F' 是 $P'(H_k)$的非空真子集。设 J' 是 F' 的所有元素的并，并设 J'' 是 $D'(F')\cup\{p''\}$的所有元素的并。如果 $J'\neq J''$，设 J 是在 J'' 中但不在 J' 中的一个正整数。考虑在 $D'(F')\cup\{p''\}$中含有整数 j 的元素 p，由于对某些 x 来说，p 也是在 $D_{2x-1}(p')$中或者在 $D_{2x}(p'')$中，从而 $D_{2x}(p')$和 $D_{2x+1}(p'')$都不能是空集，于是 $D_{2x}(p')$或 $D_{2x+1}(p'')$ 的元素之一必定含有整数 j。由于 $D_{2x}(p')$和 $D_{2x+1}(p'')$也在 F' 中，整数 j 必定是在 J' 中，因此，J' J''。换言之，相对于 i 来说，F' 和 $D'(F')\cup\{p''\}$是 J' 或者 J'' 的一对互补划分，这与假定 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$是基本的相矛盾。所以 F' $P'(H_k)$。类似地，可以证明另一情况。

充分性，设 F' $P'(H_k)$，如果 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$不是基本的，那么存在一个 $C_i[P'(J), P''(J)]$，此处 J 是 H_k 的非空真子集，而 i 是在 J 中。不难看到，$F'\subseteq P'(J)$。因此，F' $P'(H_k)$。由假设，由于 $F'=P'(H_k)$，故 $C_i[P'(H_k), P''(H_k)]$是基本的。类似可以证明另一情况。这就完成定理的证明。

这定理提供一种考查一对互补划分基本性的简单和有效的方法。作为一个例子，考虑式(5.52)和(5.53)一对互补划分以及它们的 SDR。设 p' $\{9, 10, 11, 12\}$和 p'' $\{1, 2, 12\}$，所要求的集合在式(5.57)中给出，根据式(5.60 a)有

F' $\{p'\}\cup D_2(p')\cup D_1(p'')$

$\{9, 10, 11, 12\}\cup\{3, 6, 7; 4, 5\}\cup\{1; 2, 8\}$

$\{1;\ 2,\ 8;\ 3,\ 6,\ 7;\ 4,\ 5;\ 9,\ 10,\ 11,\ 12\} = P'(H_{12})$

因此，根据定理5.26，$C[P'(H_{12}),\ P''(H_{12})]$是基本的，我们也可以利用式(5.60 b)来作考查。

$F'' = \{p''\} \cup D_1(p') \cup D_3(p') \cup D_2(p'')$

$= \{1,\ 2,\ 12\} \cup \{9;\ 4,\ 10;\ 3,\ 11\} \cup \{5;\ 6;\ 7\} \cup \{8\}$

$= \{5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 4,\ 10;\ 3,\ 11;\ 1,\ 2,\ 12\} = P''(H_{12})$

这同样表明$C[P'(H_{12}),\ P''(H_{12})]$是基本的。

作为另一个例子，考虑式(5.55)相对于10来说的一对互补划分，SDR是$\{3;\ 5;\ 6;\ 10\}$和$\{1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10\}$。设$p' = \{9,\ 10\}$和$p'' = \{10\}$，那么有$D_1(p') = \{9\}$，$D_2(p') = S_0$，以及$D_1(p'') = S_0$，从而根据式(5.60)有$F' = \{p'\} = \{9,\ 10\}$和$F'' = \{p''\} \cup D_1(p') = \{9,\ 10\}$，因此根据定理5.26，$C_{10}[P(H_{10}),\ P''(H_{10})]$不是基本的，因为$F' \neq P'(H_{10})$或者$F'' \neq P''(H_{10})$。

5.3 没有重复项的分块

现在应用以上结果于定理5.22，利用分块来生成树，而不出现重复项。但是在进行这工作之前，有必要使式(5.46)处于一种不同的但更方便的形式。

定理 5.27： $T = \bigcirc T'(P'(I_k)) \times T''(P''(I_k))$，　　　　(5.61)

式中环和是取遍所有可能的$C_{ik}[P'(I_k),\ P''(I_k)]$。

证明：在式(5.46)中，对于J的每一个选择，在$\bar{J}$中的节点必定属于$T'(J \cup \{i_k\})$中的多一树$t'(J \cup \{i_k\})$的片，而在J中的节点属于$T''(J \cup \{i_k\})$中的多一树$t''(J \cup \{i_k\})$的片。因此，$t'(J \cup \{i_k\})$和$t''(J \cup \{i_k\})$的片划分I_k中的节点为相对于i_k并以$J \cup \{i_k\}$和$\bar{J} \cup \{i_k\}$为SDR的一对互补划分，换言之，在这些片中I_k的节点形成一个$C_{ik}[P'(I_k),\ P''(I_k)]$，这就意味着对于式(5.46 a)中的每一项，在作环和运算之前，式(5.61)中存在唯一的项，反之，对于每一$C_{ik}[P'(I_k),\ P''(I_k)]$，$P'(I_k)$和$P''(I_k)$的SDR分别可以表示为$\bar{J} \cup \{i_k\}$和$J \cup \{i_k\}$，其中$J \subseteq I_{k-1}$。因此，在作环和运算之前，对于式

(5.61)中的每一项，在式(5.46 a)中相应地存在唯一项。这样定理得到证明。

显然，在式(5.61)的右边所生成的每一项不是一个树就是至少含有一个回路的子图．如果它是具有回路的子图，这样的子图必定出现偶数次，因此，怎样用定理5.22来生成树而不出现重复项的问题简化为找出不会产生具有回路的子图节互补划分的特征。事实上，这类就是在上节中所讨论的I_k的基本互补划分。

定理 5.28：$T=\bigcup T'(P'(I_k))\times T''(P''(I_k))$，　　(5.62)

式中并是取遍所有可能的互补划分$C[P'(I_k), P''(I_k)]$。

证明：由定理5.25足以表明定理，对于所有相对于i_k的基本互补划分：

$$C_k[P'(I_k), P''(I_k)] \tag{5.63}$$

都是有效的。首先证明，如果式(5.63)是基本的，那么在式(5.62)中对应项不会产生任何具有回路的子图．假定不是这样，既使g是在以下集合中至少有一个回路的子图，

$$T'(P'(I_k))\times T''(P''(I_k)) \tag{5.64}$$

设V_c是g中一个回路的节点集，并且设

$$R'=\{x;\ x\text{是在}P'(I_k)\text{中以及}x\cap V_c\neq S_0\} \tag{5.65 a}$$

和

$$R''=\{x;\ x\text{是在}P''(I_k)\text{中以及}x\cap V_c\neq S_0\} \tag{5.65 b}$$

如果p'和p''是$P'(I_k)$和$P''(I_k)$含有整数(节点)i_k的元素，那么对于任何的u，R'或R''中的元素都不可能含于$D_u(p')$或者$D_u(p'')$中。因为如果不是这样，比如对于某些u来说，p_1是R'或R''的一个元素，它也含于$D_u(p')$中，那么$p_1\cap V_c=\{j_1, j_2\cdots\}$，因为在$R'\cup R''$中每个元素至少含有$V_c$中的两个节点．由此得出，在$R'\cup R''$中存在一个$p_2$，有$P_2\cap V_c=\{j_2, j_3, \cdots\}$，显然$p_2$是含于$D_{u+1}(p')$中，如果继续这个过程，由于$V_c$的元素对应于回路的节点，最终包括$R'\cup R''$的所有元素，并且返回到$j_1$，这就意味着，在$D_u(p')$中的$u$可以无限地增加．显然这是不可能的，因为很容易证明，在引理5.5中的$D_{u_m}(p')$和$D_{v_m}(p'')$中整数u_m和v_m必定是有限的，

所以对于任何u，$R'\cup R''$的元素没有一个会含于$D_u(p')$或$D_1(p'')$中。因此，在式(5.60 a)中所确定的集合F'是$P'(I_k)-R'$的非空子集。由定理5.26、这同样是不可能的，所以在式(5.64)中所产生的所有项都是图的树。

其次，必须证明，如果式(5.63)不是基本的、只要式(5.64)不是空集，那么在式(5.64)中所产生的每一个元素都是至少含有一个回路的子图。由于式(5.63)不是基本的，存在$C_{ik}[P'(I),P''(I)]$，其中I是I_k的非空真子集，以及$P'(I)\subseteq P'(I_k)$和$P''(I)\subseteq P''(I_k)$，不难看到，在$P'(I)$和$P''(I)$中有$\alpha(I)+1$个元素。注意到，由于在$P'(I)$和$P''(I)$中并不是所有的元素都一定是不同的，一般有$\alpha[P'(I)\cup P''(I)]<\alpha(I)+1$。考虑一对$M'=P'(I_k)-P'(I)$和$M''=P''(I_k)-P''(I)$。显然，在$M'$和$M''$中有$q-k-\alpha(I)$个元素，这也就是包含于$M'$和$M''$中的式(5.63)不同表示式的数目。为了方便起见，设$j_x(x=1,2,\cdots,q)$是M'和M''中元素J_x的不同表示式，从而得出$I_k-I=\{j_1,j_2\cdots j_q\}$，以及每一个$j_x$恰好在$M'$和$M''$的两个不同元素中出现。由于$j_1$表示$J_1$，即$j_1$是$J_1$的不同表示式，必定有一个集合，比如说$J_2$，它包含$j_1$但不能由$j_1$来表示。因此，$j_1$和$j_2$都在$J_2$中。由于$j_2$表示$J_2$，必定有一集合，比如说$J_3$，它包含$j_2$但不能由$j_2$来表示，因此，$j_2$和$j_3$都在$J_3$中。如果继续这个论据，这个过程会产生一系列的$j_1\ j_2\cdots j$，这样$j_y$和$j_{y+1}$都在$J_{y+1}$中$(y=1,2,\cdots,S-1<q)$。由于$M'$和$M''$中元素数目是有限的，因此对于某个s和z来说，只有当$j_s=j_z(z<s)$，这个过程才可以无限地进行下去。因此，如果式(5.64)不是空集，则式(5.64)中所产生的每个元素是至少含有一个回路的子图；回路含于由$t'(P'(I_k))$和$t''(P''(I_k))$的的路径所形成的边列中，其中$t'(P'(I_k))$和$t''(P''(I_k))$分别是$T'(P'(I_k))$和$T''(P''(I_k))$的元素，每个路径都连接在含于序列$j_2j_2\ _1\cdots j_s$中的两个节点之间

由于两个不同的互补划分对产生式(5.62)中子图的两个不相交集合，从这里就得出定理，完成了定理的证明。

现在，我们已经达到了生成树的原先目的，它是首先分解图为两部分，对每部分确定适当的多一树，然后用某种方法组合这些多一树以得到所要求的树，而不出现重复项。但是，在获得这个目的中所付出的代价，是必须列举所有可能的基本互补划分的集合。这不是很高的代价，因为这些划分是与图的结构无关的，因此它们可以制成表。实际上，并没有必要把它们全部列出来，有一半就足够了，这可以根据推论5.9直接得出。

作为一个例子，考虑 $I_3 = \{i_1; i_2; i_3\}$，下面的互补划分对 $C_3[P'(I_3), P''(I_3)]$ 是基本的，它们的基本性可以由§5.2中所概述的步骤来考查(对于 I_4，参见习题5.75)：

$P'(I_3)$	$P''(I_3)$
$\{i_1; i_2; i_3\}$	$\{i_1; i_2; i_3\}$
$\{i_1; i_2; i_3\}$	$\{i_1; i_2; i_3\}$
[illegible]	$\{i_1; i_2; i_3\}$
[illegible]	$\{i_1; i_3; i_2\}$。

由交换 $P'(I_3)$ 和 $P''(I_3)$ 的内容，得到四个另外的基本互补划分对，唯一不是基本的互补划分对是 $C_3[\{i_1, i_2; i_3\}, \{i_1, i_2; i_3\}]$。

用下面的例子来说明定理5.28。

例 5.8：考虑图5.11的图G，此图沿着节点3，4和5可以分解为两个子图 G' 和 G''，这样的分解如图5.13所示。利用以上列举的基本互补划分，所要求的多一树如下所列：

$T'(3; 4; 5)$ $\{e_1e_6, e_1e_7, e_1e_8, e_6e_7, e_6e_8\}$

$T'(3; 4; 5)$ $\{e_1e_7e_8, e_6e_7e_8\}$

$T'(3; 4; 5)$ $\{e_1e_6e_7\}$

T' $T(3, 4, 5)$ $\{e_1e_6e_7e_8\}$

$T'(3, 5; 4)$ $\{e_1e_6e_8\}$

T' $T''(3, 4, 5)$ $\{e_2e_3e_4, e_2e_3e_5, e_2e_4e_5, e_3e_4e_5\}$

$T''(3, 5; 4)$ $\{e_{\cdot}e\}$

$T''(3, 4; 5)$ $\{e_2e_4, e_2e_5\}$

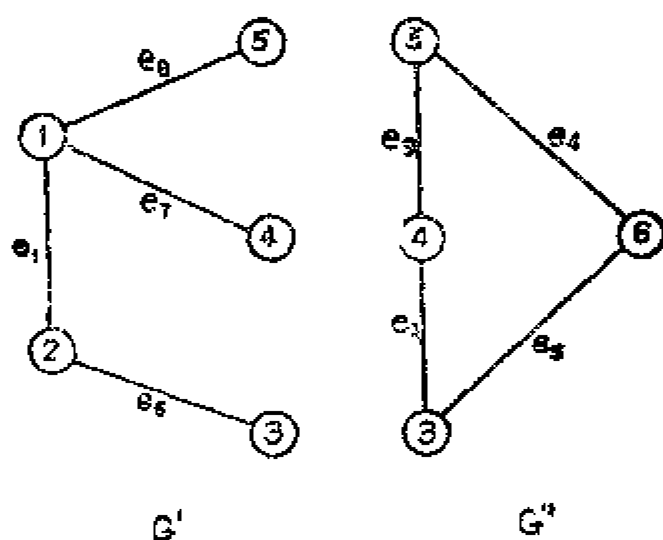


图 5.13 图5.11的图的分解

$$T''(3;\ 4;\ 5)=\{e_4,\ e\ \}$$

$$T''(3;\ 4,\ 5)=\{e_3e_4,\ e_3e_5\}$$

根据定理5.28，G的树集如下给出：

$$\begin{aligned}T\ \ & T'(3;\ 4;\ 5)\times T''\cup T''(3;\ 4;\ 5)\times T'\cup T'(3;\ 4,\ 5)\\ & \times T''(3,\ 5;\ 4)\cup T''(3;\ 4,\ 5)\times T'(3,\ 5;\ 4)\\ & \cup T'(3;\ 4,\ 5)\times T''(3,\ 4;\ 5)\cup T''(3;\ 4,\ 5)\\ & \times T'(3,\ 4;\ 5)\cup T\ (3,\ 4;\ 5)\times T''(3,\ 5;\ 4)\\ & \cup T''(3,\ 4;\ 5)\times T'(3,\ 5;\ 4)\\ =\ & \{e_1e_6,\ e_1e_7,\ e_1e_8,\ e_6e_7,\ e_6e_8\}\times\{e_2e_3e_4,\ e_2e_3e_5,\ e_2e_4e_5,\\ & e_3e_4e_5\}\cup\{e_1e_4e_6e_7e_8,\ e_1e_5e_6e\ e_8\}\cup\{e_4e_5\}\times\{e_1e_7e_8,\\ & e_6e\ e_8,\ e_1e_6e_7\}\cup\{e_1e_3e_4e_6e_8,\ e_1e_3e_5e_6e_8\}\cup\{e_2e_4,\ e_2e_5\}\\ & \times\{e_1e_7e_8,\ e_6e_7e_8,\ e_1e_6e_8\}\cup\{e_1e_3e_4e_6e_7,\ e_1e_3e_5e_6e_7\}\end{aligned}$$

这当然与例5.7中所得到的树集相同。

值得指出，在目前的分析中，G的树集以子图类的笛卡尔乘积的并的形式出现。对网络理论的意图来说，这确实是最理想的形式，并不需要展开笛卡尔乘积，因为我们只对计算树导纳乘积感兴趣。

例 5.9：图5.14中所给的图G通过节点1，2和3可以分解为

两个子图 G′ 和 G″，这样的分块如图 5.15 所示，所要求的多一树如下：

$T'(1;2;3)=\{bc, bf, be, cd, cf, de, df, ef\}$

$T''(1;2;3)=\{hi, hk, hm, ij, ik, jk, jm, km\}$

$T'(1;2,3)=S_0,$

$T''(1;2,3)=\{g\}\times T''(1;2;3)$

$T'(1,2;3)=\{a\}\times T'(1;2;3)$

$T''(1,2;3)=S_0$

$T'(1,3;2)=\{bce, bcd, cde, cdf, bef, bde, bdf, cef\}$

$T'(1,2,3)=T'=\{a\}\times T'(1,3;2)$

$T''(1,2,3)=T''=\{g\}\times T''(1,3;2)$。

根据定理 5.28，G的树集由下给出：

$$\begin{aligned}T=&T'(1;2;3)\times\{g\}\times T''(1;3;2)\cup S_0\cup S_0\cup\{a\}\\&\times T'(1;2;3)\times T''(1,3;2)\cup\{a\}\times T'(1,3;2)\\&\times T''(1;2;3)\cup T'(1,3;2)\times\{g\}\times T''(1;2;3)\cup\{a\}\\&\times T'\{1;2;3\}\times\{g\}\times T''\{1;2;3\}\cup S_0\\=&\{bc, bf, be, cd, cf, de, df, ef\}\times\{ghim, ghij,\\&ghim, gijm, aijm, ghkm, ghjm, gikm, gijk, ahim,\\&ahij, ahjm, ahkm, ahjk, aikm, aijk, aghi, aghk,\\&aghm, agij, agik, agjk, agjm, agkm\}\cup\{hi, hk,\\&hm, ij, ik, jk, jm, km\}\times\{bce, bcd, cde, cdf,\\&bef, bde, bdf, cef\}\times\{a, g\}\end{aligned}$$

在笛卡尔积的展开式中有 320 项，其中每一项对应于G的一个树，同样，从网络理论的意图来看，不需要展开笛卡尔积。

因此可以得出结论，从计算机分析大型网络的实用观点来看，当所考虑的拓扑方法处于最佳状态时，定理 5.28 中给出的公式是非常有用的。分块的优点是明显的。不仅是树的数量明显减少，而且对于每个计算来说，它们是"较小"的树，对每一树的计算操作较少。在许多应用中，不是真正涉及树集，而是树支导纳乘积之和，

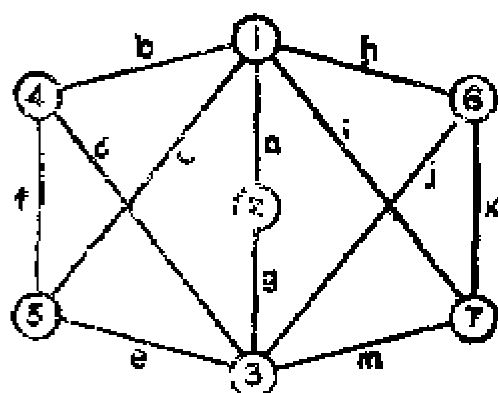
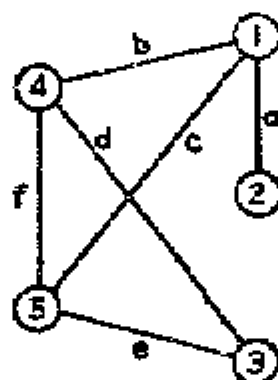


图 5.14 图G



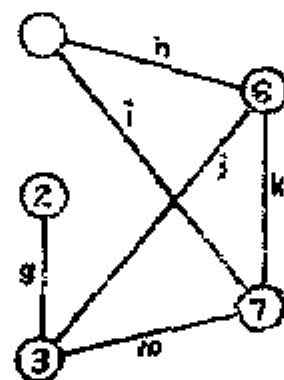


图 5.15 图G的分块

这使得这一方法更有意义，作为一个说明来看，在例5.9中，T中所得的项数在展开以前是50项。如果不用分块技术，则T的项数将达320项。此外，在T的每一项中所含符号的最大数是4，而320项的每一项含有6个符号。当研究中的图具有高的秩和零度时，这当然是很有特别重要意义的。最后提一下，以式（5.62）为基础，CHEN[1969 f]导出了对于多端网络级联的生成公式。

§6. 矩阵表示法

由于图或有向图的树（补树）与基本割集（回路）矩阵的大子阵处于一一对应关系，生成树的问题归结于计算所有大子阵的问题，（参见第二章§1.2和§1.3，第五章§1以及定义2.4）。在这一节中首先提出不产生重复项的矩阵的所有大子阵的计算，然后应用这个结果来生成树、补树、有向树和有向2-树，本节是以MAYEDA等[1968]和CHEN[1968 b]的研究成果为基础的。

6.1 计算任一矩阵的大子阵

设F是阶为$p\times q$和秩为p的任一矩阵，象在第二章§4.2中所用的那些一样，$F(I_u, J_v)$表示分别由对应于含有$I_u=\{i_1,i_2,\cdots,i_u\}$和$J_v=\{j_1,j_2,\cdots,j_v\}$中整数的行和列所组成的F的子阵，此外，

用 $F(J_p)$ 表示 $F(J_p)=F(I_p, J_p)$，而且 $\bar{I}_u$ 表示$\{1, 2, \cdots, b\}$中 I_u 的互补。

定义 5.8. 真式矩阵。

一个含有对角大子阵的阶为 $p\times b$ 的任一矩阵被称为真式矩阵。定义对角大子阵用 $F(K_p)$ 来表示，其中 $K_p=\{k_1, k_2 \cdots k_p\}$。如果 $F(K_p)$ 是个单位矩阵，那么 F 被称为是范式的。

在下面的讨论中，假定所有给出的矩阵都是真式的，假设并不是严格的限制，因为很容易表明，对每一个矩阵 F 都有一个真式矩阵与之相对应，这完全可以由 F 利用下面的行运算而得到：

(1) 对矩阵的一个行加上乘以某一乘数的另一行；

(2) 对各行重新排列

由于这样得到的矩阵产生线性行矢量空间与 F 所产生的相同，则它们具有同样的大子阵集(包含同样的列)，其对应的行列式至多相差一个符号。此外，这些行列式的相对符号仍保持不变。

为了方便起见，假定 F 的列用整数 1, 2, $\cdots$b 来标记，而 F 的行是用这样的方法来标记，即 F 的第 i 行用 K_i ($i=1, 2, \cdots, p$)来标记，此处 K_i 是处于 K_p 中。例如，所定义的对角大子阵 $F(K_3)$ 由列 5, 6 和 7 组成，那么 F 的行由 5, 6 和 7 来标记。这一节以及下面两节中，矩阵这名词指的是按照刚才所概述的规则来标记的矩阵。此外，假定在括弧中所有的整数以自然序列出现。

如果 $I_u\subset K_p$，则 K_pJ_u/I_u 指的是集合 $(K_p-I_u)\cup J_u$。如果 $K_3=\{1, 5, 6\}$，$J_2=\{2, 8\}$，以及 $I_2=\{1, 6\}$，那么 $K_3J_2/I_2=\{2, 5, 8\}$。由此可见，当且仅当 $F(I_u, J_u)$ 是 $F(K_p)$ 的非奇异子矩阵时，$F(K_pJ_u/I_u)(1\leq u\leq p)$ 是 F 的一个不同于 $F(K_p)$ 的大子阵。因此，下面的定理是成立的。(习题 5.33)

定理 5.29：设 F 是阶为 $p\times b$ 和秩为 p 的真式矩阵，那么 F 的所有大子阵的集合 M 由下式给出：

$$M=\bigcup_{q=0}^{r}\bigcup_{I_q}\bigcup_{J_q}\{F(K_pJ_q,I_q)\} \tag{5.66}$$

式中 r 是 $F(\overline{K_p})$ 的秩．$F(I_q, J_q)$ 是 $F(\overline{K_p})$ 的非奇异子矩阵，以及由定义，$F(K_pJ_qI_q)=F(K_p)$。

求 F 的所有大子阵的问题，现在转化为在 $F(K_p)$ 中求阶为 1，2，…，和 r 的所有非奇异子阵的问题．阶为 1 的非奇异子阵非常容易求得，它们就是 $F(K_p)$ 中的非零元素，对于阶大于 1 的非奇异子阵，以上所概述的整个过程可以重复进行．例如，考虑子矩阵 $F(I_q, J_{b-p})(2\leq q\leq r)$，此处，$K_p$ 和 J_{b-p} 是整数 1，2，…b 的互补标记的集合，这个矩阵首先表示为真式、然后根据定理 5.29、可以得到这个矩阵的所有大子阵．如果将 $F(K_p)$ 的所有以上类型的子矩阵都考虑进去，则所有这些大子阵的全体是在 $F(\overline{K_p})$ 中阶为 q 的所有非奇异子矩阵的集合．注意到，在以上步骤的每一步中，相同的方法可以再次重复使用，直到所有的非奇异子矩阵都能通过观察得出，或者其阶为 1．由于计算方法的迭代性质，算法可以很容易为数字计算机编制程序。

为了简化符号，在下面省去分隔集合中元素的所有逗号及其曲括号，并使用分号分隔不同集合的元素。

例 5.10：求下列矩阵的大子阵集：

$$F=\begin{array}{c} \\ 2 \\ 5 \\ 7 \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc}1&2&3&4&5&6&7\end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccccc}1&1&2&3&0&0&0\\1&0&3&0&8&2&0\\0&0&0&6&0&5&9\end{array}\right]\end{array}$$

式内 r＝3，以及 $F(K_3)=F(257)$．设 $W_i(i=1, 2, 3)$ 是 $F(\overline{K_3})=F(1346)$ 中阶为 i 的非奇异子矩阵，那么

$W_1=\{F(2;1), F(2;3), F(2;4), F(5;1), F(5;3), F(5;6), F(7;4), F(7;6)\}$

$W_2 = \{F(25;\ 13),\ F(25;\ 14),\ F(25;\ 16),\ F(25;\ 34),$
$F(25;\ 36),\ F(25;\ 46),\ F(57;\ 14),\ F(57;\ 16),$
$F(57;\ 34),\ F(57;\ 36),\ F(57;\ 46),\ F(27;\ 14),$
$F(27;\ 16),\ F(27;\ 34),\ F(27;\ 36),\ F(27;\ 46)\}$

$W_3 = \{F(257;\ 346),\ F(257;\ 146),\ F(257;\ 134),$
$F(257;\ 136)\}$

式中 W_3 是把矩阵 $F(1346)$ 认为给定矩阵，然后再次重复整个过程而得到的．对应于集合 W_i 的 F 大子阵集合 M_i 是由式(5.63)而得到的，并由下式给出：

$M_1 = \{F(257\,1/2) = F(157),\ F(357),\ F(457),\ F(127),$
$F(237),\ F(267),\ F(245),\ F(256)\}$

$M_2 = \{F(257\,13/25) = F(137),\ F(147),\ F(167),\ F(347),$
$F(367),\ F(467),\ F(124),\ F(126),\ F(234),$
$F(236),\ F(246),\ F(135),\ F(156),\ F(345),$
$F(356),\ F(456)\}$

$M_3 = \{F(257\,346/257) = F(346),\ F(146),\ F(134),\ F(136)\}$

于是F的所有可能不同的大子阵集合M通过取集合 M_i $(i=0,\ 1,\ 2,\ 3)$的并集得出，此处 $M_0 = \{F(257)\}$。

6.2 树和补树

应用定理 5.29 来生成图的树和补树而没有重复项的方法是简单明了的，在考虑特殊结论之前，首先让我们讨论一般问题。假定 F 是关于整数模 2 域的矩阵，是图G的一个基本割集矩阵（回路矩阵)。对于G的边任意给定方向，把它作为有向图 G_d 看待。并对应于 F 中的同一割集（回路），构作 G_d 的基本割集矩阵（回路矩阵）F_d，并保持同样的列序次。正如在第二章§1 和第五章§1 中所讨论的那样，由于 F 和 F_d 的大子阵与G的树(补树)相对应，因此用那一个矩阵来生成树集都无关紧要，唯一要记住的要点是，如果使用 F，则所有的运算在整数模 2 域内进行，如果使用 F_d，则运算在

实域内进行，因此，无需特别说明所取的运算在那一种域内。

推论 5.10：如果Q是连通图G用真式表示的基本割集矩阵，那么G的树集由下式给出：

$$T=\bigcup_{q=0}^{r}T^{(q)} \tag{5.67 a}$$

式中 $T^{(q)}=\{t: t=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_r}$ 和 $(x_1, x_2, \cdots x_r)\in K_r(J_q, I_q)\}$
(5.67 b)

$Q(I_q, J_q)$是$Q(K_r)$的一个非奇异子矩阵，t_0是对应于$Q(K_r)$的列的树，而$T^{(0)}=\{t_0\}$

推论 5.11：如果B是连通图G用真式表示的基本回路矩阵，那么G的补树集由下式给出

$$\bar{T}=\bigcup_{q=0}^{m}\bar{T}^{(q)} \tag{5.68 a}$$

式中$\bar{T}^{(q)}=\{\bar{t}: \bar{t}=e_{x_1}e_{x_2}\cdots e_{x_m}$ 和$(x_1, x_2, \cdots x_m)\in \bar{K}_m(J_q, I_q)\}$
(5.68 b)

$B(I_q, J_q)$是$B(\bar{K}_m)$的一个非奇异子矩阵，$\bar{t}_0$是对应于$B(\bar{K}_m)$的列的补树，而$\bar{T}^{(0)}=\{\bar{t}_0\}$。

用计算机生成树的主要困难之一是要求大量存储单元，以上所提出的矩阵方法仿对问题提供了一种有效的方法；它是矩阵的子阵的规范化运算的大量重复。由于矩阵Q和B的特殊性质，可以很容易得到它们的规范化运算。一个简单的方法如下：假定要求在整数模2域内对使矩阵F规范化。首先把F中其第一列元素是1的某一行移置第一行，然后对第一列中所有其它元素1(如果它们存在的话)，通过简单的行加法(模2)消去，设所产生的矩阵为F_1，在F_1中将第二列元素为1的任一行(除开第一行)移置第二行，然后把第二列中所有其它的元素1(如果它们存在的话)，通过简单的行加法消去。继续这个过程，最终得到一个对角大子阵，或者可能继续不下去。如果后一种情况发生，只需不考虑这一列，而转到下一列，如

果最终得不到一个对角大子阵，那就是F根本不存在大子阵，当然这一方法对在实域上具有元为1，－1和0的矩阵F_d同样适用。

例 5.11：假定要求生成如图5.16所示图G的树集，G的基本割集矩阵由下式给出：

$$
Q=\begin{matrix} \\ 1 \\ 4 \\ 7 \end{matrix}\begin{matrix} 1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7 \\ \left[\begin{matrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{matrix}\right] \end{matrix}
$$

式中 $r=3$，以及 $Q(K_3)=Q(147)$，在 $Q(2356)$ 中，阶为 i 的非奇异子矩阵的集合 $W_i(i=1, 2, 3)$由下式给出：

$W_1=\{Q(1;2), Q(1;3), Q(1;5), Q(1;6), Q(4;2), Q(4;5), Q(4;6), Q(7;3), Q(7;5), Q(7;6)\}$

$W_2=\{Q(14;23), Q(14;35), Q(14;36), Q(47;23), Q(47;25), Q(47;26), Q(47;35), Q(47;36), Q(17;25), Q(17;26), Q(17;23)\}$

$W_3=\{Q(147;235), Q(147;236)\}$

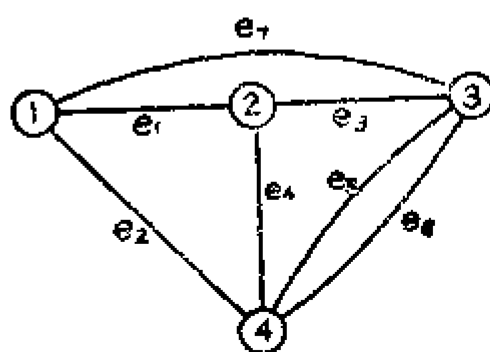


图 5.16 用矩阵方法说明生成树方法的图

对应于集合 W_i 的树集 T^i 可以根据式(5.67 b)得到，由下式给出：

$T^{(1)}=\{e_2e_4e_7, e_3e_4e_7, e_4e_5e_7, e_4e_6e_7, e_1e_2e_7, e_1e_5e_7, e_1e_6e_7, e_1e_3e_4, e_1e_4e_5, e_1e_4e_6\}$

$T^{(2)}=\{e_2e_3e_7, e_3e_5e_7, e_3e_6e_7, e_1e_2e_3, e_1e_2e_5, e_1e_2e_6, e_1e_3e_5, e_1e_3e_6, e_2e_4e_5, e_2e_4e_6, e_2e_3e_4\}$

$T^{(3)} = \{e_2e_3e_4,\ e_2e_3e_5\}$

于是，树集通过取集合 $T^{(i)}$ $(i=0, 1, 2, 3)$的并集得出，其 $T^{(0)}=\{e_1e_4e_7\}$。

6.3　有向树和有向 2 树

现在来讨论应用该方法来生成有向图 G_d 的有向树和有向 2-树。如果 A 是 G_d 的基本关联矩阵，则 A^+ 指的是从 A 中通过用 0 替换元 −1 所得的矩阵。由于在形成 A 中，已从 G_d 的完全关联矩阵中删去一行，不失一般性，设这一删去的行为 n，而问题就成为生成 G_d 的所有有向树 t_n。

引理 5.6：$A^+(I_r)$是 A^+ 的一个大子阵，当且仅当对应于 $A^+(I_r)$的列的边构成一个子图，除了节点 n 的出度为 0 以外，其它每个节点的出度均为 1。

由于 G_d 的树与 A 的大子阵处于一一对应关系，从而根据引理 5.6，有以下定理：

定理 5.30：$A(I_r)$ 和 $A^+(I_r)$都是非奇异的，当且仅当在 G_d 中对应于 $A(I_r)$的列的边构成一个有向树 t_n。

因此，问题简化为如何有效地求取所有 A 和 A^+ 的对应大子阵的问题。稍为改进一下前面所讨论的方法就可以达到目的。为了方便起见，假定 A 和 A^+ 都处于真式，它们的定义对角大子阵 $A(K_r)$和 $A^+(K_r)$由相同列所组成，（如果有必要，可以调换一下行的序次），那么，在 $A(K_r)$ 和 $A^+(K_r)$中相对应的子阵 $A(I_q, J_q)$和 $A^+(I_q, J_q)$各为非奇异的，当且仅当除 A 和 A^+ 中的 $A(K_r)$ 和 $A^+(K_r)$外，$A(K_rJ_q \cdot I_q)$ 和 $A^+(K_rJ_q \cdot I_q)$ 各为在 A 和 A^+ 中相对应的大子阵。阶为 1 的对应非奇异子阵 $A(I_q, J_q)$和 $A^+(I_q, J_q)$ 是非常容易求得的，它们分别是在 $A(\bar{R}_r)$ 和 $A^+(\bar{R}_r)$ 中对应的非零元素。对于阶大于 1 的对应非奇异子阵来说，整个过程可以重复进行。因此，这相当于再次重复地将对应的矩阵变换为真式。

另一方面，对于一个给定的有向图 G_d，可以认为它是如式

(4.21)所示类型等代数余子式矩阵 Y 的伴随有向图。G_d 的边标识符号看成为与边相关联的权，根据第二章§3.3中所论述的内容，不难看到，Y 的(n, n)一元的余子式其实是节点 n 选为参考点的节点导纳矩阵 Y_n。对于给定网络，节点导纳矩阵 Y_n 很容易从关系式 $Y_n = AY_bA'$ 计算得出，这里 A 是以 n 为参考点的网络基本关联矩阵，而 Y_b 是支路导纳矩阵。但是如果给定 Y_n，支路导纳矩阵 Y_b 通常难于求得，因为它一般不是对称的。在下面将表明 Y_n 怎样以另一种方便形式来进行分解。

定理 5.31：设 Y 是与以 G_d 为伴随有向图的式(4.21)类型的等代数余子式矩阵，那么 Y 的(n, n)一元的余子式 Y_{nn} 可以分解为

$$Y_{nn} = \det A^+DA' \tag{5.69}$$

式中 A 是以节点 n 为参考节点的 G_d 的基本关联矩阵。而 D 是一 b×b 对角矩阵，其 ii 元是相对于 A 的第 i 列的边的边标识符。

定理的证明是简单明了的，留作练习(习题5.38)。对于有关的论述内容参见 Chen[1972 d]。

引理 5.7：A^+ 的所有非奇异子矩阵具有行列式值为 1 或 -1。

于是，如果对式(5.69)中的三矩阵乘积 A^+DA' 应用毕内-柯西定理，并利用 D 是对角阵这一事实，可以得出结论：在 Y_{nn} 的最终展开式中，正项与 A^+ 和 A 的对应大子阵处于一一对应关系。根据定理 4.3 也知道，这些正项对应于 G_d 的有向树，因此，前面所论述的方法也适用于生成有向树。

为了方便起见，设 A_{-i} 是从 A 中通过删去行 i 而得到的矩阵，那么根据定理 5.31，有如下推论：

推论 5.12：Y 元素的二阶余子式 $Y_{ij,nn}$ 可以表示为

$$Y_{ij,nn} = (-1)^{i+j} \det A^+_{-i} D(A_{-j})' \tag{5.70}$$

因此，根据定理 4.4 以及式(5.70)，可以得出结论：G_d 的有向 2-树 $t_{ij,n}$ 与 A^+_{-i} 和 A_{-j} 对应的大子阵处于一一对应关系。换言之，可以应用以上方法来生成有向 2-树。

由于G_d的2树$t_{i,j,n}$与A，和A的对应大子阵处于一一对应关系。因此以上方法也可以用于它们的计算。

例 5.12：在图5.17中，假定要求生成有向图G_d的有向树t_4的集合。以节点4为参考节点的基本关联矩阵A由下式给出：

$$
\mathbf{A}=\begin{matrix} \\ 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ \end{matrix}
\begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}
$$

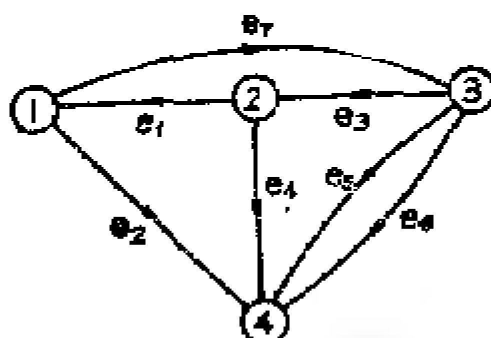


图 5.17 通过矩阵方法用来说明生成有向树和有向2树的有向图

上式已处于$A(K_3)=A(245)$的范式之中，那么有

$$
\mathbf{A}^{+}=\begin{matrix} 2 \\ 4 \\ 5 \end{matrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

这里$A^+(K_3)=A^+(245)$，$A(1367)$和$A^+(1367)$相对应的i阶非奇异子阵集合$W_i(i=1, 2, 3)$由下式给出：

$W_1=\{A(2;\ 7),\ A(4;\ 1),\ A(5;\ 3),\ A(5;\ 6)\}$

$W_2=\{A(24;\ 17),\ A(25;\ 37),\ A(25;\ 67),\ A(45;\ 13),$
$A(45;\ 16)\}$

$W_3=\{A(245;\ 167)\}$

对应于集合W_i的A和A^+的对应大子阵集合M_i由下给出：

$M_1=\{A(245\ 7/2)=A(157),\ A(125),\ A(234),\ A(246)\}$

$M_2=\{A(245\ 17/24)=A(157),\ A(347),\ A(467),$

$A(123)$, $A(126)\}$

$M_3 = \{A(167)\}$

因此，G_d 有向树 t_4 的集合可以很容易地根据 $M_i(i=0, 1, 2, 3)$ 得出，这里 $M_0 = \{A(245)\}$

$T_4 = \{e_1e_5e\ ,\ e_1e_2e_5,\ e_2e_3e_4,\ e_2e\ e\ ,\ e\ e\ e\ ,\ e_3e\ e\ ,\ e_4e\ e\ ,$
$e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_6,\ e\ e\ e\ ,\ e_2e\ e_5\}$

同样，如果需要求 G_d 的有向 2-树 $t_{13,4}$，利用以下矩阵

$$A^+_1 = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \end{array}\begin{array}{c} \begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

和

$$A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

由于 A_3 不是对应于 1 和 3 列的真式，令 Z 为 A_3 的真式，$Z(K_2) = Z(13)$：

$$Z = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

由于在 $A^+_1(24567)$ 和 $Z(24567)$ 中不存在对应的非奇异子阵，所以在 G_d 中仅有一个有向 2-树 $t_{13,4} = e_1e_3$。

最后提一下，根据这种方法生成树、2-树，有向树和有向 2-树已写出计算机程序，它是用 FORTRAN IV 语言写出的，适用于 IBM 系统 360 型 44 数字计算机，程序的详细内容可以在 CHEN 和 Li[1973]中找到。

§ 7. 初等变换

在这一节中，将表明图的树可以通过一系列初等树变换而生成。这种概念最初是由 WHITNEY[1953]提出的，从那时起有很多其它学者作了进一步的开拓。(例如，参见 WATANABE[1960]、

MAYEDA 和 SESHU[1965]。

定义 5.9：距离。

设 g_1 和 g_2 是图的两个含有相同边数的子图，g_1 和 g_2 之间的距离是在一个子图中而不在另一个子图中的边数

特别是，g_1 和 g_2 可以是树、补树、2 树或 2 补树。例如在图 5.14 中，考虑树 t' = beghim、t'' = bfghij、t^* = abcekm，那么 t' 和 t'' 间的距离是 2，而 t'' 和 t^* 间的距离是 5。利用这个定义，显然，式(5.67 b)和(5.68 b)的集合 T^1 和 T^1 分别是和参考树 t_0 以及参考补树 t_r 间的距离为 σ 的树集和补树集

定义 5.10、初等树变换

设 t 是图G的一个树，以及 e_1 是在G中而不是在 t 中的一条边，如果 t^* 是G的一个树，而 e_2 是 t 的一条边，那么以下运算

$$e_1 \cup t - e_2 = t^* \quad (5.71)$$

称为初等树变换。

下面的结果最初是由 WHITNEY 给出的，可以表述为定理。

定理 5.32： 设 t 是连通图G的一个树，则从 t 中通过有限序次的初等树变换可以得到G的所有树。

证明：设 t' 是G的一个树，如果 $t' \neq t$，则存在一条支路 e_1，e_1 在 t 中而不在 t' 中。由于并非 $t' \cup e_1$ 的唯一回路的所有边都会在 t 中，因此，存在一条支路 e_2、e_2 在 t' 中而不在 t 中。考虑树 t^* = $t' \cup e_1 - e_2$，显然 t^* 比 t' 更接近于 t 因此，如果 $t^* \neq t$，过程可以重复进行。由于 t 是有限的，所以通过有限序次的初等树变换，最终可以得出 t，这样定理证毕

显然，对于补树、2 树和有向树，都可以得到类似的结论。细节留作为练习(习题 5.40、5.41 和 4.31)

设 t_0 = $e_1e_2\cdots e_r$ 是G的参考树，并设下式

$$E_q = e_{i1}e_{i2}\cdots e_{iq} \quad (5.72)$$

是 t_0 的一个子图，$\bar{E}_q$ 指的是在 t_0 中 E_q 的互补，符号 $t(E_q)$ 表示G的一个树，并满足下式.

$$t(E_q)\cap t_0=\bar{E}_q, \tag{5.73}$$

式中 $q=0, 1, \cdots, r$ 以及 $E_0=\phi$。用 $T(E_q)$ 表示G的树 $t(E_q)$ 的集合。显然，$t(E_q)$ 是和 t_0 的距离为 $r-q$ 的一个树，而 $T(E_q)$ 是G中和 t_0 的距离为 $r-q$ 的树集. 由于下式成立，

$$T(E_q)\cap T(E_q')=S_\phi \tag{5.74}$$

则当且仅当 $E_q\neq E_q'$，G的树集T可以表述为下式，

$$T=\bigcup_{q=0}^{r}\bigcup_{I_q}T(E_q) \tag{5.75}$$

这里 E_q 和 E_q' 是 t_0 的两个子图，式中 $i_1<i_2<\cdots<i_q$，而第二个并取遍$\{1, 2, \cdots, r\}$的所有子集 $I_q=\{i_1, i_2, \cdots, i_q\}$。

利用式(5.71)中所定义的初等树变换，不难看到，和 t_0 距离为 $r-k$ 的树集 $T(E_k)$ 可以从和 t_0 距离为 $r-k-1$ 的树集 $T(E_{k+1})$ 中得出（$k=0, 1, \cdots, r-1$）。但是这种方法的主要缺乏是可能会产生重复项，虽然它们是在 $T(E_k)$ 类之内产生的，下面将讨论怎样避免重复项。这种方法首先是由 MAYEDA 和 SESHU[1965]提出的，下面根据CHEN[1969 d]的研究成果，提供一简单证明以及阐明这些结论。

对于给定的图G，令 $Q_t(e)$ 为G中由树 t 的支路 e 所定义的相对于 t 的 f-割集，并令 Q_{i_1} 为G中节点 i_1 的关联割集，正如在第四章§4 中和在式(5.49)中所论述的那样，如果挑出G的一条边 e，则树可以分为 $T(e)$ 及 $T(\bar{e})$ 两类，$T(e)$ 含有边 e，而 $T(\bar{e})$ 不含有边 e。在第四章§5.3 中，曾用符号 $G(g_1; g_2)$ 来表示从G中通过首先短接 g_1 中的所有边，然后移去 g_2 中的所有边得到的图，这里 g_1 和 g_2 是G的边不相接子图。那么，$T(e)$的元素与 $G(\phi; e)$ 中的树处于一一对应关系，而 $T(e)$是 $G(\phi; e)$ 中的树集。对于$G(e; \phi)$ 和 $(\phi; e)$，如果重复这个过程，最终将生成G的全部树而不出现

重复项。在下面，将首先表明，T(e)确实可以从T(e)中得出，而没有重复项，然后利用这个结果来导出Mayeda Seshu算法。

定理 5.33. 如果 e 是与G的节点 i_1 相关联的一条边，那么下式成立：

$$T(e) = \{t; t = (t' \oplus e) \cup e_x,\ t' \text{在} T(e) \text{中},\ e_x \text{在} Q_{i_1}(e) \cap Q_{t_0} \text{中，以及} e_x \neq e\} \tag{5.76}$$

证明：证明由两部分组成：首先，可以用这种方法生成T(e)的每一个树，其次，用这种方法生成的每一项是T(e)中的一个树，不会有重复项产生

假定在T(e)中存在一个不能用这种方法生成的树t，考虑子图t∪e，它必定含有一个唯一的回路L，那么，通过$(t\cup e)\oplus e'=t'$的运算将生成一个树，它是T(e)中的一个元素，这里$e'\neq e$是L的一条边，它与节点i_1相关联。由于e'也在$Q_{i_1}(e)\cap Q_{t_0}$中，这意味着t可以从t'通过以上方法得到，这是矛盾的。因此，T(e)的全部树可以用这种方法来生成。

显然，用以上方法生成的每一项都是T(e)中的树，但是，我们必须表明不会有重复项产生。假定t是T(e)中用以方法生成但出现不止一次的一个树，那么，在t中至少存在两个不同的边e_1和e_2，都以节点i_1作为它们的一个端点。并有$(t\cup e)\oplus e_1$和$(t\cup e)\oplus e_2$是T(e)的两个不同元素，这就意味着e_1和e_2都含于t∪e的唯一回路中，这显然是不可能的，因此，定理证毕。

由于树$t_0=e_1e_2\cdots e_r$是没有回路的连通子图，从而t_0的支路总是可以用下面的方法来标记，使t_0的每个子图$e_1e_2\cdots e_x(x=1, 2, \cdots, r)$都是连通的(习题5.3)。

定理 5.34. 如果参考树$t_0=e_1e_2\cdots e_r$的支路标记，使每个子图$e_1e_2\cdots e_x(x=1, 2, \cdots r)$都是连通的，并设$E_q=e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}(i_1<i_2<\cdots<i_q)$是$t_0$的子图，则下式成立：

$$T(E_q)=\{t; t=(t'\oplus e_{i_q})\cup e',\ t' \text{在} T(E_{q-1}) \text{中}, e' \text{在} Q_{i'}(e_{i_q})\cap Q_{t_0}(e_{i_q}) \text{中，以及} e'\neq e_{i_q}\} \tag{5.77}$$

以及 $$T(E_q)\cap T(E_p)=S_0 \tag{5.78}$$

当且仅当 E_q 和 E_p' 是 t_0 的两个不同的子图，这里 $p, q=1, 2, \cdots r$。

证明：不失一般性，假设G的每一边是一回路边，因为如果不这样，可以考虑从G中通过短接所有其非回路边而得到的图G*。由于非回路边必定属于G的每个树，则显然有如果式(5.77)对G*是成立的，那么对G也成立。这个假设对于保证 $G(\overline{E}_q; E_{q+1})$ 的连通性是必要的，因为我们必须涉及f割集，(否则，必须利用林的概念，然后定义f割集)。为了方便起见，设 $G(\overline{E}_q; E_{q+1})$ 的树归入 $T''(\bar{e}_\alpha)$ 类中($\alpha=i_q$)，它们含有边 e_α，而 $T''(\bar{e}_\alpha)$ 中的树不含有 e_α。设 C_{i_1} 是在 $G(\overline{E}_q; E_{q+1})$ 中节点 i_1 的关联割集，而 $C_{t''}(e)$ 是 $G(\overline{E}_q; E_{q+1})$ 中由 t'' 的支路 e 所确定的对于树 t'' 的f割集。由于根据定理4.13，在 $T(E_{p+1})$ 中的树 t' 和 $T''(e_\alpha)$ 中的树 t'' 之间存在一一对应关系，从而有 $t'=g\cup E_1$，这里 g 是G中 t'' 的对应子图，换言之，t'' 可以从 t' 中通过短接 E_1 中的边而得到。由于 $e_1e_2\cdots e_\alpha$ 是 t_0 的连通子图，并且 E_q 含于 $e_1e_2\cdots e_\alpha$ 之中，则 $t'-e_\alpha$ 的两个分量中的一个不是孤立节点就是 E_q 的一个子图。设 i_1 是这分量中的节点，它也是 e_α 的两端点中的一个。在通过短接 E_q 中的边或者通过移去 E_{q+1} 中的边，f割集 $Q_{t'}(e_\alpha)$ 保持不变。因此，有 $C_{i_1}=Q_{t'}(e_\alpha)$。同样，f割集 $C_{t''}(e_\alpha)$ 和 $Q_{t'}(e_\alpha)$ 只相差含于 E_q 中的那些边。可以得出如下结论：

$$C_{i_1}\cap C_{t''}(e_\alpha)=Q_{t'}(e_\alpha)\cap Q_{t'}(e_\alpha) \tag{5.79}$$

根据定理5.33，有下式

$$T''(\bar{e}_\alpha)=\{t^*;\ t^*=(t''-e_\alpha)\cup e_2,\ t''\text{ 在 }T''(e_\alpha)\text{中}, e_2\text{ 在 }C_{t''}(e_\alpha)\cap C_{i_1}\text{ 中，以及 }e_2\neq e_\alpha\} \tag{5.80}$$

由于在 $T(\overline{E}_q)$ 中的元素和 $T''(\bar{e}_\alpha)$ 中的那些元素之间也存在一一对应关系，这些对应元素仅相差在 E_q 中的那些元素，经过简单代入

之后，式(5.77)可以直接从式(5.60)导得出。

式中(5.78)的证明是简单明了的，这里略去。

这一成果对利用数字计算机来生成图的树，非常有用，因为它对生成树的迭代方法提供了理论基础，而且不会引入任何重复项。方法要求首先生成一个参考树，这是很容易做到的。事实上，如果起始树 t_0 是用计算机来生成的，很自然它利用每个子图 $e_1e\cdots e_n$ 是连通的这一性质。方法也要求对给定的树计算f-割集，这又是很容易做到的。对于一个给定树的f-割集只不过是从任何基本割集矩阵相对于树支的列，通过使矩阵标准化而得到的。算法似乎意味着必须考察 2^r 次置换集合。但是，如果任一置换产生一个空集时，下面的置换就不再考察。实际上，被考察的集合数一般不是 2^r，但也不是所要求的绝对最小值。当图的网络是有源时，通过初等树变换生成树的另一个优点是很容易确定对于任一树的每个树的符号。以上面的算法为基础的计算机程序已由SESHO和WAXMAN[1966]编写为大型线性网络故障诊断程序的一部份，最初在IBM系统7094型计算机上用FAP语言写出程序，第二次改为(目前正在使用中)在IBM系统7094型计算机上用FORTRAN语言写出程序。这种方法也已经由PAVL[1967]推广用来生成有向树(习题5.65)。

例 5.13 在图5.16中，含有边 e_1 的树集由下式给出：

$T(e_1)=\{e_1e_2e_7,\ e_1e_5e_7,\ e_1e_6e_7,\ e_1e_3e_4,\ e_1e_4e_5,\ e_1e_4e_6,$

$e_1e_2e_3,\ e_1e_2e_5,\ e_1e_2e_6,\ e_1e_3e_5,\ e_1e_3e_6,\ e_1e_4e_7\}$

假定要求从集合 $T(e_1)$ 中，用定理5.33中概述的方法来生成集合 $T(\bar{e}_1)$。设 $i=1$，那么有 $Q_1=e_1e_4e_7$。如果 $W(t')$ 表示在 $T(e_1)$ 中由 t' 而生成的 $T(e_1)$ 的子集，则根据式(5.76)有：

$W(e_1e_2e_7)=\{t;\ t=(e_1e_2e_7\cap e_1)\cup e_x;\ e_x$ 在 $e_1e_3e_4\cap e_1e_2e_7$

e_1 中，以及 $e_x\neq e_1\}$

$=S_0$

$W(e_1e_5e_7)=W(e_1e_6e_7)=W(e_1e_2e_5)=W(e_1e_2e_6)=S_0,$

$W(e_1e_3e_4)=\{t;\ t=(e_1e_3e_4\cap e_1)\cup e_x,\ e_x$ 在 $e_1e_2e_7\cap e_1e_4e_7$

e_2e_7，以及 $e_x \neq e_7\}$

$= \{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_7\}$

$W(e_1e_4e_5) = \{t;\ t = e_4e_5 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_2e_7 中$\}$

$= \{e_2e_4e_5,\ e_4e_5e_7\}$

$W(e_1e_4e_6) = \{t;\ t = e_4e_6 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_2e_7 中$\}$

$= \{e_2e_4e_6,\ e_4e_6e_7\}$

$W(e_1e_2e_3) = \{t;\ t = e_2e_3 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_7 中$\}$

$= \{e_2e_3e_7\}$

$W(e_1e_3e_5) = \{t;\ t = e_3e_5 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_2e_7 中$\}$

$= \{e_2e_3e_5,\ e_3e_5e_7\}$

$W(e_1e_3e_6) = \{t;\ t = e_3e_6 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_2e_7 中$\}$

$= \{e_2e_3e_6,\ e_3e_6e_7\}$

$W(e_1e_4e_7) = \{t;\ t = e_4e_7 \cup e_x,\ e_x$ 在 e_2 中$\}$

$= \{e_2e_4e_7\}$

于是通过取集合 $W(t')$ 的并集得到集合 $T(e_1)$ 并由下式给出：

$T(e_1) = \{e_2e_3e_4,\ e_3e_4e_7,\ e_2e_4e_5,\ e_4e_5e_7,\ e_2e_4e_6,\ e_4e_6e_7,$
$e_2e_3e_7,\ e_2e_3e_5,\ e_3e_5e_7,\ e_2e_3e_6,\ e_3e_6e_7,\ e_2e_4e_7\}$

例 5.14：*考虑如图 5.16 所示的图 G，现用定理 5.34 中所概述的步骤来生成 G 的树集。设 $t_0 = e_1e_4e_7$，它具有 e_1 和 e_1e_4 是 t_0 的连通子图的性质，于是有*

$T(e_4e_7) = \{t;\ t = (t_0 \ominus e_1) \cup e,\ e$ 在 $Q_{t_0}(e_1) \cap e_1e_2e_3e_5e_6$ 中，$e \neq e_1\}$

$= \{e_2e_4e_7,\ e_3e_4e_7,\ e_4e_5e_7,\ e_4e_6e_7\}$，

$T(e_1e_7) = \{t;\ t = e_1e_7 \cup e,\ e$ 在 $Q_{t_0}(e_4) \cap e_2e_4e_5e_6$ 中，$e \neq e_4\}$

$= \{e_1e_2e_7,\ e_1e_5e_7,\ e_1e_6e_7\}$

$T(e_1e_4) = \{t;\ t = e_1e_4 \cup e,\ e$ 在 $Q_{t_0}(e_7) \cap e_2e_3e_5e_6e_7$ 中，$e \neq e_7\}$

$= \{e_1e_3e_4,\ e_1e_4e_5,\ e_1e_4e_6\}$

$T(e_1) = \{t;\ t = (t' \ominus e_4) \cup e,\ t'$ 在 $T(e_1e_4)$ 中，

e 在 $Q_{t'}(e_4) \cap e_2e_4e_5e_6$ 中，以及 $e \neq e_4\}$

$\{e_2e_3e \quad e_3e_5e \ , \ e_3e_6e_7\}$

$T(e_4)$ $\{t; t \quad (t'⊕e_7)\cup e, \ t'$ 在 $T(e_4e_7)$中，

e 在 $Qt'(e_7)\cap e_3e_5e_6e_7$ 中，$e \neq e_7\}$

$= \{e_2e_3e_4, \ e_2e_4e_5, \ e_2e_4e_6\}$

$T(e_.)$ $\{t_1; t \quad (t'⊕e_7)\cup e, \ t'$ 在 $T(e_.e_7)$中，

e 在 $Q_t'(e_7)\cap e_3e_5e_6e_7$ 中，$e \neq e_7\}$

$\{e_1e_2e_3, \ e_1e_2e_5, \ e_1e_2e_6, \ e_1e_3e_5, \ e_1e_3e_6\}$

$T(\phi)$ $\{t; t \quad (t'⊕e_7)\cup e, \ t'$ 在 $T(e_7)$中，

e 在 $Q_t'(e_7)\cap e_3e_5e_6e_7$ 中，$e \neq e_7\}$

$\{e_2e_3e_5, \ e_2e_3e_6\}$

因此，G的树集可以通过取以上集合的并集得到，并有 $T(t_0)=\{e_1e_4e_7\}$。

§ 8. 有向树图中的哈密顿回路

在前一节中，已表明图G的任何树可以从任一别的树，通过有限序次的初等树变换而得到。换言之，至少含有两个树的G的树可以这样的方法来排列序次，如果在树的序列中每个树容许出现有限次数，则它们的序次就与初等树变换相联系。在这一节中，指出序列中的树容许出现有限次数的条件可以取消的同时，将证明一个更重要的条件，但存在具有以上性质的序列。这个结论首先是由CUMMINS[1966]提出的，并由CHEN[1967c]推广到非环的有向图。

定义 5.11：初等有向树变换。

设 t_n 是有向图 G_d 中以节点 n 为参考节点的有向树，以及 $e_j = (i, j)$是在 G_d 中而不在 t_n 中的一条边，那么，如果 t_n^* 是 G_d 中以节点 n 为参考节点的有向树，则对于 $i \neq n$，以下运算

$$e_{ij} ⊕ t_n \quad e_k \quad t_n^* \qquad (5.81)$$

称为初等有向树变换，式中 e_{ik} 是 t_n 的一条边。

定义 5.12：有向树图。

有向图 G_d 的有向树图用符号 T (G) 来表示，它是一个(无向)图，其中每个节点对应于 G_d 的一个有向树 t_n，而每条边对应于有向树之间的一个初等有向树变换，即当且仅当 $T_n(G_d)$ 中的节点 i 与节点 j 所对应的有向树由初等有向树变换相联系时，在这两节点之间存在一条边。特别是，如果 G_d 是对称的，则有向树图仅仅称为树图，用符号 $T(G_u)$ 来表示。

作为一个例子，考虑如图 5.18 所示的有向图 G_d，有向树 t_3 的集合由下式给出：

$$T_3=\{efc,\ bef,\ aec,\ dec,\ abe,\ bdc\} \qquad (5.82)$$

有向树图 $T_3(G_d)$ 如图 5.19 所示。

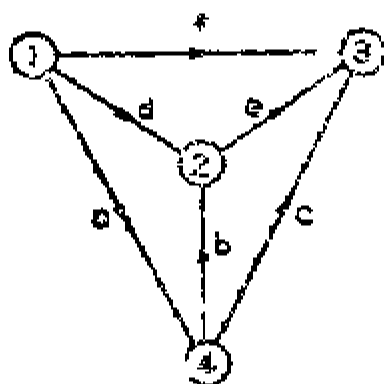


图 5.18　有向图 G_d

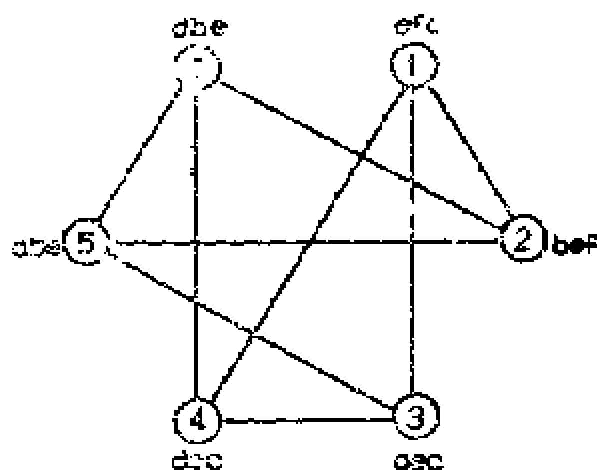


图 5.19　有向树图 $T_3(G_d)$

定义 5.13：哈密顿回路。

图G(或有向图)的哈密顿回路是含有G的所有节点的回路。

例如，在图 5.19 中下式是 $T_3(G_d)$ 的两个哈密顿回路 H_1 和 H_2：

$$H_1 \quad e_{21}e_{14}e_{43}e_{35}e_{56}e_{62} \tag{5.83 a}$$

$$H_2 \quad e_{21}e_{13}e_{34}e_{45}e_{65}e_{62} \tag{5.83 b}$$

现在我们来表明，在有向树图类中存在哈密顿回路，为了方便起见，用 t_i 表示与 $T_n(G_d)$ 中节点 i 相对应的有向树。下面的引理显然成立

引理 5.8. 在有向图中，具有相同参考节点的任何两个有向树，彼此可以用通过有限序次的初等有向树变换来得到

定理 5.35： 对于一个至少含有三个有向树 t_n 的非环或对称的有向图 G_d，其有向树图 $T_n(G_d)$ 的任何边都可以构成为哈密顿回路的一部分。

证明．我们仅对 G_d 是非环的情况在 G_d 的边数上用归纳法进行证明，对另一情况的证明是类似的。

假定 G_d 是非环的，显然，如果 G_d 具有三条边，定理是成立的，假定对于任何具有 $K-1(K\geq 4)$ 条边或者少一些边的 G_d，定理都成立．必须证明，如果 G_d 具有K条边，定理也成立。

设 G_1 是从 G_d 中通过移去边 e_{Kn} 所得的有向图，G_2 是从 G_1 中通过等同点K和n所得的有向图。设 G_2 中的组合点用n来表示。显然，$T_n(G_1)$ 和 $T_n(G_2)$ 是 $T_n(G_d)$ 的两个节点不相接的局部子图。它们合在一起包含 $T_n(G_d)$ 的所有节点。注意到，从图的理论观点来看，$T_n(G_2)$ 是 $T_n(G_d)$ 的局部子图，即使 $T_n(G_2)$ 的节点并不表示 G_d 的有向树 t_n。事实上，如果 t^m_{2n} 是 G_2 中对应于 $T_n(G_d)$ 的节点m的 G_d 的有向树。现在利用下面的引理来完成定理的证明。为了避免引起的混淆和简化符号，在有向树图中，用 E_{ij} 来表示连接在节点i和j之间的无向边。

引理 5.9： 如果 $T_n(G_1)$ 和 $T_n(G_2)$ 至少各含有两个节点，则对于在 $T_n(G_d)$ 中的每条边 E_{ij} 来说（i在 $T_n(G_1)$ 中，而j在 $T_n(G_2)$ 中），在 $T_n(G_d)$ 中存在两个节点u和v，这里u在 $T_n(G_1)$ 中，而v在 $T_n(G_2)$ 中，使具有相异的i，j，u和v的 E_{iv}，E_{vu} 和 E_{uj} 都在 $T_n(G_d)$ 中。

证明：由于$T_n(G_2)$至少含有两个节点，根据引理5.8，则在G_2中存在一个t_{2n}^x，这可以从t_{2n}中通过初等有向树变换来得到。设e_{qs}是在t_{2n}^x中但不在t_{2n}中的一条边，而e_q是在t_{2n}中但不在t_{2n}^x中的边。显然$q \neq K$，以及在G_d中，$t_n^x - e_{Kx} \cup t_2^x$和$t_n^x - e_{Kn} \cup t_{2n}$是用初等有向树变换来联系的。

由于E_{ij}是$T_n(G_d)$的一条边，从而t_n^x和t_n^y是用初等有向树变换来联系的，这样，e_{Kx}是在t_n^x中但不在t_n中的一条边，而e_{Kw}是在t_n^y中但不在t_n中的边，那么由下列运算：

$$t_n^w = t_n \cup e_{qs} e_{Kw} - e_{qs} e_K,$$

得到的子图t_n^w是G_d的有向树，这样t_n^x和t_n^w以及t_n^w和t_n^y分别由初等有向树变换来联系。因此，E_{jx}、E_{xu}、E_{u}和E_j是$t_n(G_d)$的边，引理证毕。

引理 5.10：如果$T_n(G_1)$和$T_n(G_2)$至少各含有三条边，则$T_n(G_d)$具有定理中所述的性质。

证明：由于G_1和G_2具有的边少于G_d，利用归纳假设，$T_n(G_y)$ $(y=1, 2)$的任何边可以成为$T_n(G_y)$的哈密顿回路的组成部分，下面分三种情况来考虑：

情况1：设E_{ij}（i在$T_n(G_1)$中，而j在$T_n(G_2)$中）是$T_n(G_d)$的一条边。根据引理5.9，在$T_n(G_d)$中存在两个节点u和v，这里u在$T_n(G_1)$中，而v在$T_n(G_2)$中，这样E_{jv}，E_{vu}和E_u是在$T_n(G_d)$中。如果H_1和H_2分别是在$T_n(G_1)$和$T_n(G_2)$中含有边E_{ui}和E_{jv}的哈密顿回路，则由子图$H_1 - E_{ui}$，E_{ij}，$H_2 - E_{jv}$和E_{vu}所形成的$T_n(G_d)$的子图是含有边E_{ij}的$T_n(G_d)$的哈密顿回路。

情况2：设E_{ij}是$T_n(G_2)$的一条边，考虑$t_n^i - e_{Kn} \cup t_{2n}^i$和$t_n^j - e_{Kn} \cup t_{2n}^v$。由于$T_n(G_1)$含有不止一个节点，根据引理5.8，在$T_n(G_1)$中存在一有向树$t_n$，使$t_1$和$t_n^i$用初等有向树变换来联系。因此，在$t_n^i$中在$e_{Kn}$之外另有一条边$e_{Kw}$，使

$$t_n^i = t_n \cup e_{Kw} - e_{Kn}$$

类似地，如果e_{qs}是在t_{2n}^i中但不在t_{2n}^j中的一条边，以及如果e_{qz}是

在 t_n^u 但不在 t_n^v 中的边，那么

$$t_n^w = t_n^v \cup e_{kw} - e_{ki}$$

是在 G_d 中的有向树。此外，有向树 t_n^u 和 t_n^w，t_n^w 和 t_n^x，t_n^x 和 t_n^y，以及 t_n^y 和 t_n^v 分别是用初等有向树变换来联系的。根据类似于情况 1 的结论，得到所希望的哈密顿回路

情况 3：设 E_{ij} 是 $T_n(G_2)$ 的一条边，这种情况的证明与情况 2 的证明完全相同，因此这里从略。

引理 5.11：如果 $T_n(G_1)$ 恰好含有两个节点，以及如果 $T_n(G_2)$ 至少含有三个节点，或者如果 $T_n(G_2)$ 含有两个节点，而 $T_n(G_1)$ 至少含有三个节点，则 $T_n(G_d)$ 具有定理中所述的性质。

这个引理的证明类似于引理 5.10 的证明，因此这里从略。

引理 5.12. 如果 $T_n(G_1)$ 和 $T_n(G_2)$ 恰好各含有两节点，则 $T_n(G_d)$ 具有定理中所述的性质。

证明：由于在 $T_n(G_d)$ 中至少存在一条边 E_{ij}（i 在 $T_n(G_1)$ 中，而 j 在 $T_n(G_2)$ 中），则引理可以直接根据引理 5.9 得出。

引理 5.13：如果不是 $T_n(G_1)$ 就是 $T_n(G_2)$ 仅含有一个节点，那么 $T_n(G_d)$ 具有定理中所述的性质。

这个引理的证明这里略去，留作练习（习题 5.45）。

由于 $T_n(G_d)$ 分解为 $T_n(G_1)$ 和 $T_n(G_2)$，只可能是以上类型中的一种，这样定理证毕。

推论 5.13：设 G_d 是至少含有两个有向树 t_n 的非环或对称有向图，则 G_d 的有向树 t_n 可以如下排列序次（行），其中任意两个相继的树都由初等有向树变换来联系，而且，用初等有向树变换来联系的任何两个有向树 t_n 可以作为某个序列的两个相继元素。

我们将序列中第一个和最后一个元素也看成相继元素。显然，任何矩阵的大子阵也可以用类似的方法来排列（习题 5.67）。

由于（无向）图可以用一对方向相反的有向边来替换各个无向边而转换为对称有向图，反之亦然，并由于如在推论 4.11 中所指出的那样，在图的树和其伴随对称有向图的有向树之间存在一一对应

关系，则图和其伴随有向图可以认为是同义的。因此，树图中的两节点用一条边来连通，当且仅当它们的对立树用初等树变换来联系。这就得出下面著名的结论。

推论 5.14：至少含有三个节点的树图的任何边可以成为哈密顿回路的一部分。

类似地，可以指出 G_d 的有向 2-树或 2 树的结论（习题 5.46）。因此，生成图的树集的问题等效于求哈密顿回路，或者在树图中的树。KAMAE[1967 a]以及 KISHI 和 KAJITANI[1968]已经证明在树图的全部子图中怎样来生成哈密顿回路，然后组合这些局部哈密顿回路来生成树图的哈密顿回路，当然这对有向树，有向 2-树或者 2 树同样适用。

作为说明，图 5.19 的有向树图 $T_3(G_d)$ 至少含有如式(5.83)所示的两个哈密顿回路，就图 5.18 G_d 的有向树 t_3 而论，H_1 和 H_2 的对应序列分别由下式给出：

$$bef-efc-cec-aec-abc-dbe-,$$

和

$$bef-efc-cec-dec-dbe-abe-,$$

由于 $T_3(G_d)$ 的每条边不是含于 H_1 中就是含于 H_2 中，则 $T_3(G_d)$ 的任何边可以构成为哈密顿回路的组成部分。类似地，G_d 的有向 2-树 $t_{2,3}$ 的集合由下式给出：

$$T_{2,3}=\{ab,\ ac,\ db,\ dc,\ fb,\ fc\},$$

其元素至少可以分别用下列两种方法排列：

$$ab-ac-fc-dc-db-fb-,$$

和

$$ab-db-fb-fc-dc-ac-。$$

§ 9. 有向树和有向尤拉路

在这一节中，将讨论有向树和有向尤拉路之间的一些基本关系

和有向图类的尤拉路的数目。这些关系式首先是由VAN AARD-ENNE EHRENFEST和BRUIJN[1951]指出的。

定义 5.14：尤拉路。

含有图或有向图的所有边的闭边列称为图或有向图的尤拉路。

定理 5.36： 连通图是一个尤拉路，当且仅当其每个节点的度是偶数。

证明：必要性部分是明显的，我们仅证明这一条件同样是充分的。设G是具有所需性质的连通图，从G中某个任意节点i开始一个闭边E，并尽可能总是通过新的边继续下去。由于与每个节点关联的边数都是偶数，则这个过程只可能通过回到i来结束。如果G－E＝G′不是空集，那么G′的每个节点的度也是偶数。由于G是连通的，则在E中必定有某个节点j，使(j，k)是在G′中。从j开始可以构成只含有G′的边的新闭边列E′，同上一样，E′必定通过回到j来结束。但E和E′可以组合形成一新的闭边列E″。如果G－E″不是空集，则这个过程可以重复进行下去。因此最终会产生G的尤拉路，定理证完。

推论 5.15： 连通图是一个尤拉路，当且仅当它是边不相接回路的并。

推论 5.16： 连通有向图是一个尤拉路，当且仅当其每个节点的入度和出度的和是偶数。

在图5.20中，由于完全五边形的每个节点的度都为4，则此图具有一个尤拉路。利用定理5.36的证明中所述的方法，产生回路序列：aed，ghf，ijcb。因此，子图edafhijcbg是完全五边形的尤拉路。

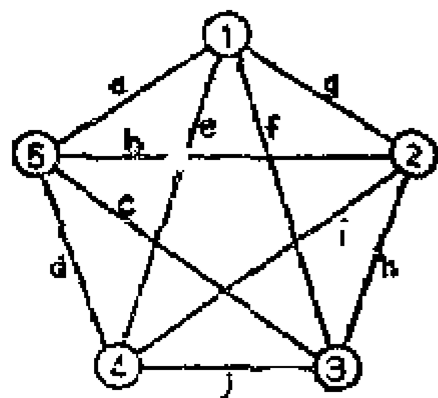


图 5.20 5-节点的完全图

由于节点度为奇数的节点数总是偶数，则有以下推论：

推论 5.17：设G是具有奇数度为2K(K≥1)个节点的连通图，那么G可以分解为K个边不相接的开边列的并，K是任何分解中这种边列的最小数。

证明：由于度为奇数的每个节点必定至少是一个开边列的终端，从而在任何分解中至少存在K个这种开边列。为了表明G能用这个数来分解，设G′是通过对G附加K个点不相接的边所得的图，每个也都连接一对奇度的相异节点，那么根据定理5.36，G′具有尤拉路E′。当附加边从E′中移去时，E′分解为K个开边列。定理证毕。

定义 5.15：有向尤拉路。

在有向图中的尤拉路被称为是有向尤拉路，只要在尤拉路中对每对相继的边(i, j)和(u, v)，有不是j＝u就是i＝v。

按照定义1.31，设$d^+(i)$和$d^-(i)$表示G的节点i的出度和入度。类似用于证明定理5.36中的论证，可以得出以下定理所给的有向尤拉路的完整特性(习题5.47)。

定理 5.37：连通有向图是有向尤拉路，当且仅当对所有i来说，有$d^+(i)=d^-(i)$。

推论 5.16：在一个连通图中，总有可能构成一个闭边列，它通过每条边来回各一次且仅仅一次。

设G_d是具有性质对于所有的i来说都有$d^+(i)=d^-(i)$的有向图，选择一条固定边(n, u)，并考虑G_d的一条任意有向尤拉路E_d。现在从边(n, u)开始，并沿E_d移动，G_d的每个节点会经过$d^+(K)$或$d^-(K)$次。经过节点K第$d^+(K)$次后，离开节点K的这一条边称为节点K的最终射出边。

定理 5.38：设G_d是连通有向图，其中对所有的i来说都有$d^+(i)=d^-(i)$，则由节点K(K＝1, 2, …, n－1)的最终射出边集形成的子图是G_d的有向树t_n。

证明：设g是由节点的最终射出边集形成的子图，设E_d是有

向尤拉路，按照 E_d 中的边的序次，可以对 G_d 的边标号为 e_1，e_2，$\cdots$，e_b，E_d 中边(n，u)标号为 e_1。如果 e_i 和 e_j 都是 G_d 中的最终射出边，且在 G_d 中的顺序是 e_j 接在 e_i 之后，则 $i<j$。这是由于 e_{i+1} 和 e_j 必定具有相同的起始节点，并由于在所有以这点为起始节点的边中，e_j 的符号 j 是在所有这些边符号中最高的。因此，g 不可能含有任何有向回路。因为如果不是这样，则对应于 g 中有向回路的边 e_k 的符号 K 会无穷增大。定理根据以下情况可以得出，即 g 具有 n－1 条边，以及除节点 n 的出度为 0 以外，其每个节点的出度都为 1。定理证毕。

定理 5.39：设 G_d 是连通有向图，其中对所有的 i 来说，都有 $d^+(i)=d^-(i)$，则对于给定的边(n，u)，以及给定的有向树 t_n，确切地存在

$$\prod_{i=1}^{r}(d_i-1)! \tag{5.84}$$

个有向尤拉路，其最终射出边的集合和 t_n 相同，这里 $d_i=d^+(i)=d^-(i)$。

证明：在 G_d 的每个节点上，对从节点射出的边标号，标号时有以下约束：在节点 n，令 $e_1=(n,u)$；在节点 K(K<n)，在 t_n 中的边得到最大可能的符号。按这一规则，可能出现的不同标号方法总计个数如式(5.84)所示。还需要表明，对于上属的每一种标号，恰好存在仅有一个对应于这个标号的有向尤拉路。

在 G_d 中从 e_1 开始有向尤拉路，并尽可能继续下去。在通过边 e_k 时，对 e_k 的选择总是挑选还没有经历过的，具有同一起始点且符号 K 为最低的那一条边。由于假定 G_d 是有限的，这过程只能由回到节点 n 来终止。现在必须说明，这过程必会经过 G_d 的所有的边。假定有一条边，比如说(i，j)没有经过，则有另一条边(j，v)也不会被经过，特别是节点 j 的最终射出边(j，x)必然没有经过。从而最终射出边(x，y)不可能被经过，等等。由于在 t_n 中存在一条从节

点 j 到节点 n 的唯一有向路径，则以上过程最终到达 n，而我们发现，存在一条从 n 的射出边没有被经过，这与假设尽可能继续这个过程相矛盾。定理证毕

在这定理中认为两条仅是起始点不同的有向尤拉路是等同的根据定理 5.38 和 5.39，得到下面有用的恒等式(习题 5.69)。

定理 5.40： 设 G_d 是连通有向图，其中对所有 i 来说，都有 $d^+(i)=d^-(i)$。如果 $N(t_K)$ 和 $N(E_d)$ 分别表示 G_d 的有向树 t_K 和有向尤拉 E_d 的数目，则对于 K＝1，2，…，n，有以下关系式：

$$N(E_d)=N(t_K)\prod_{i=1}^{n}(d_i-1)! \qquad (5.85)$$

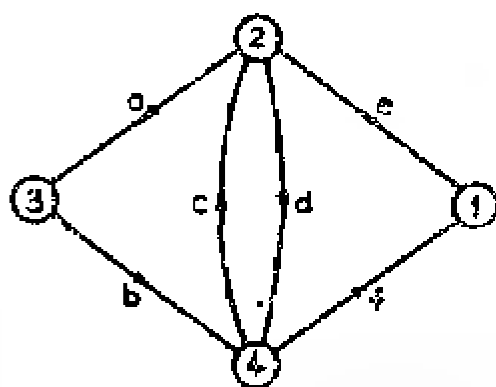


图 5.21 说明有向尤拉路和有向树之间关系的有向图

定理表明，G_d 的有向树数目与参考节点的选择无关，这已在推论 1.6 中指出。

例 5.15： 考虑如图 5.21 所示的有向图 G_d，有 $d^+(i)=d^-(i)=d_i$ (i＝1，2，3，4)，这里 $d_1=d_3=1$，以及 $d_2=d_4=2$，根据定理5.37，在 G_d 中存在有向尤拉路，其中一条有向尤拉路给出为abcdfe。其次，设 $t_4=abe$ 以及 $(4,u)=c$，则根据定理 5.39 有下式：

$$\prod_{i=1}^{4}(d_i-1)!=(1-1)!(2-1)!(1-1)!(2-1)!=1$$

即有一条尤拉路，其最终射出边的集合与 t_4 相同，也就是 E_d＝cdfeab。实际上，这数目在 G_d 中与 t_4 的选择无关。由于 G_d 中仅有两个有向树 abe 和 bde，则按照定理 5.40，在 G_d 中仅有两条有向尤拉路，它们是 fedcab 和 fecbcd。注意，如果仅是起始点不同，我们并不认为它们是两条不同的有向尤拉路。现在对于有向树，如果选节点 1 为参考节点，则仍只有两个有向树 abf 和 bdf，对应的

有向尤拉路是edcabf和eabcdf，当然它们与前面所给出的完全相同。

作为另一个例子，考虑5节点的完全有向图G_d，根据推论4.8，有125个有向树。由于每个节的度为4，根据定理5.40有

$$N(E_d)=125(3!)^5=972000$$

所以在G_d中有972000条有向尤拉路。换言之，在如图5.20所示的完全五边形图中有972000个闭边列，其中每个闭边列对完全五边形图的每条边在每个方向上，都通过一次且仅一次。

§10. 结　束　语

本章首先讨论了树的某些基本性质，以及表明具有n节点的树结构怎样可以用一排n－2个符号来编码，这样，从这种描述中可以恢复原树。我们给出了这种类型的两种代码，也研究了把树分解为最小数目的边不相接路径和确定这种分解的数目。

在线性系统的拓扑分析中，问题最终归结为在伴随图中列出树集或有向树集。因此，利用拓扑公式作为工具，使用计算机来分析复杂线性系统的效率主要取决于生成树或有向树的效率。鉴于这原因，用大部分章节来研究图的生成树的效率。有几种方法可以利用，根据方法的性质，提出下列四种公式：Wang代数公式，分块、矩阵公式和初等变换。对于一个复杂图来说，以Wang代数公式为基础的方法并不是非常有效的，因为产生大量的冗余项。除了减慢生成树的过程之外，这种情况也限制了能用计算机来分析的图的规模，因为在计算机贮存器中要保留已生成的树集，并可能产生重复项检验每一个新树，但这个公式很自然地导致产生通过分块而避免出现重复项的方法，分块的优点是明显的。不仅树的数量大为减少，而且对于每次计算，它们是要求较少计算的"较小"树。在许多应用中，其实不涉及到树集，而是树乘积之和，这种情况使这一方法更加有意义。但是，在分块中，假定分片图中的树和多一树是要

使用到的。对于这代树生成方面，其它两种公式对在反复生成树的过程中不会由于重复而引入冗余项提供理论基础是非常有用的。介绍这些方法可以容许人们选择某种特定方法，或者把这些方法组合应用，以便用最简单和最满意的方法来解决手头的问题。

最后，讨论了在有向树图中哈密顿回路的存在性，以及对于有向图类在有向树和有向尤拉路之间的某些基本关系式，也提出了在这些图中计算有向尤拉路数目的公式。

习　题

5.1　证明定理5.1。

5.2　设d(i)是图G节点i的度，证明

$$\sum_i [d(i) - 2] = 2(m - n - c)。\qquad (5.86)$$

5.3　证明当且仅当图的零度是零，则图为林(多树)。

5.4　证明如果一个整数在代码$\mathscr{C}^*$中出现k次，则在树中其对应节点的度为k+1，这里$k \geq 0$。

5.5　利用式(5.9)的代码$\mathscr{C}$，证明具有n个给定节点的不同树的数目是n^{n-2}。

5.6　给定式(5.9)的代码$\mathscr{C}^*$，按以下次序求(1) 节点度，(2) 路径代码，(3) 路经结构和(4) 树的结构。

5.7　证明在式(5.8)的代码$\mathscr{C}$中不出现的节点是树中度为1的节点。

5.8　假定图5.3的树结构没有给出，从式(5.12)给出的代码中，重新构造树。

5.9　为了对树的结构编码，分割树的最简单规则是每次移去一条边，而且总是在端点度为1的边中选择端点具有最小值的边。根据这个规则，构造一个象代码$\mathscr{C}$和$\mathscr{D}$那样的树结构的代码。

5.10 在至少含有两个树的连通图中，一对最大相隔的树的距离不大于图的秩或零度。

5.11 如果在连通图G中两节点的距离定义为连接这两点之间最短路径的长度，证明对于某个固定节点K来说，在G中存在一个树，使得在t中从K到任一节点的距离和在G中从K到同一节点的距离相同。(参见定义 1.23)

5.12 对于图 5.2 的树，求出具有定理 5.12 的证明中所规定的性质划分的系统$\mathscr{R}$。

5.13 证明在式(5.16)和(5.17)中所定义的运算是可结合的和可交换的，以及集合$\mathscr{S}$相对于这些运算形成满足单位元的可交换环。

5.14 证明所有图G的不含有孤立节点的子图集合$\mathscr{G}$，在整数模 2 域上，构成一个线性矢量空间，矢量的加法是环和运算。

5.15 证明推论 5.4 和 5.5。

5.16 设 t 是图G的一个树，K是G t 中片的数目。证明在G中存在一与 t 的距离为 n k 的树，以及任何G中的树与 t 的距离均不大于 n k。

5.17 证明推论 5.6 和 5.7。

5.18 证明如果一没有并联边和自环的图 G 有 $m\leqslant 4$ 和 $C=1$，则 $m\leqslant r$。

5.19 证明定理 5.14。

5.20 当且仅当图G的生成子图 L^* 的每个片的零度均为 1，则 L^* 称为G的广义回路，如果含于每个片中的回路的长度均为奇数，则 L^* 称为奇的。证明如果 $n\geqslant 3$ 和 $m\geqslant 1$，则在实数域上G的全关联矩阵 A_a 的 n 阶方子阵是非奇异的，当且仅当这一子矩阵的列对应于一个奇广义回路 L^* 的边。注意，矩阵 A_a 由 1 和 0 组成。此外，证明子矩阵的行列式等于 $\pm 2^q$，这里 q 是 L^* 中的回路数(CHEN[1970 c])。

5.21 在习题 5.20 中，证明在实数域中，子矩阵的恒式为非零，

当且仅当这子矩阵的列对应于G的广义回路L^*的边，以及其值等于2^q (CHEN[1970 c])。

5.22 证明对于给定的图G，在G(I)中的树和补树分别与G的多树t(I)和多补树$\bar{t}(I)$处于一一对应关系，这里I是G的节点集的子集，而G(I)是§44中所定义的。

5.23 在习题5.22中，设$\{L_x\}(x=1, 2, \cdots m_s)$是G(I)的一组线性独立回路或边不相接回路的并的集合，这里m_s是G(I)的零度。证明如果G(I)是连通的，则G的多补树集合，包括空图在内，由下式给出：

$$T(I) = H(L_1) ⓐ H(L_2) ⓐ \cdots ⓐ H(L_{m_s})。\qquad (5.87)$$

5.24 在习题5.22中，设$\{C_x\}$ $(x=1, 2, r_s)$是G(I)的线性独立切割的集合，这里r_s是G(I)的秩。证明如果G(I)是连通的，则G的树集，包括ϕ在内，由下式给出：

$$T(I) = H(C_1) ⓐ H(C_2) ⓐ \cdots ⓐ H(C_{r_s})。\qquad (5.88)$$

5.25 推广公式(5.87)和(5.88)到非连通图。

5.26 给出一个例子，证明由于重复而产生的冗余项数是随式(5.28)中不同的回路选择而不同的。

5.27 对式(5.30)和(5.31)，重复习题5.26，你能给出一套规则使重复项减少吗?

5.28 在图5.7中，设$P_{13}=e_2e_6$，应用式(5.32)生成集合T(1; 3)。

5.29 推广定理5.21到G′或G″是非连通的情况。

5.30 证明引理5.1。

5.31 证明定理5.16。

5.32 如果无并联边连通图G的每一条边均是一回路边，以及$m<\min(5, r)$，则m是G的两个最大相隔树的距离，(BARON and IMRICH[1968])。

5.33 证明定理5.29。

5.34 证明引理5.6。

5.35 设 A_a^+ 是从有向图 G_d 的全关联矩阵 A_a 中，通过用 0 替换之 −1 所得的矩阵，证明子矩阵 $A_a^+(I_q, J_q)$ 是非奇异的，当且仅当由 I_q 中的节点和对应于 $A_a^+(I_q, J_q)$ 中的列的边所形成的子图，它的每个节点的出度均为 1(ASH[1959])。

5.36 如果 A^- 和 A_a^- 是分别从 A 和 A_a 中，通过用 0 替换元 1 所得的矩阵，阐述习题 5.34 和 5.35 的对偶结论。

5.37 根据习题 5.35 和 5.36，证明相对应的子矩阵 $A_a^+(I_q, J_q)$ 和 $A_a^-(I_q, J_q)$ 都是非奇异的，当且仅当对应于这子矩阵的列的边形成回路或回路节点不相接并(ASH[1959])。

5.38 证明定理 5.31。

5.39 证明引理 5.7。

5.40 定义一初等补树变换，然后证明连通图 G 的每个补树可以从任何另一个补树，通过有限次的初等补树变换得出。(提示：根据式 5.71)。

5.41 对于 2 树和有向 2-树，重复习题 5.40。

5.42 证明引理 5.8。

5.43 设 $t=e_1, e_2\cdots e_r$ 是一个树，证明 t 的边总是可以如下标号，使 $e_1e_2\cdots e_x$(x=1，2，…，r−1)都是 t 的连通子图。

5.44 设 G_d^* 是从给定有向图 G_d 中，通过用具有相同方向的 K 条并联边替换 G_d 的每条边所得的有向图。这里 K 是一正整数。证明 G_d^* 中以 n 为参考节点的有向树 t_n^* 的数目等于 G_d 的有向树 t_n 的数目乘以 K^{n-1}。

5.45 证明引理 5.11 和 5.13。

5.46 对于有向图的有向 2 树 t_{ij}，定义有向 2 树图，证明在至少含有三个树 t_{ij} 的任何一无圈有向图的有向 2 树图中，存在一Hamilton 回路。

5.47 证明定理 5.37。

5.48 证明图是一个开边列，当且仅当它是连通的且恰好有两个节点度为奇数。

5.49 图G的一个生成子图 $t^*(I_K)$ 称为图G的广义K树，当且仅当 $t^*(I_K)$ 具有零度为0的K个片，以及 $I_K=\{i_1; i_2; \cdots; i_K\}$ 中的节点在不同片中出现，而且如果还有其它片存在，则它们的零度为1。如果 $t^*(I_K)$ 是个K-树，或者含于零度为1的片中的所有回路其长度均为奇数，则 $t^*(I_K)$ 称为是奇的。设 $(A_a)_{I_K}$ 是从全关联矩阵 A_a 中删去对应于 I_K 中整数的行而所得的矩阵。注意，A_a 是仅由1和0组成的矩阵。证明在实数域上阶为 $n-K$ 的方子阵 $(A_a)_{I_K}$ 是非奇异的，当且仅当这个子矩阵的列对应于G中奇广义K树 $t^*(I_K)$ 的边，以及其行列式值等于 $\pm 2^q$，这里q是含于 $t^*(I_K)$ 中的回路数(CHEN[1970 c])。

5.50 在习题5.49中，证明子矩阵的恒式为非零，当且仅当这子矩阵的列对应于G中广义K树 $t^*(I_K)$ 的边，以及其值等于 2^q(CHEN[1970 c])。

5.51 有向图 G_d 的生成子图 $t_d^*(I_K)$ 被称为是 G_d 中以节点 $i_1, i_2, \cdots, i_K$ 为参考节点的广义有向K树，当且仅当对于每个在 $t_d^*(I_K)$ 中但不在 I_K 中的节点x有 $d^+(x)=1$，以及对于每个在 I_K 中的节点x，有 $d^+(x)=0$，这里 $I_K=\{i_1; i_2; \cdots; i_K\}$。设 $(A_a^+)_{I_K}$ 是从 A_a^+ 中删去对应于 I_K 中整数的行面得的子矩阵。于是，$(A_a^+)_{I_K}$ 的任一 $n-K$ 阶方子阵是非奇异的，当且仅当这子矩阵的列对应于 G_d 中广义有向K-树 $t_d^*(Z_K)$ 的边。这里 A_a^+ 是习题5.35中所定义的(CHEN[1970 c])。

5.52 对于一个图G，设g是 $\mathscr{G}$ 的一个元素，e是G的一条边，定义如下：

$$\partial g/\partial e = \begin{cases} g \oplus e & e\text{ 在 } g \text{ 中} \\ \phi & e \text{ 不在 } g \text{ 中} \end{cases} \qquad (5.89\text{a})$$

如果 S_1 是 $\mathscr{S}$ 的一个元素，以及 $g=e_1e_2\cdots e_K$，定义如下：

$$\partial S_1/\partial g = \partial S_1/\partial e_1 \oplus \partial S_2/\partial e_2 \oplus \cdots \oplus \partial S_K/\partial e_K, \qquad (5.89\text{b})$$

式中

$$\partial S/\partial e = \{\partial S/\partial e;\ S \text{ 在 } S_1 \text{ 中，以及 } e \text{ 在 } S \text{ 中}\} \qquad (5.89\,c)$$

应用这些定义，证明如果 $G=e_1e_2\cdots e_b$，则

$$\partial^K\{G\}/\partial g_1\partial g_2\cdots\partial g_K = \{G\oplus g_\alpha;\ g_\alpha \text{ 在 } W \text{ 中}\}, \qquad (5.90\,a)$$

式中 g_1，g_2，…，和 g_K 是 $\mathscr{G}$ 的元素。

$$\partial^2\{G\}/\partial g_1\partial g_2=\partial(\partial\{G\}/\partial g_2)/\partial g_1, \qquad (5.90\,b)$$

对于一般情况有类似定义，而

$$W = H(g_1)\circledast H(g_2)\circledast\cdots\circledast H(g_K)。 \qquad (5.90\,c)$$

5.53 利用式(5.90)，证明式(5.28)和(5.30)也可以表示为如下形式：

$$T=\partial^m\{G\}/\partial L_1\partial L_2\cdots\partial L_m, \qquad (5.91\,a)$$

$$T=\partial^r\{G\}/\partial C_1\partial C_2\cdots\partial C_r。 \qquad (5.91\,b)$$

(提示：对于式(5.91 a)，应用式(5.28)，对于式(5.91 b)，应用式(5.30))(CHEN and MARK[1969])

5.54 应用式(5.91)，证明恒等式(5.38)和(5.40)也可以表示为

$$T=\frac{\partial^{K-1}T'\times T''}{\partial(P'_{i_1i_2}\cup P''_{i_2i_1})\partial(P'_{i_2i_3}\cup P''_{i_3i_2})\cdots\partial(P'_{i_{K-1}i_K}\cup P''_{i_Ki_{K-1}})}, \qquad (5.92\,a)$$

$$\overline{T}=\frac{\partial^{K-1}T'(I')\times T''(I'')}{\partial C_{i_1}\partial C_{i_2}\cdots\partial C_{i_{K-1}}}。 \qquad (5.92\,b)$$

(CHEN and MARK[1969])

5.55 证明如果 $C_{ij}=e_1e_2\cdots e_K$ 是将图G中节点 i 和 j 分开的割集，以及 $Y(\overline{e}_q)$ 是G的 2 树 $t(i,\ j)$ 的集合，其中每个 2 树不含有边 e_q($q=1,\ 2,\ \cdots,\ K$)，则G的树集由下式给出：

$$T=Z(e_1)\oplus Z(e_2)\oplus\cdots\oplus Z(e_K), \qquad (5.93)$$

式中 $Z(e_q)=\{e_q\}\times Y(\overline{e}_q)$。

5.56 应用式(5.91)和(5.92)中给出的公式，生成如图5.14和5.16所示图的树和补树的集合。

5.57 设 $P(H)=\{E_1,\ E_2,\ \cdots,\ E_q\}$ 是图G中树的边集H的一个划分，设 $G(E_x)$($x=1,2,\ \cdots q$)是从G中短接所有在H中但不

在E_x中的边所得的图。证明如果T_x表示$G(E_x)$的树集，则G的树集由下式给出：

$$T \quad T_1 ⓐ T_2 ⓐ \cdots ⓐ T_q \tag{5.94}$$

式(5.94)的对偶结论是什么？（提示：应用式(5.30)，以及下列事实：短接树的一条树支，由这树的其它树支所限定的f割集不受影响）(BERGER and NATHAN[1968])。

5.58 考虑一n节点完备图G_c，对其每条边赋以一个称为长度的非负权，树长定义为树支长度之和。为了简便起见，假定不存在同样长度的G_c树，证明回路的最长边决不属于最短树，以及除了最短树之外，每个树至多只有一条树支不包含在较短树的并之内。（提示：利用初等树变换）(DIJKSTRA[1960])。

5.59 利用习题5.58中得出的结论，对构造G_c的最短树给出一个算法。

5.60 在习题5.58中，设G_c的所有树以长度增长的次序排列，即t_0、t_1、t_2、…，如果最短树t_0的q条树支含于树t_K中，证明标号K必定满足不等式：$k \geq 2^q \quad 1$(DIJKSTRA[1960])。

5.61 证明图的每一个割集至少含有K条边，当且仅当任一树的r 1条边的每一个集合至少处于K个不同树中。

5.62 对树t的每一条树支赋以一个正数。t的两个节点i和j之间距离d_{ij}是连接t的节点i和j之间唯一路径中的树支权之和。（只要略作修改，这里的定义似比习题5.11中给出的更一般些）。以d_{ij}为元素的矩阵D(d_{ii}取为0)称为t的距离矩阵。证明对于一给定的n×n阶非负对称矩阵D是树的距离矩阵的必要和充分条件是对于所有i，有d_{ii} 0，以及对于所有i，j和K，有

$$d_{ij} \leq d_{ik} + d_{Kj} \tag{5.95}$$

(HAKIMI and YAU[1964])

5.63 在习题5.62中，如果 $n \geqslant 4$，证明D是可实现的，当且仅当其每个 4×4 阶主子阵可实现为树(PEREIRA[1969])。

5.64 利用习题5.11中给出的结论，推广习题5.62和5.63到任何图。

5.65 对于一个给定的有向图 G_d，设 t_n^r 是以n为参考节点的参考有向树。用 $t_n(E_q)$ 表示在 G_d 中以n为参考节点的有向树，它有 $t_n(E_q)\cap t_n^r = E_q$，这里 E_q 是 t_n^r 的子图。用 $T_n(E_q)$ 表示所有 G_d 的有向树 $t_n(E_q)$ 的集合。证明如果 $t_n^r = e_1e_2\cdots e_r$ 的树支标号使得每个子图 $e_1e_2\cdots e_x(x=1, 2, \cdots, r)$ 都是连通的，以及 $E_q = e_{i_1}e_{i_2}\cdots e_{i_q}$ 和 $i_1<i_2<\cdots<i_q$，则有

$$T_n(E_q)=\{t_n:\ t_n=(t'_n\oplus e_{i_q})\cup e,\ t'_n \text{ 在 } T_n(E_{q-1}) \text{ 中},$$
$$e \text{ 在 } Q_{t_n^r}(e_{i_q})\cap\xi(e_{i_q}) \text{ 中}，e_{i_q} \text{ 在 } t_n\cap t_n^r \text{ 中},$$
$$\text{以及 } e\neq e_{i_q}\}, \tag{5.96}$$

又

$$T_n(\bar{E}_q)\cap T_n(E'_p)=S_t, \tag{5.97}$$

当且仅当 E_q 和 E'_p 是 t_n^r 的两个不同的子图，这里 $\bar{E}_q$ 表示 t_n^r 中 E_q 的互补，$\xi(e_{i_q})$ 表示由所有和 e_{i_q} 有相同起始节点的边组成的 G_d 的子图，以及 $P, q=1, 2, \cdots, r$。(提示：参见定理5.34)(PAUL[1967])。

5.66 连通图G的树矩阵 $T=[t_{ij}]$ 定义为其列对应于G的边 e_j，而其行对应于G的树 t^i 的矩阵，如果 e_j 在 t^i 中，则 $t_{ij}=1$，否则，$t_{ij}=0$。证明如果 T^* 是在T中添加一第 $(b+1)$ 列，其元素全为1，所得的增广矩阵，则 T^* 的秩是 $b-P+1$，当且仅当G含有P个分离子图(HAKIMI[1961])。

5.67 设F是至少含有两个大子阵的矩阵。证明F的大子阵可以排列成序(行)。在序列中的两个相继元素间仅有一个列不相同(KAMAE[1972])。

5.68 证明集合𝒲的所有子集的集合𝒮在整数模2域上构成一个线性矢量空间。

5.69　证明定理5.40。

5.70　在习题5.14中，设$\mathscr{V}(C)$，$\mathscr{V}(L)$和$\mathscr{V}(G)$分别是与割切、回路或边不相接回路的并，和不含有孤立节点的G的子图的集合相关联的矢量空间．给出一个例子，显示$\mathscr{V}(C)$和$\mathscr{V}(L)$一般不构成$\mathscr{V}(G)$的正交互补，你能证明这一点吗？

5.71　利用习题5.70中所定义的符号，证明如果G是连通的，则子空间$\mathscr{V}(C)$和$\mathscr{V}(L)$在整数模2域上是$\mathscr{V}(G)$的正交互补的必要和充分条件是图G含有一个奇数的树或补树。推广这个结论到G是不连通的情况(CHEN[1971 a])。

5.72　利用习题5.71的结论，证明如果G含有的树数为奇数，则G的任何子图可以唯一地表示为G的切割和回路或边不相接回路的并的环和。

5.73　利用习题5.70中定义的符号，证明在整数模2域b-矢量是处于子空间$\mathscr{V}(C)$和$\mathscr{V}(L)$的交中，当且仅当它是处于由G的基本割集矩阵的行和基本回路矩阵的行所形成的矩阵的零空间中 (CHEN [1971 a])。

5.74　在习题5.70中，证明对应于图G本身的矢量处于子空间$\mathscr{V}(C)$和$\mathscr{V}(L)$的和中。应用这个结论证明G总是可以表示为G的切割和回路或边不相接回路的并的环和 (CHEN [1971 a])。

5.75　设$H_4=\{1, 2, 3, 4\}$，证明下列每一项均是H_4的基本互补划分对，以及它们是H_4的唯一基本互补划分对：

[{1, 2, 3, 4}, {1; 2; 3; 4}]　[{1, 2, 3; 4}, {1, 4; 2; 3}]

[{1, 2, 3, 4}, {1; 2, 4; 3}]　[{1, 2, 3; 4}, {1; 2; 3, 4}]

[{1, 2, 3; 4}, {1, 3; 2; 4}]　[{1; 2, 3, 4}, {1, 2; 3; 4}]

[{1, 2, 3, 4}, {1, 4; 2; 3}]　[{1, 4; 2, 3}, {1, 3; 2; 4}]

[{1, 4; 2, 3}, {1, 2; 3; 4}]　[{1, 4; 2, 3}, {1; 2, 4; 3}]

[{1, 4; 2, 3}, {1; 2; 3, 4}]　[{1, 3, 4; 2}, {1; 2, 3; 4}]

[{1, 3, 4; 2}, {1, 2; 3; 4}]　[{1, 3, 4; 2}, {1; 2, 4; 3}]
[{1, 3; 2, 4}, {1; 2, 3; 4}]　[{1, 3; 2, 4}, {1, 2; 3; 4}]
[{1, 3; 2, 4}, {1, 4; 2; 3}]　[{1, 3; 2, 4}, {1; 2; 3, 4}]
[{1, 2, 4; 3}, {1; 2, 3; 4}]　[{1, 2, 4; 3}, {1, 3; 2; 4}]
[{1, 2, 4; 3}, {1; 2; 3, 4}]　[{1, 2; 3, 4}, {1; 2, 3; 4}]
[{1, 2; 3, 4}, {1, 3; 2; 4}]　[{1, 2; 3, 4}, {1, 4; 2; 3}]
[{1, 2; 3, 4}, {1, 2, 4; 3}]。

(对于H_5，参见CHEN and GOYAL[1971])。

5.75　证明如果$C[P'(H_k), P''(H_k)]$是基本的，则相对于H_k的任一j，它是互补的。

第六章　具有规定度数的有向图的实现

正如标题所指出的那样，本章的主要目的是对于规定入度和出度的有向图的存在性，提出一般的必要和充分条件，特别是把一组非负整数作为图的节点的度数的可实现性条件。同时也研究例如一组非负整数对为各种类型的有向图，一组非负整数的唯一可实现性以及加权有向图的存在性等其他有关的问题。

研究这些问题的目的在于这样一种情况：具有规定度数的有向图的存在性问题，与具有规定行和列之和的非负整数的方阵的存在性是等同的。另一原因是这些结果有着潜在的应用。例如，当给定碳原子数时，在计算饱和碳氢化合物 C_nH_{2n+2} 的异构体中，这问题等效于列出所有的树，其中每个节点的度为1或4。作为另一个例子，考虑化学式 N_2O_3，为了求这化学式的异构体，有必要生成实现一组整数2，2，2，3，3作为节点的度的全部连通图。对于有兴趣的读者可以查阅SENIOR[1951 a]，那里有更详细的论述。其实正是这种有机化合物之间的异构体现象引起SENIOR[1951 b]研究这个问题。

象其它章节一样，这一章主要以一些公开发表的论文中所涉及的基本重要内容为基础，一般主要来自CHEN[1966 c]最近的研究成果。

§1. (P, S)-有向图的存在性和可实现性

对于n-节点的有向图 G_d，设 $d^+(i)$ 和 $d^-(i)$ 分别是节点 i 的出

度和入度。非负整数对 $[d^+(i), d^-(i)]$ 称为节点 i 的度对，另一方面，如果给定一组非负整数对 $(a_i, b_i)(i=1, 2, \cdots, n)$，怎样可以知道是否存在一个 n 节点的有向图，其节点 i 具有度对 (a_i, b_i)？如果这样的 G_d 存在，就说非负整数对集 (a_i, b_i) 是可实现的，或者说有向图实现了对集 (a_i, b_i)。显然，并不是每个集合都是可以实现的。例如，非负整数对集(1, 1)和(1, 2)是不可实现的。在这一节中，对具有规定度数的称为 (P, S)-有向图一类的有向图的存在性，提出一些必要和充分条件。从给定可实现的非负整数对集中，利用有向二分图的概念，对构成这样一个 (P, S) 有向图的主要定理作出简易推导证明，并提出了一种简单构成方法。

在整个章节中，$\{(a_i, b_i)\}$ 指的是一组 n 个非负整数对 (a_i, b_i) $(i=1, 2, \cdots, n)$。类似地，$\{a_i\}$ 和 $\{b_i\}$ 分别表示 n 个非负整数集。如果 G_d 具有从节点 i 到节点 j 的并联边，则任意选择其中一个，并用 (i, j) 来表示。因此，(i, j) 表示 G_d 中从节点 i 到节点 j 的任何一个并联边。特别对于 $i=j$，(i, i) 表示在节点 i 上的任何一个自环。对于一个有限集 S，其元素的数目用 $\alpha(S)$ 来表示。类似地，用 $\alpha(i, j)$ 表示 G_d 中从节点 i 指向节点 j 的并联边的数目。

定义 6.1：(P, S)-有向图。

(P, S)-有向图是一个有向图，其中对所有 $i \neq j$，有 $\alpha(i, j) \leqslant P$，对所有的 i，有 $\alpha(i, i) \leqslant S$，这里 P 和 S 是给定的非负整数。当 $P=S$ 时，(P, S)-有向图就简称为 P 有向图。

字母 P 和 S 分别表示并联和自环这两个词。在图 6.1 中，有向图是一个(3,2)有向图，因为并联边的最大数是 3，而自环的最大数是 2。显然，对于任何 $P \geqslant 3$ 和 $S \geqslant 2$ 来说，它也是一个

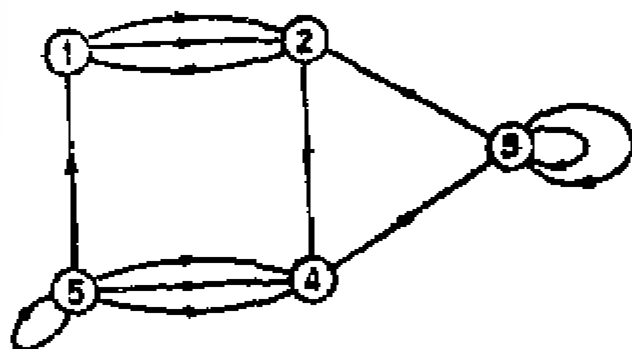


图 6.1 说明度对的有向图

(P, S)-有向图，有向图的度对集由下式给出：

$$\{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (5, 1)\}。\quad (6.1)$$

1.1 有向图和有向二分图

对于具有节点集V的任一有向图 G_d，有一个用有向二分图 B_d 的等效表示法：对于 G_d 的节点集 V，可以构成一个仿形 V′，其元素与V的元素处于一一对应关系。当且仅当在 G_d 中存在一条边(i, j)，则边(i, j′)是 B_d 的一条边，其中 i 在V中，而 j′ 在 V′ 中，各条并联边一一单独考虑。换言之，在 G_d 和 B_d 中，有 $\alpha(i, j)=\alpha(i, j')$。有向图 B_d 就称为 G_d 的对应有向二分图。反之，在具有 $\alpha(V)=\alpha(V')$ 的有向二分图中，显然在V和 V′ 中节点之间存在一一对应关系。如果将 B_d 的这些对应节点V和 V′ 等同起来，则得到 B_d 的对应有向图。显然在 B_d 中，对在V中所有节点 i，有 $d^-(i)=0$，而对在 V′ 中所有节点 i′，有 $d^+(i')=0$。此外，在 G_d 节点 i 上出度和入度分别与 B_d 的V中节点 i 的出度和 V′ 中节点 i′ 的入度相同。因此，实现具有规定出度和入度的有向图的问题，等效于求具有规定的V中节点出度和 V′ 中节点入度的有向二分图的问题。在 B_d 和 G_d 之间的对应关系，使得有可能从一种结果转到另一种结果。

作为一个例子，考虑如图 6.1 给出的有向图 G_d，G_d 的对应有向二分图 B_d 在图 6.2 中给出，这里 1，2，3，4，5 和 1′，2′，3′，4′，5′，分别是 B_d 的V和 V′ 的对应节点集。反之，如果 B_d 是给定的，并规定了对应节点，则其对应有向图 G_d 可以用唯一而简单的方式得出，它们是属于同构的。可以注意到，选择不同的节点对应关系，可以得到不同的 G_d。例如，在图 6.2 中如果把 1，2，3，4，5 和 2′，3′，1′，5′，4′ 分别认为是V和 V′ 的对应节点，则如图 6.3 所示的对应有向图是 (2, 3)-有向图，这肯定与图 6.1 所开的图不是同构的。为了得到唯一的关系，在下面假定 B_d 的所有节点以这样的方式标号，即 i 和 i′ 是 B_d 的对应节点。

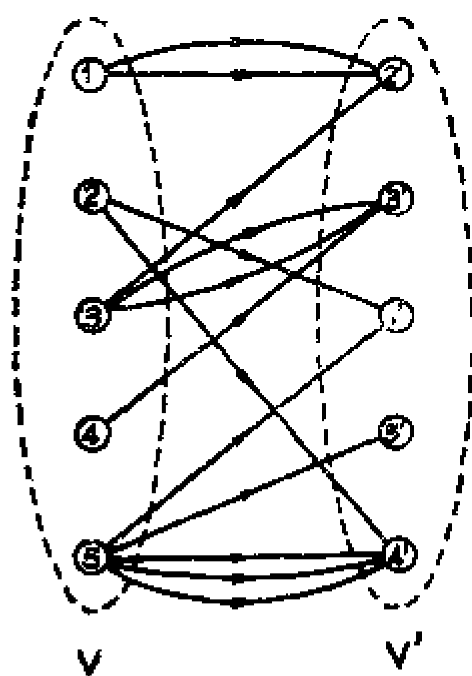


图 6.2 图6.1有向图的对应有向二分图

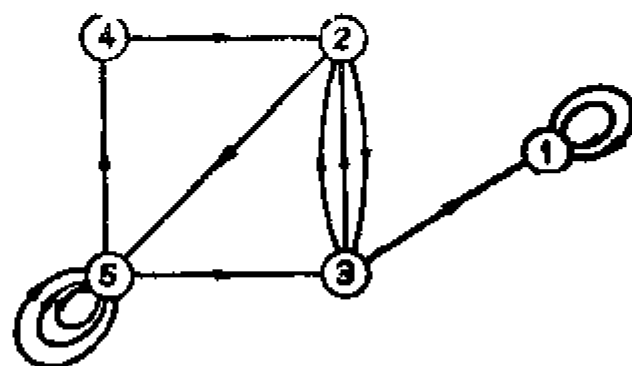


图 6.3 图6.2有向二分图的对应有向图

1.2 存在性

一组非负整数对成为 n 节点(P，S)-有向图的节点度对的可实现性可以用下述定理来阐述：

定理 6.1：实现n个非负整数对集$\{(a_i, b_i)\}$为n-节点(P,S)-有向图的节点度对的必要和充分条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.2a}$$

以及对于$\{a_i\}$的所有非空子集 S_A，

$$\sum_{a_i \in \bar{S}_A} \min[a_i,\ \alpha(S_A)P] + \sum_{a_i \in S_A} \min\{a_i,\ [\alpha(S_A)-1]P+S\}$$

$$\geqslant \sum_{b_K \in S_B} b_K \tag{6.2b}$$

式中 $\bar{S}_A$ 是$\{a_i\}$中集 S_A 的补集，而 S_B 是$\{b_i\}$中 S_A 的对应集，即当且

仅当 a_i 是在 S_A 中时，b_i 在 S_B 中。

证明：这两个条件的必要性是很容易得到的。假定 B_d 是具有已实现 (P, S)-有向图 G_d 的具有节点集 VV′ 的对应有向二分图。显然，V 中节点的出度之和等于 V′ 中节点的入度之和。因此，式(6.2a)成立。

设 V_A 和 V'_B 分别是 V 和 V′ 中非空子集 S_A 和 S_B 的对应节点集，那么在 B_d 中具有形式(i, j′)($i\in V_A$，而 $j'\in V'_B$)的最大边数由下式给出：

$$\sum_{i\in V_A}\min\{d^+(i),\ [\alpha(V'_B)-1]P+S\}$$

类似地，在 B_d 中具有形式(i, j′)($i\in \overline{V}_A$，而 $j'\in V'_B$)的最大边数由下式给出：

$$\sum_{i\in \overline{V}_A}\min[d^+(i),\ \alpha(V'_B)P]$$

式中 $\overline{V}_A$ 表示V中 V_A 的补集，从而有

$$\sum_{i\in \overline{V}_A}\min[d^+(i),\ \alpha(V'_B)P]+\sum_{i\in V_A}\min[d^+(i),\ [\alpha(V'_B)-1]P+S\}$$

$$\geqslant \sum_{K'\in V'_B} d^-(K')。$$

由于 $d^+(i)=a_i$ 对V中的所有i，

$d^-(K')=b_K$ 对 V′ 中的所有 K′，

以及 $\alpha(V'_B)=\alpha(V_A)$，则式(6.2b)可以从上述不等式中直接得出。

这两个条件的充分性证明涉及很多内容，因而在下一节中给出。

现在可以得出这定理的简便形式，如果设P和S可以任意大，则定理的第二个条件总是满足的；因此，有下列推论：

推论 6.1：实现集合$\{(a_i, b_i)\}$为n-节点有向图的节点度对的必要和充分条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.3}$$

如果S=0，P=∞，可以得出HAKIMI[1965]的结果。

推论 6.2： 实现集合$\{(a_i, b_i)\}$为$n\geq 2$，无自环的n节点有向图的节点度对的必要和充分条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.4 a}$$

以及对于$j=1, 2, \cdots, n$

$$\sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} a_i \geq b_j \tag{6.4 b}$$

如果集合$\{(a_i, b_i)\}$的元素是有序的，即对于$i=1, 2, \cdots, n-1$，

$$a_i + b_i \geq a_{i+1} + b_{i+1} \tag{6.5}$$

那么当且仅当

$$\sum_{i=2}^{n} a_i \geq b_1 \tag{6.6}$$

式(6.4 b)满足（对于推论的特殊情况，参见习题6.13）。

置$S=P$，对于S_A的每一种选择，式(6.2 b)可以简化为

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, \alpha(S_A)P] \geq \sum_{b_k\in B} b_k \tag{6.7}$$

如果b是有序的，即对于$i=1, 2, \cdots, n-1$，$b_i\geq b_{i+1}$，那么对于$k=1, 2, \cdots, n$，当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, kP] \geq \sum_{j=1}^{k} b_j \tag{6.8}$$

不等式(6.7)满足。这就形成了BERGE[1962]的定理。

推论6.3： 考虑一集合$\{(a_i, b_i)\}$，其中如果有必要，可以改

变标号，使对于i＝1，2，…，n－1，n≥2，有$b_i \geq b_{i+1}$，那么当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.9 a}$$

以及对于k＝1，2，…，n，

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, k_p] \geq \sum_{j=1}^{K} b_j \tag{6.9 b}$$

集合可以实现为n节点p-有向图的节点度对。

对于s＝p＝1的情况，推论6.3可以进一步简化。有可能改写结论形式，使之能更快地进行判断。这个结论首先是由RYSER［1957］和GALE［1957］在试图得出具有零元和具有规定行和列总和的矩阵的存在性条件中建立的。这等阶矩阵问题将在后一节中论述。

推论 6.4：在一给定的集合$\{(a_i, b_i)\}$中，改变b_i的标号，使得对于i＝1，2，…，n－1，n≥2，$b_i \geq b_{i+1}$。实现这一集合为n-节点1-有向图的节点对的必要和充分条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.10 a}$$

以及对于所有整数K，

$$\sum_{i=1}^{K} a_i^* \geq \sum_{j=1}^{K} b_j \tag{6.10 b}$$

式中a_i^*表示a_j大于或等于整数i的数，以及假定序列b_j和a_i^*具有相同的长度（如果有必要，可以增加适当的零数）。

证明：根据推论6.3，只要证明对所有整数k，下式成立就够了，

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, k] = \sum_{j=1}^{k} a_j^* \tag{6.11}$$

在整数 k 上利用归纳法来证明以上恒等式。对于 $k=1$，显然根据定义有

$$\sum_{i=1}^{n}\min[a_i,\ 1]=a_1^*$$

假定对所有 k，式(6.11)成立。对于 $k+1$，需要证明式(6.11)也成立。由于对于 $a_i\leqslant k$，

$$\min[a_i,\ k+1]=\min[a_i,\ K]$$

以及对于 $a_i\geqslant k+1$，

$$\min[a_i,\ K+1]=\min[a_i,\ K]+1$$

从而有

$$\sum_{i=1}^{n}\min[a_i,\ K+1]=a_{K+1}^*+\sum_{i=1}^{n}\min[a_i,\ K]$$

$$=a_{K+1}^*+\sum_{j=1}^{K}a_j^*$$

第二行是根据归纳假设而得出的，推论证毕。

有一种对数目 a_j^* 的简单图表示方法：设用一排 a_i 个点来表示每个整数 a_i，将这些行垂直排列，使得 a_{i+1} 处于 a_i 之下，那么数目 a_j^* 就是阵列中第 j 列的点数。例如，设 $a_1=5$，$a_2=4$，$a_3=4$，$a_4=3$ 以及 $a_5=1$，对应于这些整数的阵列如下所示.

	a_1^*	a_2^*	a_3^*	a_4^*	a_5^*	a_6^*	a_7^*
a_1	•	•	•	•	•		
a_2	•	•	•	•			
a_3	•	•	•	•			
a_4	•	•	•				
a_5	•						

(6.12)

因此有 $a_1^*=5$，$a_2^*=4$，$a_3^*=4$，$a_4^*=3$，$a_5^*=1$ 以及对 $i\geqslant 6$，$a_i^*=0$，它们是对应于阵列中列的点数。显然，它们是与$\{a_i\}$的元素次序无关的。事实上，对于给定的集合$\{a_i\}$，如果定义

$$\{a_i\}^* = \{a_j^*: j = 1, 2, \cdots\} \quad (6.13)$$

则$\{a_i\}^*$确定$\{a_i\}$，这是因为整数a_i在$\{a_i\}$中恰好出现$a_x^* - a_{x+1}^*$次$(x = a_i)$。

集合$\{a_i\}^*$称为$\{a_i\}$的对偶集。事实上，在$\{a_i\}$和$\{a_i\}^*$之间的对应关系在下列意义上完全是对偶的：

$$\{\{a_i\}^*\}^* = \{a_i\} \quad (6.14)$$

按照以上所讨论的图表示法的观点来看，式(6.14)的有效性是非常清楚的，这个结论在后述中不需要，因而其证明留作为练习（习题6.3）。

让我们言归正传，回到定理6.1，并考虑其它的特殊情况，其中一种情况是由FULKERSON[1960]所研究的，他稍微改变一下问题的内容，考察在什么条件下有在给定节点的出度和入度，没有并联边的无自环n节点有向图，这是定理6.1对s=0和p=1的一种特殊情况。因此，有以下推论。

推论6.5 实现集合$\{(a_i, b_i)\}$为n节点(1, 0)有向图的节点度对的必要和充分条件为

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i \quad (6.15a)$$

以及对于所有$\{a_i\}$的非空子集S_A，

$$\sum_{a_i \in S_A} \min[a_i, K-1] + \sum_{a_i \notin S_A} \min[a_i, K] \geq \sum_{b_i \in S_A} b_i, \quad (6.15b)$$

式中$K = \alpha(S_A)$和$n \geq 2$。

象主要定理一样，式(6.15b)的存在性条件包括一组$2^n - 1$个不等式。如果可以简化为一组n个不等式，则会有很大的实际意义。只要正确排列整数a_i和b_i的次序，这是有可能的。结论如下给出：

推论6.6： 假设有一集合$\{(a_i, b_i)\}$，其中如果有必要，可以改变标号，使对于$i=1, 2, \cdots, n-1$，$n \geq 2$，有$b_i \geq b_{i+1}$，并有如

果 $b_i \geq b_{i+1}$，则 $a_i \geq a_{i+1}$，那么当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.16 a}$$

$$\sum_{i=1}^{n} \min[a_i, n-1] \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.16 b}$$

以及对于 $K=1, 2, \cdots, n-1$，

$$\sum_{i=1}^{K} \min[a_i, K-1] + \sum_{i=K+1}^{n} \min[a_i, K] \geq \sum_{i=1}^{K} b_i \tag{6.16 c}$$

集合可实现为n节点(1, 0)-有向图的节点度对［对于式(6.16 b)的等效表示法，参见习题 6.68］。

证明：必要性 式(6.16 b)和(6.16 c)可直接根据式(6.15 b)分别取 $S_B=\{b\}$ 和 $S_B=\{b_i;\ i=1, 2, \cdots k\}$ 得出。

充分性。对于 $S_B=\{b_i\}$，显然式(6.16 b)含有式(6.15 b)。为了证明对于{b}的所有非空真子集 S_B，式(6.16 c)含有式(6.15 b)，对于 $t=1, 2, \cdots$，设

$$a_t^*(S_A) = \alpha(\{a_i;\ a_i \text{ 在 } S_A \text{ 中以及 } a_i \geq t\}) \tag{6.17}$$

显然有

$$a_t^* = a_t^*(\{a_i\}) \tag{6.18}$$

换言之，只要被使用的是$\{a_i\}$的真子集，就回复到原来的函数符号。于是式(6.15 b)的左边可以写为

$$a_K^*(S_A) + \sum_{t=1}^{K-1} a_t^*$$

式中对于 $k=1$，第二项定义为零。如果可以证明，令 $S_B=\{b_i;\ i=1, 2, \cdots, K\}$，在 $\alpha(S_B)=K$ 的所有 S_A(或)S_B 上，方程式的右边

$$\sum_{t=1}^{K-1} a_t^* \geq \sum_{b_i \in S_B} b_i - a_K^*(\bar{S}_A)$$

是最大，那么充分性的证明就可以完成。这确实是正如下面所要证

明的情况：

设 S_B 是具有 $\alpha(S_B)=k$ 的 $\{b_i\}$ 的任一真子集，假定 $S_B\neq\{b_i;\ i=1,2,\cdots,K\}$，设 b_x 是 $\{b_i;\ i=1,2,\cdots,K\}$ 中但不在 S_B 中的一个元素，并设 b_y 是在 S_B 中但不在 $\{b_i;\ i=1,2,\cdots,K\}$ 中的一个元素。根据 b_i 的次序，显然有 $x<y$。考虑集合 $S_B'=(S_B-\{b_y\})\cup\{b_x\}$ 及其 $\{a_i\}$ 中的对应集合 S_A'。显而易见，$a_K^*(\overline{S_A'})$ 和 $a_K^*(\overline{S_A})$ 至多相差 1，这里 $\overline{S_A}$ 表示 $\{a_i\}$ 中 S_A 的补集。因此对于 $b_x\neq b_y$，有

$$\sum_{b_i\in S_B'} b_i - a_K^*(\overline{S_A'}) \geqslant \sum_{b_i\in S_B} b_i - a_K^*(\overline{S_A}) \tag{6.19}$$

这是因为有

$$\sum_{b_i\in S_B'} b_i > \sum_{b_i\in S_B} b_i \tag{6.20}$$

对于 $b_x=b_y$ 的情况，式(6.20)改用等号亦成立，在规定 $a_x\geqslant a_y$ 的序次下，有

$$a_K^*(\overline{S_A'}) \leqslant a_K^*(\overline{S_A}) \tag{6.21}$$

所以对于这种情况，式(6.19)仍然有效。由于 S_B' 与 S_B 在共同的 $\{b_i;\ i=1,2,\cdots K\}$ 下，S_B' 比 S_B 多一个元素，显然从 S_B 中重复利用这个过程，可以得出 $\{b_i;\ i=1,2,\cdots,K\}$。因此根据式(6.16 c)，对 $\{b_i\}$ 的所有非空真子集 S_B 有：

$$\sum_{i=1}^{K-1} a_i^* \geqslant \sum_{i=1}^{K} b_i - a_K^*(\{a_j;\ j=K+1,\cdots,n\})$$

$$\geqslant \sum_{b_i\in S_B} b_i - a_K^*(\overline{S_A})$$

因此得到了所要求的结论，推论证毕。

在考虑其它特殊情况之前，利用下面的例子来说明以上结论。

例 6.1：假设有以下非负整数对的集合：

$\{(a_i,\ b_i);\ i=1,\ 2,\ 3,\ 4\}=\{(3,\ 1),\ (2,\ 5),\ (1,\ 1),$

$$(0,\ 2)\}. \tag{6.22}$$

假定要求实现集合为 4 节点(2, 1)-有向图的节点度对，根据定理 6.1，可以检验这问题是否是可实现的，因为

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = 3+2+4+0=9$$

以及

$$\sum_{i=1}^{4} b_i = 1+5+1+2=9$$

式(6.2 a)是满足的，式(6.2 b)由 15(=2^4-1)个不等式组成，如下所示：

对于 $S_A=\{a_1\}$，有

$$\min(2,\ 2)+\min(4,\ 2)+\min(0,\ 2)+\min(3,\ 1)$$
$$=2+2+0+1=5\geqslant 1。$$

类似地，对于 $S_A=\{a_2\}$、$\{a_3\}$，以及$\{a_4\}$，有

$$2+2+0+1=5\geqslant 5$$
$$2+2+0+1=5\geqslant 1$$
$$2+2+2+0=6\geqslant 2$$

对于 $S_A=\{a_1,\ a_2\}$有

$$\min(4,\ 4)+\min(0,\ 4)+\min(3,\ 3)+\min(2,\ 3)$$
$$=4+0+3+2=9\geqslant 1+5=6$$

类似地，对于 $S_A=\{a_1,\ a_3\}$，$\{a_1,\ a_4\}$，$\{a_2,\ a_3\}$，$\{a_2,\ a_4\}$以及$\{a_3,\ a_4\}$，有

$$2+0+3+3=8\geqslant 1+1=2$$
$$2+4+3+0=9\geqslant 1+2=3$$
$$3+0+2+3=8\geqslant 5+1=6$$
$$3+4+2+0=9\geqslant 5+2=7$$
$$3+2+3+0=8\geqslant 1+2=3$$

对于 $S_A=\{a_1,\ a_2,\ a_3\}$，有

$$\min(0,\ 6)+\min(3,\ 5)\quad \min(2,\ 5)+\min(4,\ 5)$$

$$0+3+2+4-9\geqslant 1+5\quad 1=7$$

类似地，对于 S_A $\{a_1a_2a_4\}$，$\{a_1,\ a_3,\ a_4\}$以及$\{a_2,\ a_3,\ a_4\}$，有

$$4+3+2\quad 0\quad 9\geqslant 1+5+2\quad 8$$

$$2+3\quad 4\quad 0\quad 9\geqslant 1+1+2\quad 4$$

$$3\quad 2\quad 4+0\quad 9\geqslant 5+1+2+8$$

最后，对于 S_A $\{a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4\}$，有

$$\min(3,\ 7)+\min(2,\ 7)\quad \min(4,\ 7)+\min(0,\ 7)$$

$$3\quad 2\quad 4\quad 0\quad 9\geqslant 1+5+1+2\quad 9$$

因此，这问题有一个解，利用下一节所概述的算法，可以求得这一解。一种实现法如图 6.4 所示。

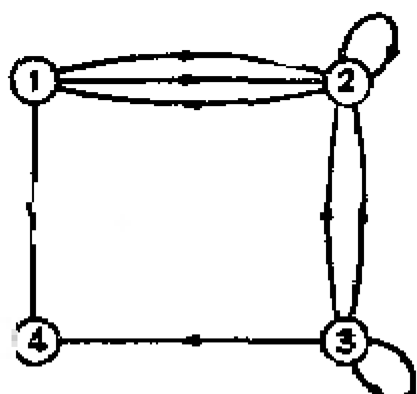


图 6.4　实现式(6.22)集合的(2, 1)-有向图

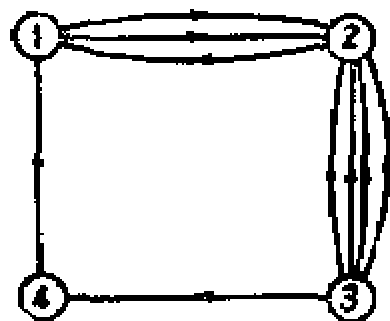


图 6.5　实现式(6.22)集合的无自环有向图

其次，假定要求知道集合是否能实现为无自环的有向图，则根据推论 6.2，只需检验下列四个不等式：

$$2+4+0\quad 6\geqslant 1$$

$$3\quad 4\quad 0\quad 7\geqslant 5$$

$$3+2+0\quad 5\geqslant 1$$

$$3+2+4\quad 9\geqslant 2。$$

因此存在一个 4 节点无自环的有向图，其节点度对就是式(6.22)中给出的，一个这样的实现法如图 6.5 所示。

最后考虑实现集合为 1 有向图，为了应用推论 6.4 中的结论，

对于$i=1, 2, 3$，有必要改变b_i的标号，使$b_i \geq b_{i+1}$，一种新的序列如下所示：

$$\{(a_i, b_i): i=1, 2, 3, 4\} = \{(2, 5), (0, 2), (4, 1), (3, 1)\} \qquad (6.23)$$

集合{2,0,4,3}的对偶集合由下式给出：

$$\{a\}^* = \{3, 3, 2, 1\}$$

应用式(6.10 b)，有

$$3 \ngeq 5$$

$$3+3=6 \ngeq 5+2=7$$

$$3+3+2=8 \geq 5+2+1=8$$

$$3+3+2+1=9 \geq 5+2+1+1=9$$

由于并不是所有不等式都满足，因此不存在实现集合为节点度对的1-有向图。

例 6.2：考虑图6.1的(3, 2)-有向图G_d，要求知道是否存在一个5-节点(1, 0)-有向图，其节点度对与G_d的相同，对于这问题的解由推论6.6给出，第一步是按照推论中所给出的规则，安排G_d的节点的出度和入度，结果如下：

$$\{(a_i, b_i): i=1, 2, 3, 4, 5\} = \{(1, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (5, 1)\}.$$

很容易检验式(6.16 a)是满足的，但是式(6.16 b)不满足，因为

$$1+3+2+2+4=12 \ngeq 4+3+3+2+1=13$$

因此，不能得出具有这些度的任一(1, 0)-有向图。显然这也易于直观得出，因为在任一5-节点(1, 0)-有向图中，节点的最大出度是4，而G_d具有出度为5的节点。但是，以下集合

$$\{(a_i, b_i): i=1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$=\{(1, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (4, 0)\}$$

是可实现的，因为式(6.16)中所有条件它都满足。

(6.16 a)：$1+3+2+2+4=12=4+3+3+2+0=12$

(6.16 b)：$1+3+2+2+4=12 \geq 4+3+3+2+0=12$

(6.16 c)：$0+1+1+1+1\ \ 4\geqslant 4$

$1+1+2+2+2=8\geqslant 4+3\ \ 7$

$1+2+2+2+3=10\geqslant 4+3+3\ \ 10$

$1+3+2+2+4\ \ 12\geqslant 4+3\ \ 3\ \ 2\ \ 12$

这样的一种实现法如图 6.6 所示。

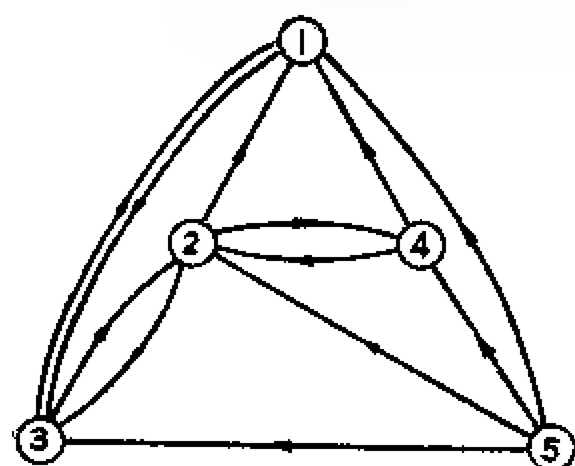


图 6.6 (1, 0) 有向图的实现

现在着手考虑其它的特殊情况，其原因是对这些特殊情况得出的条件是最简单的。但是在进行之前，首先表明在推论 6.6 中所给的条件可以置于另一种形式。

对一给定集合$\{a_i\}$以及 $k=1, 2, \cdots$，设

$$a''_k\ \ \alpha(I_k)+\alpha(J_k) \tag{6.24 a}$$

式中 $I_k=\{i;\ i<k,\ 以及\ a_i\geqslant k-1\}$ (6.24 b)

$J_k=\{i;\ i>k,\ 以及\ a_i\geqslant k\}$ (6.24 c)

象数 a^*_k 一样，数 a''_k 也有简单的图表示法，同样用点行来表示，但这次在阵列的主对角线上没有放点。例如，对应于集合{4，4，3，5，2}的阵列如下所示：

	a''_1	a''_2	a''_3	a''_4	a''_5	a''_6
a_1		•	•	•	•	
a_2	•		•	•	•	
a_3	•	•		•		
a_4	•	•	•		•	•
a_5	•	•				

数 a''_k 就是上面这一对角线上所受限制的点阵的第 k 列上的点数。因此，$a''_1\ \ 4$，a''_5-3，等等。利用这种描述，立即可以看到式(6.16 b)和式(6.16 c)的左边刚好分别是 $\sum_{i=1}^{n} a''_i$ 和 $\sum_{i=1}^{k} a''$。因此，式(6.16)的条件只不过是序列 b_i 的部分和是由序列 a''_i 的部分和来

支配决定的。

这个结论首先是由 FULKERSON[1960] 在研究具有零元和给定行和列之和的方矩阵的存在性中所指出的。

推论 6.7：考虑一集合$\{(a_i, b_i)\}$，其中如果有必要，可以改变标号，使对于 $i=1, 2\cdots, n-1$，$n\geq 2$，有 $b_i\geq b_{i+1}$，而且如果 $b_i=b_{i+1}$，则 $a_i\geq a_{i+1}$，那么当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.25 a}$$

以及对于 $k=1, 2, \cdots, n$，

$$\sum_{i=1}^{k} a_i^{(k)} \geq \sum_{j=1}^{k} b_j \tag{6.25 b}$$

集合可实现为(1, 0) 有句图的节点度对。

如在推论 6.6 的证明中那样，根据类似的论证，可以得出上面推论的一般证明形式(习题 6.7 和 6.11)。

推论 6.8：在给定集合$\{(a_i, b_i)\}$中，如果可以改变 a_i 和 b_i 的标号，使对于 $i=1, 2, \cdots, n-1$，$n\geq 2$，有 $a_i\geq a_{i+1}$ 和 $b_i\geq b_{i+1}$，那么当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.26 a}$$

$$\sum_{i=1}^{n}\min[a_i, (n-1)P+S] \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.26 b}$$

对于 $k=1, 2, \cdots, n-1$，

$$\sum_{i=1}^{k}\min[a_i, (k-1)P+S] + \sum_{i=k+1}^{n}\min[a_i, kP] \geq \sum_{j=1}^{k} b_j \tag{6.26 c}$$

集合可实现为(P, S) 有向图($P\geq S$)的节点度对。

现在来研究称为半-正则有向图一类有向图的可实现性条件。

定义 6.2：半-正则有向图。

在有向图中对每个节点 i 来说，如果 $d^-(i)(d^+(i))$ 等于 k，则有向图称为具有入度(出度)为 k 的半-正则有向图。

推论 6.9： 在一给定集合 $\{(a_i, b_i)\}$ 中，其中如果有必要，可以改变标号，使对于 $i=1, 2, \cdots, n-1, n\geq 2$，有 $b_i\geq b_{i+1}$，那么当且仅当对于 $j=1, 2, \cdots, n$，有 $a_j=k$ 和 $b_j<n-1$，以及

$$\sum_{i=1}^{n} b_i = kn \qquad (6.27)$$

集合可实现为具有出度为 k 的半-正则(1, 0) 有向图的节点度对。

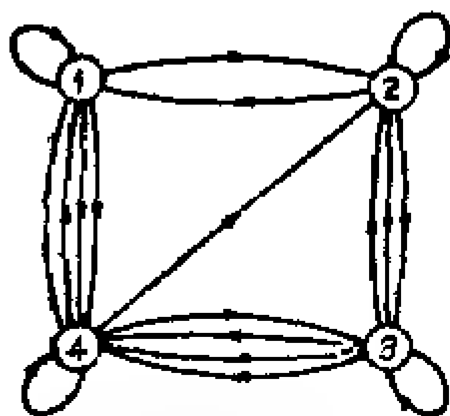


图 6.7　节点度对满足具有 p=2 和 s=1 的式(6.26)的(3, 1) 有向图

推论 6.10： 在上面推论中的集合，当且仅当 $a_i=b_i=k\leqslant(n-1)$，集合可实现度为 k 的正则(1, 0) 有向图的节点度对。

这两个推论的证明是简单的，留作为练习(习题 6.9)。

例 6.3： 有一有向图G_d如图 6.7 所示，假定要求构成具有与 G_d 相同度要求的 4 节点(2, 1)-有向图，这相当于实现以下集合

$\{(a_i, b_i); i=1, 2, 3, 4\}$

$\{(5, 6), (5, 4), (4, 4), (4, 4)\}$

为 4-节点(2, 1) 有向图的节点度对。由于集合中元素的次序已正确排列，则利用推论 6.8，需要检验下列式子：

(6.26 a)：$5+5+4+4=18=6+4+4+4$

(6.26 b)：$5+5+4+4=18\geqslant 6+4+4+4=18$

(6.26 c)：$1+2+2+2=7\geqslant 6$

$3+3+4+4=14\geqslant 6+4=10$

$$5+5+4+4=18\geqslant 6+4+4=14$$

因此，存在具有所要求度的4节点(2，1)-有向图。

例 6.4：考虑集合

$\{(a_i, b_i); i=1, 2, \cdots, 8\}$

$=\{(2, 3), (2, 3), (2, 3), (2, 3), (2, 1), (2, 1),$
$(2, 1), (2, 1),\}$

要求检验是否存在其节点度对是集合中所给定的无并联边的8-节点无自环有向图。由于根据推论6.9，对于$j=1, 2, \cdots, 8$，有$a_j=2$和$b_j<7$，以及

$$8\cdot 2=16=3+3+3+3+1+1+1+1=16$$

因此，这一问题有解，解可以利用在下一节中所描述的算法来得出。

I.3　用于实现的一种简单算法

如果所给定的条件满足定理6.1或者其它等效式中所述的约束条件，则迄今为止所描述结构的有用性取决于构成有向图的能力。这种构作步骤也可作为定理6.1充分性的证明。

设B_0是具有节点集V和V′的2n-节点有向二分图，$\alpha(V)=\alpha(V')=n$，而其对应有向图是(P，S)有向图。此外，对所有节点$i\in V$和$j'\in V'$，分别有

$$d^+(i)\leqslant a_i \text{ 和 } d^-(j)\leqslant b_j$$

式中i和i′是B_0的对应节点。

步骤 1：如果在B_0中，对于某些$i\in V$和$j\in V'$，或者对于$i=j$，满足

$$\alpha(i, j')<s \qquad (6.28\,a)$$

或者对于$i\neq j$，满足

$$\alpha(i, j')<p \qquad (6.28\,b)$$

则通过对B_0加进一条附加边(i, j')，可以从B_0构造一个新的有向二分图B_1。重复这个过程，一直到没有更多边可以加上去为止。设

由此得到的最终有向图用 $B_{\beta 1}$ 来表示，这里 β_1 是以上过程中所加的边数。显然对于 $t=1, 2, \cdots, \beta_1$，B_t 比 B_{t-1} 多一条边。

步骤 2：如果在 $B_{\beta 1}$ 中，存在一节点序列 $i_1, j_1', i_2, j_2', \cdots, i_q, j_q'(q \geqslant 2)$，这里 $i_u \in V$ 和 $j_u' \in V'$，以及

$$d^+(i_1) < a_{i_1} \text{ 和 } d^-(j_q') < b_{j_q} \tag{6.29 a}$$

并有对于 $u=1, 2, \cdots, q$，或者满足

$$\text{当 } i_u \neq j_u \text{ 时，} \alpha(i_u, j_u') < p \tag{6.29 b}$$

或者满足

$$\text{当 } i_u = j_u \text{ 时，} \alpha(i_u, j_u') < s \tag{6.29 c}$$

以及对于 $x=1, 2, \cdots, q-1$，

$$\alpha(i_{x+1}, j_x') > 0 \tag{6.29 d}$$

则通过移去边 $(i_{x+1}, j_x')(x=1, 2, \cdots, q-1)$，以及添加新边 $(i_u, j_u')(u=1, 2, \cdots, q)$，可以从 $B_{\beta 1}$ 构造一个新的有向二分图 $B_{\beta+1}$。重复这个过程，一直到没有更多的边加上去为止。设由此得到最终有向图用 B_β 来表示，这里 $\beta=\beta_1+\beta_2$，而 β_2 是步骤 2 中所加的边数。此外对于 $t=1, 2, \cdots, \beta$，同样有 B_t 比 B_{t-1} 多一条边。

余下的问题是如果集合 $\{(a_i, b_i)\}$ 满足定理 6.1 所加的约束条件，以及对于 B_β，步骤 1 和 2 的过程不再能重复进行下去，则 B_β 的对应有向图实现了集合。所给证明如下：

根据以上所述的构造过程，显然 B_β 是一个 (P, S)-有向图，而且对于 $i \in V$，有 $d^+(i) \leqslant a_i$，以及对于 $j' \in V'$，有 $d^-(j') \leqslant b_j$。由于假定 a_i 和 b_j 是有限的，则 β_1 和 β_2 必定也是有限的，过程将在某点上终止。如果可以表明：在生成的 B_β 中，等式 $d^+(i)=a_i(i \in V)$，和 $d^-(j')=b_j(j' \in V')$ 成立，那么 B_β 是可实现的。

在 B_β 中，设

$$V_1=\{i;\ i \in V \text{ 和 } d^+(i) < a_i\} \tag{6.30}$$

以及递归定义 V 的子集 x 和 V′ 的子集 X′ 如下：

(1) V_1 是X的一个子集，

(2) 如果 i 在X中，以及对于某个 $j \in V$，或满足 $\alpha(i, j') < P$

($\neq j$)，或满足 $\alpha(i, j') < s(i$ $j, j' \in V')$，那么 j' 在 X' 中。

(3) 如果 j' 在 X' 中，以及对于某个 $i \in V$，$\alpha(i, j') > 0$，那么 i 在 X 中。

B_β 是可实现的证明包括在下面的引理中。

引理 6.1：如果 V_+ 是空集，则 B_β 是可实现的。

证明，根据式(6.2 a)，满足 $d^-(j') < b_j$ 的 $j' \in V'$ 不存在，引理成立。

引理 6.2：对于每个 $j' \in X'$，有 $d^-(j') = b_j$。

证明：假设不是这样，则从子集X和 X' 的定义，存在具有步骤1或2中所述性质的一系列节点。由于根据假设没有这样的序列节点存在，从而得到引理。

应用引理6.1以及式(6.2 a)，下面的结论显然成立(习题6.12)。

引理 6.3：如果 V_+ 不是空集，那么至少存在一个节点 $j' \in (V'$ $X')$，有 $d^-(j') < b_j$。

引理 6.4：如果 $X \neq V$，那么对于每个节点 $i \in (V$ $X)$，有 $d^+(i)$ a_i，此外，没有形式为 (i, j') $(j' \in X')$ 的边。

引理 6.5：如果 $X' \neq V'$，那么对于每个 $i \in X$，以及 $j' \in (V' - X')$，有

$$当 i \neq j 时，\alpha(i, j') = P \qquad (6.31 a)$$

$$当 i \quad j 时，\alpha(i, j') = S \qquad (6.31 b)$$

这里 j 在V中。

对于V的每个子集 V_X，设 $S_A(V_X)$ 是 $\{a_i\}$ 的子集，限于当且仅当 i 在 V_X 中，则 a_i 在 $S_A(V_X)$ 中。类似地，对于 V' 的每个子集 V'_X，设 $S_B(V'_X)$ 是 $\{b_i\}$ 的子集，限于当且仅当 j' 在 V'_X 中，则 b_i 在 $S_B(V'_X)$ 中。根据引理6.4和6.5，下面的结论显然成立(习题6.14)。

引理 6.6：如果 $X' \neq V'$，则在 B_β 中边 (i, j') $(i \in V$ 以及 $j' \in (V'$ $X'))$ 的总数N由下式给出：

$$N = \sum_{a_i \in S_1} a_i + \sum_{a_j \in S_2} a_j + \sum_{a_i \in S_3} \{[\alpha(V_2) - 1]P + S\} + \sum_{a_i \in S_4} \alpha(V_2)P, \tag{6.32}$$

式中
$$S_1 = S_A[V - (V_2 \cup X)],$$
$$S_2 = S_A[V_2 \cap (V - X)]$$
$$S_3 = S_A[V_2 \cap X]$$
$$S_4 = S_A[V - \{V_2 \cup (V - X)\}]$$
以及 $V_2' = V' - X'$，V_2 是 $V_2' \in V$ 的对应节点集。

应用引理6.6以及引理6.3，以下引理显然成立。

引理 6.7：如果 V_1 不是空集，则

$$N < \sum_{b_i \in S_B(V_2')} b_i \tag{6.33}$$

但是，根据假设，对于每个非空子集 S_B，式(6.26)必定满足。特别是如果设 $S_B = S_B(V_2')$，则 $S_A = S_A(V_2)$，因而式(6.26)可以以稍微不同的形式写出：

$$\sum_{a_i \in S_1} \min[a_i,\ \alpha(S_A)P] + \sum_{a_i \in S_2} \min\{a_i,\ [\alpha(S_A) - 1]p + s\}$$
$$+ \sum_{a_i \in S_3} \min\{a_i,\ [\alpha(S_A) - 1]p + s\} + \sum_{a_i \in S_4} \min[a_i,\ \alpha(S_A)p]$$
$$= \sum_{a_i \in S_1} a_i + \sum_{a_j \in S_2} a_j + \sum_{a_i \in S_3} \{[\alpha(V_2) - 1]p + s\} + \sum_{a_i \in S_4} \alpha(V_2)p$$
$$\geq \sum_{b_i \in S_B(V_2')} b_i$$

因此，根据式(6.32)和式(6.33)，V_1 必定是空集。根据引理6.1，可以得出结论，B_β 是 $\{(a_i, b_i)\}$ 的实现，这就完成了充分性的证明。

用下面的例子来说明步骤1和2中所概述的方法。

例 6.5：考虑下列集合

$\{(a_i, b_i);\ i = 1, 2, \cdots, 8\}$

$= \{(2, 1), (2, 1), (2, 3), (2, 3), (2, 3), (2, 3),$

$\{(2, 1), (2, 1)\}$

由例 6.4 可以知道，这集合可实现为 8 节点 (1, 0) 有向图的节点度对。利用这一节中所概述的算法，实现具有以上性质的 (1, 0)-有向图。

在图 6.8 中，由对应于实线的边所组成的子图是 16-节点有向二分图 B_0，B_0 具有其对应有向图是 (1, 0) 有向图的性质。

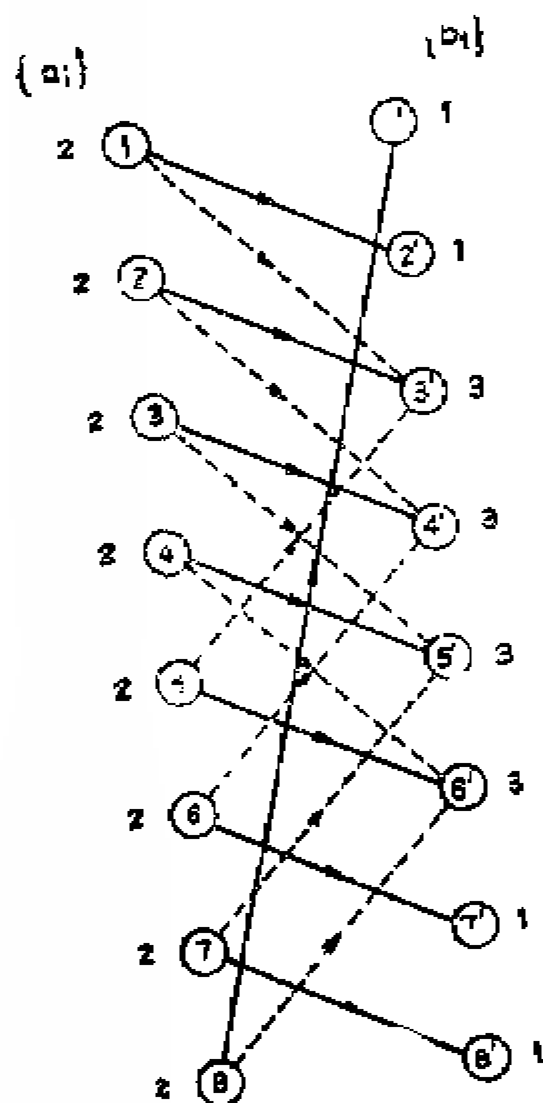


图 6.8 16-节点有向二分图

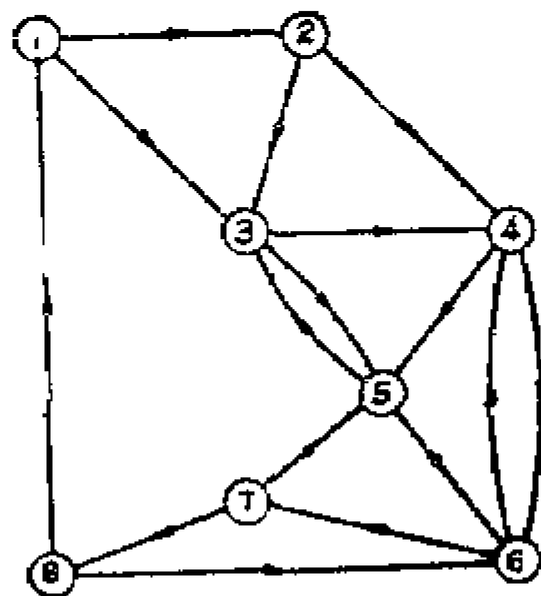


图 6.9 图 6.8 有向二分图对应的(1, 0)-有向图

步骤 1：在 B_0 中每次添加下列边中的一个

$\{(1, 3'), (2, 4'), (3, 5'), (4, 6'), (5, 3'),$

$(6, 4'), (7, 5'), (8, 6')\}$，

添加这些边的次序是无关紧要的。最终的有向二分图 B_3 如图 6.8 所示，其中用虚线表示的是附加边。

由于在V中没有 $d^+(i) < a_i$ 的节点 i，步骤 2 不必进行，在图 6.9 中所示的 B_3 的对应有向图是这一集合的实现

例 6.6：已知下列集合

$$\{(a_i, b_i); i=1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$=\{(1, 4), (3, 3), (2, 3), (2, 2), (4, 0)\}$$

可实现(参见例 6.2)为 5 节点 (1, 0)-有向图的节点度对。一种实现法在图 6.6 中给出，现要求构造另一个具有相同性质的有向图。

在图 6.10 中，由对应于实线的边所组成的生成子图是一个 10 节点有向二分图 B_0，B_0 具有其对应有向图是(1, 0) 有向图的性质。

步骤 1：在 B_0 中每次添加下列边中的一个。

$$\{(2, 1'), (3, 2'), (4, 3'), (4, 1')\}$$

最终有向二分图 B_4 如图 6.10 所示，其中附加边用虚线表示。

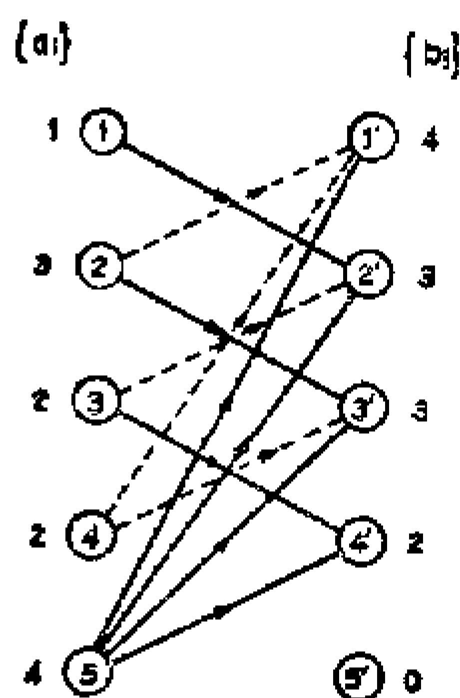


图 6.10 有向二分图 B_0

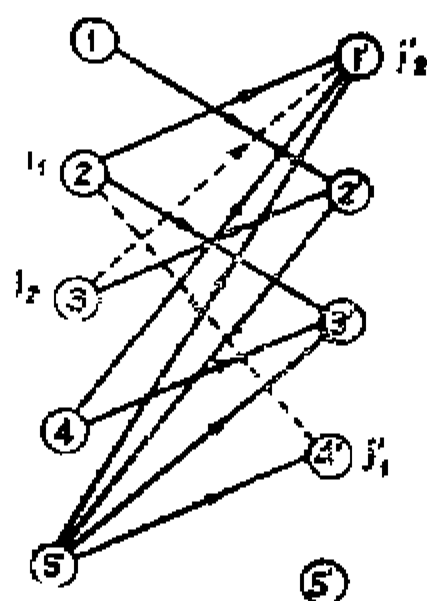


图 6.11 步骤 1 和 2 后产生的有向二分图 B_4

步骤 2：由于$d^+(2)\neq 3$，则存在具有式(6.29)中所描述性质的一系列节点，这种序列之一由节点$i_1=2$，$j_1'=4'$，$i_2=3$和$j_2'=1'$所组成。在B_4中如果移去边(3，4')，然后添加边(2，4')和(3，1')，则得到具有附加边用虚线表示的B_5，如图6.11所示。在V中由于不存在具有$d^+(i)<a$的节点i，则步骤2业已完毕。B_5的对应有向图如图6.12所示，它是这一集合的另一实现。有趣的是这两种实现不是同构的，因为一个具有长度为2的三个回路(图6.6)，而另一个只有两个这样的回路(图6.12)。

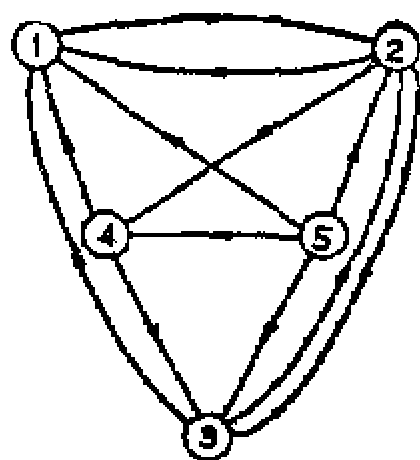


图 6.12 图6.11有向二分图的对应(1，0)-有向图

最后应当指出，在步骤2中所描述的节点序列实际上不是太难列举的，它等同于在有向二分图B_d中产生一个具有端点i_1和j_q'的交替路径P，B_d与B_t有相同节点集，以及具有$\alpha(i, j')=P(i\neq j)$和$\alpha(i, i')=S$的性质。显然B_t是B_d的子图。如果$\overline{B_t}$表示B_t在B_d中的补图，则在B_d中相对于B_t的交替路径指的是路径P(无向路径)，其中的边交替地属于B_t和$\overline{B_t}$，始于$\overline{B_t}$中的边(i_1, j_1')，在$\overline{B_t}$中的边(i_q, j_q')上终止。例如，路径P=(2，4')∪(3，4')∪(3，1')是B_d中相对于图6.10的B_4的一条交替路径。

1.4 度不变变换

从前面的讨论中明显地看到，如果一组非负整数对可实现为(p，s)-有向图的节点度对，则实现一般不是唯一的，而且在例6.6中已给出这样的一个例子，假定$\{G_d\}$表示所有可能实现的集合，从其中一个来生成$\{G_d\}$的问题是很有趣的，在这一节中将研究这一问题。

除非有另外的说明，在这章中当两个有向图G_1和G_2是同构

时，就认为它们是同构的，用 $G_1 \cong G_2$ 来表示。

定义 6.3：d-不变。

如果在 G_1 和 G_2 的节点之间存在一一对应关系，因而对应的节点具有相同的度对，则两个(p，s)有向图 G_1 和 G_2 被称为 d 不变。

定义 6.4：初等(p，s)d-不变变换。

如果在具有节点集 V 和 V′ 的有向二分图 B_d 中，存在两条边(i，j′)和(k，t′)，$i,k \in V$ 和 $j',t' \in V'$，以及 $i \neq k$，$j' \neq t'$，并有

如果 $i \neq t$，$\alpha(i, t') < p$　　(6.34 a)

如果 $i = t$，$\alpha(i, t') < s$　　(6.34 b)

如果 $k \neq j$，$\alpha(k, j') < p$　　(6.34 c)

如果 $k = j$，$\alpha(k, j') < s$　　(6.34 d)

在 B_d 中用边(i，t′)和(k，j′)代替边(i，j′)和(k，t′)的运算称为初等(p, s)d 不变变换。类似地，对于 $\alpha(V) = \alpha(V')$，在 B_d 的对应有向图 G_d 中替换对应边的运算称为 G_d 中初等(p，s)d 不变变换。

显然，这种变换结果形成 d 不变(p，s)-有向图。对于一个给定的(p，s)有向图 G_d，设$\{G_d\}$是来自 G_d 的所有可能的 d-不变(p、s)-有向图的集合。为了方便起见，假定$\{G_d\}$元素的所有对应节点用同一整数标号

定理 6.2：通过有限序列的初等(p，s)d-不变变换，$\{G_d\}$的两个(p，s)-有向图彼此之间可以互相变换(对于这变换需要的最小变换数，参见习题 6.59—6.11)。

证明：如在定义 5.9 中一样，首先在$\{G_d\}$中(p，s)-有向图的节点对之间引入一个距离，设 G_α 和 G_β 是$\{G_d\}$的任何两个非同构的(p，s)有向图，如果 $\alpha(i, j)$ 和 $\beta(i, j)$ 分别表示在 G_α 和 G_β 中从节点 i 指向节点 j 的边数，则 G_α 和 G_β 之间距离定义为

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{t}|\alpha(i, j) \quad \beta(i, j)|$$

式中 n 是 G_s 的节点数。

设$\{G_\alpha\}$是所有(p, s) 有向图的集合，其中 G_α 是可以通过有限序列的初等(p, s)d 不变变换而变换来的，以及设$\{G_\beta\}$是从 G_β 中产生的对应集。设 G_1 和 G_2 分别是$\{G_\alpha\}$和$\{G_\beta\}$的元素， 它们之间的距离是$\{G_\alpha\}$和 $\{G_\beta\}$ 中(p, s) 有向图之间的最小距离。如果 G_1 和 G_2 之间距离是零，或者 G_1 和 G_2 是同构的，则目的达到。如果 p=0，则$\{G_\alpha\}$的所有元素都是同构的 所以让我们假定 p≠0 以及 G_1 和 G_2 是不同构的，而且距离为正

用 $G_1\oplus G_2$ 表示从 G_1 和 G_2 中得到的 n-节点有向图，当且仅当(i, j)或者在 G_1 中，或者在 G_2 中，但不为两者所共有， 则(i,j)在 $G_1\oplus G_2$ 中。现在在 $G_1\oplus G_2$ 中引入一些符号，如果从节点 i 指向节点 j 的边在 G_1 但不在 G_2 中，则写为$(i, j)_1$。如果从节点 i 指向节点 j 的边在 G_2 中但不在 G_1 中，则写为$(i, j)_2$。由于 G_1 和 G_2 是不相同的，则必定至少存在一对不同的节点 i_1 和 i_2，使 $(i_1, i_2)_1$ 在 $G_1\oplus G_2$ 中。由于 i_2 的入度在 G_1 和 G_2 二者中是相同的，则必定存在一个节点 i_3，$i_3\neq i_1$，使$(i_3, i_2)_2$在 $G_1\oplus G_2$ 中。继续这种方法，只要产生一个闭边列，这个过程就可以无限地重复下去。因此对某些正整数 $k(k\geq 2)$，存在一系列节点：

$$i_1, i_2, \cdots, i_{2k-1}, i_{2k}, i_1 \tag{6.35 a}$$

使

$$(i_1, i_2)_1, (i_3, i_2)_2, \cdots, (i_{2k-1}, i_{2k})_1, (i_1, i_{2k})_2 \tag{6.35 b}$$

由式(6.35 b)的边形成的子图是 $G_1\oplus G_2$ 中的闭合边列。 注意，在式(6.35 a)中并不是所有的节点必定是不同的，但是节点 i_1 和 i_2 是不同的。首先检查 k=2 的情况，则有

$$(i_1, i_2)_1, (i_3, i_2)_2, (i_3, i_4)_1, (i_1, i_4)_2。$$

因此在 G_2 中用边(i_1, i_2)和(i_3, i_4)替换边(i_3, i_2)和(i_1, i_4)的初等$(p, s)d$ 不变变换，在$\{G_\beta\}$中会产生一个(p, s)-有向图，这比G_2更接近于 G_1，与关于 G_1 和G_2之间距离的最小性假设相矛盾。因此 $k>2$。现在在 k 上利用归纳法来证明不可能存在式(6.35)类型的节点序列。假定对于长度(边数)为 2 q ($q<k$) 的任一序列式(6.35)来说，结论成立。我们来证明这样一个长变为 2 k($k>2$)的序列的不存在性，现考虑两种情况，

情况 1：$s\neq 0$，如果对于 $i\neq i_4$、$\alpha(i_1, i_4)<p$，或者对于 $i_1 i_4$，$\alpha(i_1, i_4)<s$，则在 G_1 中用边(i_1, i_4)和(i_3, i_2)来替换边(i_3, i_4)和(i_1, i_2)的运算是初等$(p, s)d$ 不变变换，而且在 $\{G_\alpha\}$ 中会产生一个(p, s)-有向图，这比 G_1 更接近于G_2，这是矛盾的。因此，$\alpha(i_1, i_4)\geqslant 1$。如果 G_2 的$\beta(i_1, i_4)$不是零，则在 G_2 中用边(i_3, i_4)和(i_1, i_2)来替换边(i_1, i_4)和(i_3, i_2)的初等$(p, s)d$ 不变变换，会在$\{G_\beta\}$中产生一个(p, s)-有向图，这比 G_2 更接近于G_1，因此$\beta(i_1, i_4)=0$。现在考虑节点序列 $i_1, i_4, i_5, \cdots, i_{2k-1}, i_{2k}, i_1$。这个序列除了长度比 2 k 短一些之外，具有与式(6.35)相同的性质。利用归纳假设，没有这样的序列会存在，因此 G_1 和 G_2或者是同构的，或者是距离为零，这是矛盾的。

情况 2：$s=0$，则节点 i_1、i_2 和 i_3 是不同的。假定在式(6.35)序列中至少有四个不同节点，则不失一般性，可以假定 i_1，i_2，i_3 和 i_4 是式(6.35)的不同节点，以及边$(i_1, i_2)_1$、$(i_3, i_2)_2$ 和$(i_3, i_4)_1$ 在 $G_1\oplus G_2$ 中。根据类似情况 1 的论证，可以得出结论，没有这样的序列能存在，因此在式(6.35)中恰好存在三个不同的节点。不失一般性，设这些点是 $i_x(x=1, 2, 3)$，这就意味着式(6.35 b)的闭边列至少由两个相反方向取向的长度为 3 的有向回路所组成。如果在 G_1 或 G_2 中存在一个与 i_x 不同的节点 j，使(i_1, j)或(j, i_1)是在 G_1 或 G_2 中，以及对于 $y=2$ 或 3，有 $\alpha(i_y, j)<p$ 或 $\alpha(j, i_y)<p$，则在$\{G_\alpha\}$或$\{G_\beta\}$中涉及节点i_1，i_2，i_3 和 j 的初等$(p, 0)\alpha$-不变变换，会产生一个 $(p,0)$-有向图 G_3，使 G_3 和 G_2 或者 G_3 和 G_1 之

间距离与 G_1 和 G_2 之间距离相同。此外，在 $G_3 \oplus G_2$ 或者 $G_3 \oplus G_1$ 中存在至少含有四个不同节点的式(6.35)类型的一系列节点，这样或者运用情况1的论证，或者与关于 G_1 和 G_2 之间距离的最小性的假设相矛盾。因此在 $G_1(G_2)$ 中或者 $\alpha(i_x, j)=p$，或者 $\alpha(j, i_x)=p$，或者没有这样的节点 j 存在。在任何情况下，G_1 和 G_2 会是同构的，这又是矛盾，这样定理证毕。

因此对于 $\{G_d\}$ 的任何 G_α 和 G_β，存在一个 (p, s) 有向图 G_x $(x=1, 2, \cdots, k)$ 的有限序列，而使

$$G_\alpha=G_1, G_2, \cdots, G_k=G_\beta$$

式中 G_i 和 G_{i+1} $(i=1, 2, \cdots, k-1)$ 是由一初等 (p, s)d-不变变换相联系。

推论 6.11：当且仅当每个初等(p, s)d-不变变换会产生与 G_d 同构的有向图，则 $\{G_d\}$ 的每个元素都与 G_d 同构。

作为一个例子，考虑图 6.6 和 6.12 的 d-不变 (1, 0) 有向图。如果在图 6.12 中用边(1, 3)和(4, 2)来替换边(1, 2)和(4, 3)，则得到一个与图 6.6 中给出的有向图是同构的(1, 0) 有向图。

对于简单有向图，这些变换通常可以凭观察得出。但是，对于复杂图，需要一个系统化的方法，为此定理 6.2 证明中所概述的方法可以采用。

1.5 连通(p, s)-有向图的实现

在这一节中将提出实现一组非负整数对为连通(p, s)-有向图，非环(p, s)-有向图和树的节点度对的必要与充分条件。这一成果来自 HAKIMI[1965]和 CHEN[1966 e]的研究工作。

引理 6.8：设 G_d 是具有 $p\neq 0$ 和 $k\geq 2$ 的含有 k 个片的(p, s)-有向图。如果 G_d 没有孤立节点以及其中一个片含有一个回路（不一定需要是有向的），则存在一个来自 G_d 的 d-不变(p,s) 有向图，但具有 $k-1$ 个片。

证明：设(i, j)是片 g_a 的一个回路边，设 (u, v) 是另一个片

g_θ 的一个边，如果用边(i，v)和(u，j)来替换边(i，j)和(u，v)，则可以得到具有所要求性质的(p，s)有向图，引理证毕

定理 6.3：对于实现集合$\{(a_i, b_i)\}$为连通(p,s)-有向图（$n\geq 2$）的节点度对的必要和充分条件为：

(a) 集合可实现为(p，s)有向图的

节点度对(它满足式(6.2)) (6.36 a)

(b) 对于$i=1, 2, \cdots, n$，$a_i+b_i\neq 0$ (6.36 b)

(c) $p\neq 0$ (6.36 c)

(d) $\sum_{i=1}^{n} a_i \geq (n-1)$ (6.36 d)

证明：必要性，设G_c是实现集合的连通(p，s)-有向图，显然前面三个条件成立，第四个条件根据以下情况得出，即在任何连通(p，s)有向图中边数至少是(n-1)，因此

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j\in V} d^-(j) \geq (n-1)$$

式中V是G_d的节点集。

充分性。根据式(6.36 a)可以假定G_d是实现集合的一个(p，s)有向图，现在问题等同于证明在$\{G_d\}$中存在一个连通的元素。如果G_d是连通的，则不存在问题，因此假定G_d是有k（$k\geq 2$）个片。不失一般性、可以进一步假设G_d不含有回路。因为如果不是这样的话，在G_c中就存在这样的一个元素，它具有由式(6.36 b)，(6.36 c)和引理6.8所提出的$k-1$个片，因而可以继续这种运算，直到所有的片都没有回路，或者在$\{G_d\}$中求得一个连通的(p，s)-有向图为止。如果G_d的所有片都没有回路，则G_d中的边数等于$n-k$。根据式(6.36 d)，这就意味着

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = (n-k) \geq (n-1)$$

由于$k\geq 2$，显然这是不可能的，因此定理证毕。

下面的推论可以作为这个定理的简单推论，其证明留作练习（习题6.19）。

推论 6.12：集合$\{(a_i, b_i)\}$可实现为树的节点度对的必要和充分条件是对于$i=1, 2, \cdots, n$，有$(a_i+b_i)\neq 0$，以及

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{i=1}^{n} b_i = n-1 \tag{6.37}$$

这结论也是由MENON[1964]给出的。如果进一步限定$a_n=0$以及对于$k=1, 2, \cdots, n-1$，有$a_k=1$，则集合也可实现为有向树t_k的节点度对（习题6.20）。

引理 6.9：当且仅当连通有向图G_d的每条边至少含于一个有向回路中，则G_d是强连通的。

证明：必要性部分是不言而喻的，为了证明充分性，假定在G_d中存在两个节点i和j，以及从节点i到节点j不存在有向回路径，然后证明这是不可能的。由于G_d是连通的，存在一个连接于节点i和j之间的路径P_{ij}（不是有向路径）。如果P_{ij}长度为1，则在G_d中从节点i到节点j有一个有向路径，因为根据假设P_{ij}必定是含于某一个有向回路中的一条边。假定对任何长度为$k-1$或者更少$(k\geq 2)$的P_{ij}来说，结论都是正确的。为了进行归纳法，现假定P_{ij}的长度为k。如果在P_{ij}中最终边是(x, y)，这里$x=j$或$y=j$，由归纳假设，在G_d中从节点i到节点x或y存在一条有向路径。由于根据假定G_d的每条边都含于某个有向回路中，则在G_d中存在一条从节点y到节点x的有向路径，以及一条从节点x到节点y的有向路径，而后者是边(x, y)。因此在G_d中存在一条从节点i到节点j的有向路径，这是矛盾的，引理证毕。

推论 6.13：集合$\{(a_i, b_i)\}$可实现为无自环强连通有向图的节点度对的必要和充分条件是：

(a) 集合可实现为无自环有向图的节点度对（它满足(6.4)）

(6.38 a)

(b) 对于 $i=1, 2, \cdots, n$, $n \geq 2$, $\min(a_i, b_i) \neq 0$

$$(6.38\text{b})$$

证明：必要性部分是明显的。为了证明充分性，首先注意到，如果集合满足式(6.38)，则集合可实现为连通无自环的有向图的节点度对，因为集合满足定理6.3中式（6.36）的所有四个条件。设 G_d 是其中一个实现，如果 G_d 的每条边都含于某个有向回路中，则根据引理6.9，G_d 是所要求的一种实现。假定在 G_d 中存在一条边 (i, j)，它不在任一回路中。由于根据式(6.38b)，$d^+(j) \neq 0$，则存在一条边 (j, k)，同样有一条边 (k, t)。继续这个过程将得出一个有向边列。由于 G_d 是有限的，论证可以这样一直继续下去，直到得出一条有向回路，比如说 L_1。利用类似的论证，可以确定另一个有向边列的存在性，它终止于边 (u, i)，因为对 G_d 的所有节点 v，有 $d^-(v) \neq 0$。第二条有向边列也必定含有一条有向回路，比如说 L_2。如果在某点上两条有向回路相交，则边 (i, j) 会含于某个有向回路中。根据假设，这是不可能的。这样就有两个节点不相接有向回路。设 (i_1, i_2) 和 (j_1, j_2) 分别是 L_1 和 L_2 的边，由于 G_d 没有自环，则 $i_1 \neq i_2$ 和 $j_1 \neq j_2$，如果用边 (i_1, j_2) 和 (j_1, i_2) 来替换边 (i_1, i_2) 和 (j_1, j_2)，则可以得到一个新的有向图 G_1，它是来自 G_d 的 d-不变以及不含有任何自环。此外，显然原先 G_d 中处于某个有向回路中的每条边仍然在 G_1 中，也仍然是这样，因而边 (i, j) 处于某有向回路中。显然，可以继续这个过程，直到得到一个来自 G_d 的 d-不变以及其中每条边都处于某个有向回路中的有向图 G_β。这样根据引理6.9，推论证毕。

应当指出，对于强连通 (p, s)-有向图的实现，条件式(6.38b)不是必要的。例如，考虑如图6.13所示的(1,0)有向图 G_d，在 $\{G_d\}$ 中不存在强连通(1, 0)有向图。理由是根据定理6.2，任何这样的实现可以由 G_d 中通过有限序次的初等(1, 0)d-不变变换得到。这对于 G_d 显然是不可能的。另一方面，如果式(6.38b)至多对一个 i 是适用的，则对这一集合所有的实现都没有有向回路(BROWNLEE

[1968])。(对于有关的结论参见习题6.66和6.67)。

推论 6.14：设 $\{(a_i, b_i)\}$ 是可实现为无自环有向图的节点度对。对于这一集合的所有无自环实现都是非环的必要和充分条件是至多对一个 $i(i=1, 2, \cdots, n)$ 有 $\min(a_i, b_i)\neq 0$。

证明：必要性。假定对于 G_d 的至少两个节点 x，存在具有 $\min[d^+(x), d^-(x)]\neq 0$ 性质的一个非环实现 G_d。设 i 和 $j(i\neq j)$ 是两个这样的节点，则在 G_d 中存在边 (u, i)，(i, v)，(y, j) 和 (j, z)。由于 G_d 是非环的，节点 u，i 和 v 都是不同的，类似地，所有节点 y，j 和 z 也是不同的。如果用边 (u, v)，(i, i)，(j, j) 和 (y, z) 来替换边 (u, i)，(i, v)，(y, j) 和 (j, z)，则可以得到有向图 G_1，G_1 是来自 G_d 的 d-不变，具有两个自环。在 G_1 中如果用边 (i,j) 和 (j, i) 来替换这两个自环，则可以得到有向图 G_2，G_2 是来自 G_d 的 d-不变，并至少具有一个有向回路和没有自环。这与集合的所有无自环实现是非环的这一假设相矛盾，因此条件是必需的。

充分性。设 G_d 是具有至多存在一个节点 i，使 $\min[d^+(i), d^-(i)]\neq 0$ 性质的集合的一个无自环实现。由于长度大于1的有向回路至少含有具有 $\min[d^+(x), d^-(x)]\neq 0$ 的两个节点 x，显然 G_d 必定是非环的，因此条件是充分的。

注意，这一推论不能保证一组非负整数对实现为节点度对的一个非环实现的存在性。它只不过表示这一类集合的非环可实现的特性。

例 6.7：考虑图6.1的(3, 2)-有向图 G_d，其节点度对的对应集由下式给出：

$$\{[d^+(i), d^-(i)]; i=1, 2, 3, 4, 5\}$$
$$=\{(2, 2), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (5, 1)\}$$

假定要求构成一个强连通 $(p, 0)$ 有向图，$p<\infty$，它来自 (3, 2)-有向图 G_d 的 d-不变。如果集合满足式(6.4 b)和(6.38 b)中给出的条件，这问题会有解。显然式(6.38 b)是满足的，因为所有整数都是正数。根据式(6.5)和(6.6)，式(6.4 b)等效于下列关系式：

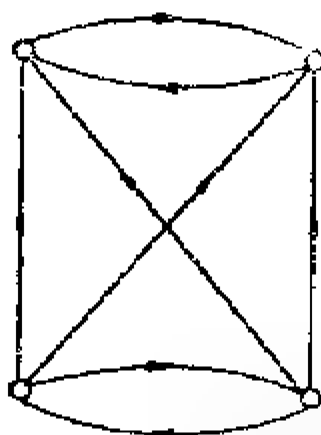


图 6.13 通过任何有限序次的初等(1, 0)d-不变变换不可能变换为强连通(1, 0)-有向图的(1, 0)-有向图

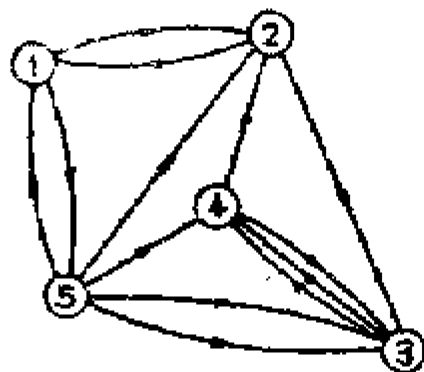


图 6.14 来自图6.1的(3, 2)有向图的 d-不变的强连通(2, 0)有向图

$$2+2+3+1+5=13\geq 5+1=6$$

因此，存在一个可以实现这一集合的强连通(p, 0)-有向图，在图6.14中示出了一个这样的实现。注意，原来的(3, 2)-有向图不是强连通的，因为不存在从节点1到节点5的有向路径。对于这个集合可以得到P的最小值是2，因为在例6.2中曾指出过不存在实现这一集合的(1, 0)-有向图。

§ 2. 对称(p, s)-有向图的可实现性

在这一节中，将提出实现一组n个非负整数对为n-节点对称(p, s)有向图的节点度对的必要和充分条件，再从这一般特性，归纳出一组n个非负整数作为一n节点(无向)图节点度的实现条件。

术语“对称有向图”在前面已有定义(定义1.35)，目前需要稍微修正一下，或许应当使用一个不同的名称，但没有发现有此必要，因为只需修正一下定义，就可用于这章的其余部分。

定义 6.5：对称(p, s)-有向图。

如果在 G_d 中对于每条边(i, j)，都存在另一条边(j, i)，因而对于 $i\neq j$，有 $\alpha(i, j)=\alpha(j, i)$，以及对于 $i=j$，有 $\alpha(i,j)=2e$(这里 e 是非负整数)，则(p, s)有向图 G_d 称为对称的。

所谓(p，s)有向图的对称子图指的是子图也是对称(p，s)有向图。

由于无向图可以用一对具有相反方向的有向边来表示每条无向边，从而将这一无向图变换为对称有向图。反之亦然，因此可以方便地使用一个较简单的名词。

定义 6.6₂ (p，s)-图。

一个对称(p，2s)有向图称为(p，s)图。一个(∞；∞)图也称为图。

2.1 存在性

为了使给定集合$\{(a_i, b_i)\}$可实现为对称有向图的节点度对，有必要使$a_i = b_i$，所以可以较简单地用非负整数集$\{a_i\}$来代替一组非负整数对。

把(p，s)-图作为(p，s)有向图的一种特殊情况来处理有一个困难。设G_d是对所有 i 来说都是一个实现具有$a_i = b_i$的集合$\{(a_i, b_i)\}$的(p，s)有向图。对保证存在(p，s)-图实现来说，条件$a_i = b_i$并不是充分的。例如，不存在来自长度为3的有向回路的 d 不变(1，0)-图。换言之，(p，s)图的可实现条件不仅仅是定理6.1中所给的条件，以及对所有 i 强令$a_i = b_i$。但是，即将看到，附加的限制条件必须得到满足。

定理 6.4：设$\{G_d\}$是实现给定可实现的集合$\{(a_i, b_i)\}$所有可能(p，0)-有向图的集合。当且仅当对所有 i 有$a_i = b_i$，以及

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = 2e \qquad (6.39)$$

则在$\{G_d\}$中存在(p，0)图，式中 e 是非负整数。

换言之，定理说明如果集合可实现为一(p，0)有向图的节点度对，则只要满足定理所提出的条件，就可实现为(p，0)图的节

点度。

定理的必要部分是不言而喻的，这些条件充分性的证明牵涉太多，将在下一节中给出。

按照类似于§2.2中所给出的论证，可以得出下列结论（习题6.24）。

定理 6.5：假定集合$\{(a_i, b_i)\}$可实现为(p, s)-有向图的节点度对。如果对所有i都有$a_i = b_i$，以及$\sum_{i=1}^{n} a_i$是偶数，则只要$p \neq 0$，这集合也可实现为(p, h)-图的节点度，而如果$p = 0$，集合实现为$(1, h)$-图，这里h表示最大整数$\leq \frac{1}{2}(s+1)$。

根据推论6.8和定理6.4，可以得出下面结论（习题6.27）。

推论 6.15：集合$\{a_i\}$（对于$i=1, 2, \cdots, n-1$，$n \geq 2$，$a_i \geq a_{i+1}$）可实现为$(p, 0)$-图的节点度的必要和充分条件是

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2e \tag{6.40 a}$$

式中e是非负整数，以及

$$\sum_{i=1}^{n} \{\min[a_i, (n-1)p] - a_i\} \geq 0 \tag{6.40 b}$$

$$\sum_{i=k+1}^{n} \min[a_i, kp] \geq \sum_{j=1}^{k} \{a_j - \min[a_j, (k-1)p]\} \tag{6.40 c}$$

上式中$k = 1, 2, \cdots, n-1$。在上面推论中通过置$p = \infty$，就可以得到SENIOR[1951 b]的基本定理。

推论 6.16：集合$\{a_i\}$（对于$i = 1, 2, \cdots, n-1$，$a_i \geq a_{i+1}$）可实现为自环的图的节点度的必要和充分条件是

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2e \tag{6.41 a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \geq 2a_1 \tag{6.41 b}$$

式中 e 是非负整数并有 $n\geqslant 2$。

证明：对于 n，$k\geqslant 2$，条件式(6.40 b)和(6.40 c)总是满足的。对于 $k=1$，立即可以得出式(6.41 b)。

推论 6.17：当且仅当$\sum_{i=1}^{n} a_i$是偶数，集合$\{a_i\}$可实现为图的节点度。

这推论的证明是简单的，因而细节留作练习(习题 6.30)。

推论 6.18：集合$\{a_i\}$(对于 $i=1,2,\cdots,n-1$，$a_i\geqslant a_{i+1}$)可实现为(1，0) 图的节点度的必要和充分条件是

$$\sum_{i=1}^{n} a_i=2e \tag{6.42 a}$$

以及对于 $k=1, 2, \cdots, n$，$n\geqslant 2$ 时

$$\sum_{i=1}^{k} a_i''\geqslant\sum_{i=1}^{k} a_i \tag{6.42 b}$$

式中 e 是非负整数，a_i'' 是式(6.24)中所定义的(对于式 (6.42 b) 的等效条件，参见习题 6.35 和 6.47)。

推论可以直接根据定理 6.4 和推论 6.7 得出。

对于这个问题的另一个关于存在性的解答是由 HAVEL[1955] 和 HAKIMI[1962]给出的，其定理在性质上是迭代的，因而能用于构成具有所规定度的 (1，0) 图的算法。我们首先给出一个引理，然后证明其结论。

对于一给定的图G，用 $d_{(i)}$来表示G的节点 i 的度。

引理 6.10. 假设有一 n-节点(1，0) 图G，其中如果有必要，可以改变其节点标号，使对于$i=1, 2, \cdots, n-1$，$n\geqslant 2$，有 $d_{(i)}\geqslant d_{(i+1)}$，则存在 (1，0) 图 G_1，G_1 是来自 G 的 d-不变，并具有边(1，x)($x=2, 3, \cdots, d_{(1)}+1$)都在 G_1 中的性质。

证明：在G中对于所有 i 都有 $d_{(i)}\leqslant n-1$。设V是G的节点集以及 V_a 是由从 2 到 $d_{(1)}+1$ 的节点所组成的V的子集。如果边(1，x)($x\in V_a$)都在G中，则不成问题。假定(1, y)($y\in V_a$)不在G中，

则在$(V-V_a)$中存在一节点z，从而（1，z）在G中。由于$d_{(y)}\geq d_{(z)}$，不难看到，在V中存在一节点w($w\neq z$)，使(w，y)在G中，但(w，z)不在G中。在G中如果用边(1，y)和(w，z)替换边(w，y)和(1，z)，则可以得到(1，0)-图G_2，G_2是来自G的d-不变，以及具有G_2中边（1，x）($x\in V_a$)的数目比在G中多1。重复这个过程，最后形成(1,0)图G_1，其中节点1具有所要求的性质，这样推论证毕。

在以上引理中得到的图G_1可以认为是(1，0)图G的范式，因此每个(1，0)图可以通过有限序次的初等(1，0)d-不变变换而变换为其范式。

定理6.6：集合$\{a_i\}$（对于$i=1，2，\cdots，n-1；n\geq 2$，有$a_i\geq a_{i+1}$）可实现为(1，0)图的节点度的必要与充分条件是$n-1\geq a_1$，以及其变型集合

$$\{a_2-1，a_3-1，\cdots a_{a_1+1}-1，a_{a_1+2}，\cdots，a_n\} \quad (6.43)$$

可实现为(1，0)-图的节点度。

证明：必要性。设G是实现集合的(1，0)-图，由于在G的节点上至多有$n-1$个边关联，则a_1不可能超过$n-1$。根据引理*6.10*，存在(*1*，*0*)图G_1，它是来自G的*d*-不变，并具有边(1，x)($x=2，3，\cdots，d_{(1)}+1$)都在G_1中的性质。因此，移去节点1以及与这节点相关联的所有边，结果形成节点度具有由集合(6.43)式给出的(1，0)图。

充分性。如果集合(6.43)式可实现为(1，0)-图的节点度，则通过添加一新节点y以及在y和度为$a_2-1，a_3-1，\cdots，a_{z+1}-1$(这里$z=a_1$)的节点之间添加连接边，可以构成新的(1，0)图。显然G是集合$\{a_i\}$的一种实现。定理证毕。

除了在式(6.42)和(6.43)中提出的全部特性外，为了集合是可实现的，还存在集合必须满足的其它必要条件。由于这些条件通常可以通过观察来核对，一般可以避免式(6.42 b)或(6.43)外的更复杂的检验。这样集合是否可实现的问题可以更快得到答案，我们来

讨论最初由 BEHZAD 和 CHARTRAND[1967]给出的两个条件。

定理 6.7：*不存在没有两个节点具有相同度的(1，0)-图。*

证明：设G是一个n-节点(1，0)图，其中对于i＝1，2，…，n－1，n≥2，有$d_{(i)}>d_{(i+1)}$。如果没有两个节点具有相同度，则由于$0\leqslant d_{(j)}\leqslant n-1$，从而对于j＝1，2，…，n，有$d_{(j)}=n-j$。但是，这意味着n是一个孤立节点，而边(1，x)(x＝2，3，…，n)都在G中，这显然是不可能的，因此没有这样的（1，0）图G存在。

由于没有不同的非负整数序列可以实现，我们考虑那些只有两个整数相等的序列。

推论 6.19，设G是明确只有两个节点具有相同度的n-节点(1，0)-图(n≥3)，那么G或者只有一个节点具有度为n－1，或者只有一个节点的度为零。

证明：由于所有的度都处于n个整数0，1，…，n－1之中，则G的节点度取除了其中一个以外的所有这些值。因此，至少0和n－1之一是G的一个节点的度。如果G有两个度为0或度为n－1的节点，那么删去其中一个节点及与其相关联的边(如果它们存在)，结果形成具有所有节点度都不同的（1，0）图，这是与定理6.7相矛盾的。类似地，G不可能同时含有一个度为0的节点。推论证毕。

例 6.8，作出实现以下集合的(2，0）图：

$$\{a_i;\ i=1,2,3,\cdots,5\}=\{5,4,4,3,2\}$$

其中整数已经以非增次序排列，根据推论6.15，问题有一个解答，

(6.40 a)：$5+4+4+3+2=2\cdot 9$

(6.40 b)：$0+0+0+0+0\geqslant 0$

(6.40 c)：$2+2+2+2=8\geqslant 5-0=5$

$4+3+2=9\geqslant(5-2)+(4-2)=5$

$3+2=5\geqslant(5-4)+(4-4)+(4-4)=1$

$2\geqslant(5-5)+(4-4)+(4-4)+(3-3)=0$

图 6.15 是一个(3，0)图的实现，通过 d 不变变换，可以变换为(2，0)图。由于 a_1 大于 4(n-1)，则不存在来自图 6.15 的 d 不变(1，0)图。因此，对于具有 s 0 的集合，p 2 是可以得出的最小整数。

假定从整数 a_1，a_2，a_4 和 a_5 中都减去 1，得到一个新的集合，

$$\{b_i; i\ 1, 2, 3, 4, 5\}\ \{4, 4, 3, 2, 1\}$$

由于推论 6.19 有两个节点的度为 4(n－1)集合不可能实现为(1，0)图的节点度。但是，存在实现集合的(2，0)图，因为条件式(6.40)对 p－2 是适用的(有关结论，参见习题 6.45，6.54，6.56 和 6.63)。

例 6.9：考虑一集合

$$\{a_i; i\ 1, 2, 3, 4, 5\}\ \{4, 4, 3, 3, 2\}$$

其中整数已经按照非增次序排列，要求构作出度在集合中给出的(1，0)图。

应用式(6.24)，对于 i 1，2，3，4，5，求得 a_i a_i，条件式(6.42)是明显满足的。因此存在实现这一集合的(1，0)图。利用定理 6.6 中所概述的方法来构成(1，0)图，在两次相继变换之后，对应的变型集合是{3，2，2，1}和{1，1，0}，集合{1，1，0}可以很容易地实现为一条边和一个孤立节点(图 6.16 中边(3，4)和节点

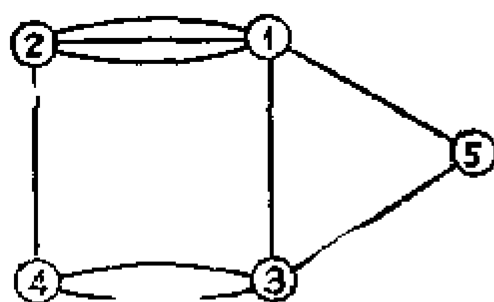


图 6.15 (3，0)图的实现

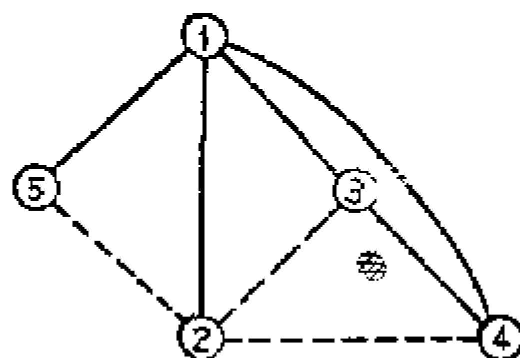


图 6.16 应用定理 6.6 中所述的迭代法来实现(1，0)-图

5 所组成的图的节点度。如果对这个图添加一个节点(节点 2)和三条边，可以得到集合{3，2，2，1}的实现(粗线和虚线)。最后，如果添加另一个节点(节点 1)和再加四条边，则得到原来集合所要求的一种实现。显然，这种方法一般来说是有效的。

2.2 可实现性

在这一节中将给出定理 6.4 的充分性证明，证明的过程实质上是构造过程，因而可以用来从给出满足定理中所述约束条件的 (p，0)-有向图产生(p，0) 图。

设 G_d 是集合{(a_i，b_i)}实现的(p，0) 有向图，其中对所有 i，$a_i=b_i$，以及$\sum_{i=1}^{p}a_i$ 是偶数。设 G_d' 是 G_d 的最大对称子图，考虑 G_d-G_d'，并假定 $p\neq 0$。

引理 6.11：如果边(i，j)在 G_d-G_d' 中，则 G_d-G_d' 中存在一条长度≥3 的闭合有向边列。

证明：从节点 i 开始找一条有向边列，在经过边(i，j)后，尽可能继续找下去，条件是这一边列总是通过 G_d-G_d' 的一条新边。由于在 G_d-G_d' 中的每个节点 k 上，有 $d^+(k)=d^-(k)$，因此这一过程只能是最后回到 i 结束。从而引理证毕。

引理 6.12：在 G_d-G_d' 中，如果存在一个长度为 2 k(k≥2)的闭合有向边列，则存在一个(p，0) 有向图 G_1，它是来自 G_d 的 d 不变，而且 G_d' 是 G_1 的最大对称子图的真子图。

证明：设这一闭合有向边列是

$$Q=(i_1,\ i_2)\cup(i_2,\ i_3)\cup\cdots\cup(i_{2k},\ i_1) \qquad (6.44)$$

在 G_d 中对于 t=1，2，…，k，进行用边(i_{2t+1}，i_{2t})替换边(i_{2t-1}，i_{2t})的运算(这里 $i_{2k+1}=i_1$)就产生所要求的(p，0) 有向图 G_1，因此引理证毕。

引理 6.13：在 G_d-G_d' 中，如果 Q_1 和 Q_2 是度为奇数的两条边不相接闭合有向边列，它们中至少有一个节点是公共的，则在 $Q_1\cup Q_2$ 中存在长度为偶数的闭合有向边列。

根据引理6.11，6.12和6.13，显然存在这样一个(p, 0)-有向图 G_2，它是取自 G_1 的 d 不变，并具有如下的性质，如果 G_2' 是 G_2 的最大对称子图，则 G_2-G_2' 由一组长度为奇数的节点不相接闭合有向边列所组成。由于 $\sum_{j=1}^{n} a_j$ 是偶数，这种边列的数目必定是偶数。将用这些论据来导出下面的结果。

引理 6.14：在 G_2-G_2' 中，设 Q_1 和 Q_2 是两条闭合有向边列。如果在 G_2 中存在一条边(i, j)，$i\in Q_1$ 和 $j\in Q_2$，则存在(p, 0)有向图 G_3，它取自 G_2 的 d 不变，并具有 G_3 中长度为 2 的有向回路数目至少比在 G_2 中大于 3 的性质

证明：设

$$Q_1=(i_1, i_2)\cup(i_2, i_3)\cup\cdots\cup(i_{2u-1}, i_1) \qquad (6.45\text{a})$$

$$Q_2=(j_1, j_2)\cup(j_2, j_3)\cup\cdots\cup(j_{2v-1}, j_1) \qquad (6.45\text{b})$$

式中 u, v≥2。为了方便起见，设 $i=i_1$ 和 $j=j_1$。在 G_2 中分别用边 (i_{2t}, i_{2t-1}) 替换边 (i_{2t}, i_{2t+1}) $(t=1, 2, \cdots, u-1)$；用边 (i_1, i_{2u-1}) 替换边 (i_1, j_1)；用边 (j_{2x}, j_{2x-1}) 替换边 (j_{2x}, j_{2x+1}) $(x=1, 2, \cdots, v-1)$；以及用边 (j_1, j_{2v-1}) 替换边 (j_1, i_1)，这一运算产生一个所要求性质的(p, 0)-有向图 G_3，前面曾提到，如果(i, j)在 G_2 中，则(j, i)也在 G_2 中，因此引理证毕。

引理 6.15：如果在引理6.14中的 G_2 不存在边(i, j)，$i\in Q_1$ 和 $j\in Q_2$，引理6.14中所描述的结论仍然成立。

证明：进行用边 (i_1, j_2) 和 (j_1, i_2) 替换边 (i_1, i_2) 和 (j_1, j_2) 的运算，其中 $(i_1, i_2)\in Q_1$ 和 $(j_1, j_2)\in Q_2$，将产生长度为偶数的闭合有向边列，因此根据引理6.12，这一引理立即得出。

根据引理6.14和6.15，以及 G_2-G_2' 由偶数条节点不相接的闭合有向边列所组成的情况，显然存在一个取自(p, 0)-有向图 G_4 的 d 不变的对称(p, 0)-有向图，这就完成了定理6.4的证明。

例 6.10：考虑如图6.17所示的(2, 0)-有向图 G_d，由于对于

$i=1, 2, \cdots, 8$，有 $d^+(i)=d^-(i)$；以及 $\sum_{i=1}^{8} d^+(i)$ 是偶数，根据定理6.4，存在一个取自 G_d 的 d 不变的对称(2, 0)有向图。利用以上引理中所述的方法，不难分解 G_d 为一组由最大对称子图 G_d' 和某些闭合有向边列 Q_i 组成的边不相接子图。一种这样的分解如下：G_d' = abfghi，Q_1 = edq，Q_2 = cprjmskn 和 Q_3 = tuv。在 G_d 中如果

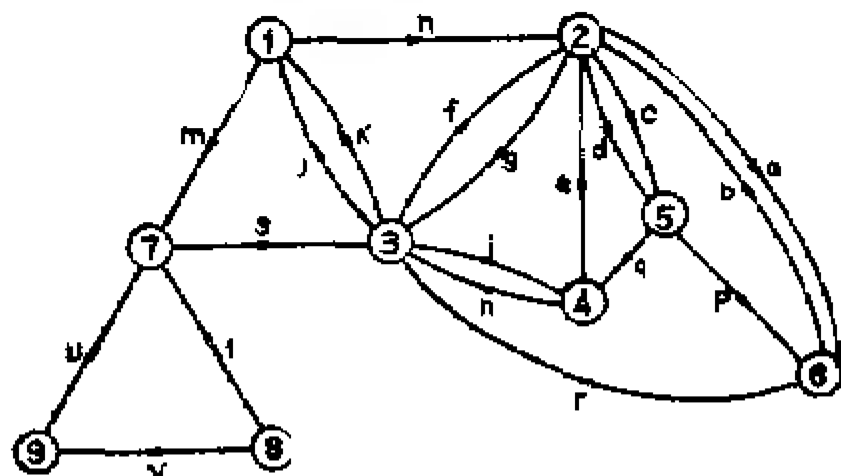


图 6.17 变换为(2, 0)置的(2, 0)-有向图

移动 Q_2 的边 c，r，m 和 k 到如图6.18所示用虚线表示的新位置，则产生取自 G_d 的 d 不变的(2, 0)有向图。由于 Q_1 和 Q_2 的长度都为奇数，则在 G_d 中通过初等(2, 0)d 不变变换将产生长度为6的闭合有向边列，如图6.18所示。最后，如果在图6.18中用边

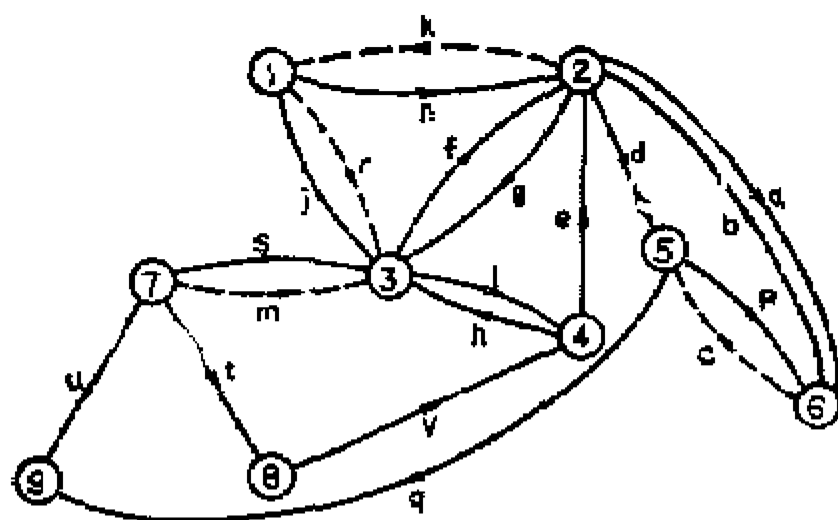


图 6.18 从图6.17中通过应用初等(2, 0)d 不变变换所导出的(2, 0)-有向图

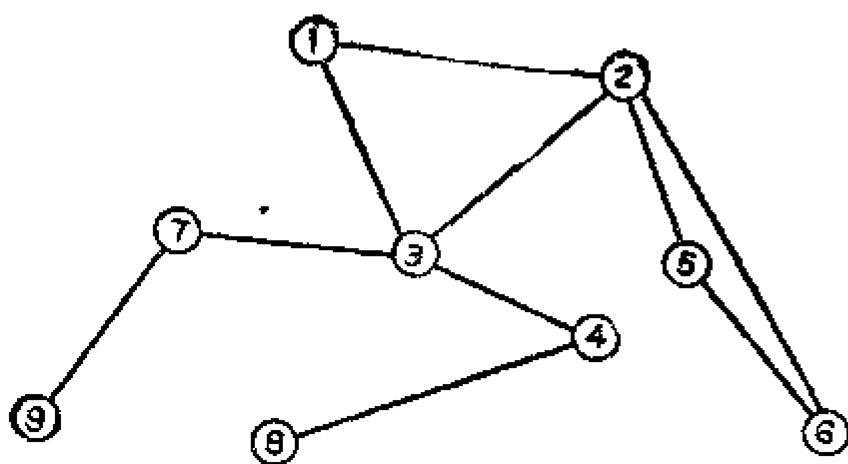


图 6.19 取自图 6.17 的(2, 0) 有向图的 d 不变的(1, 0) 图

(5, 2), (7, 9)和(4, 8)替换边 e = (4, 2), q = (5, 9)和 t = (7, 8), 则得到对称(2, 0)-有向图，或者简单地如图 6.19 所示的(2, 0) 图。实际上，图 6.19 的图是一个(1, 0)图。

2.3 连通图、可分图和不可分图的可实现性

在这一节中将讨论一组非负整数实现为连通 (p, s) 图，可分图和不可分图的节点度，其中可分图和不可分图的论述来自 HAKIMI[1962]的研究成果。

定理 6.8：当且仅当对所有 i 来说，集合可实现为具有 p≠0 和 $a_i \neq 0$ 的(p, s)-图的节点度以及

$$\sum_{i=1}^{n} a_i \geq 2(n-1) \tag{6.46}$$

则集合$\{a_i\}$(n≥2)可实现为连通(p, s) 图的节点度。

定理的证明类似于定理 6.3 的证明，因而留作练习(习题6.34)。在定理 6.8 以及推论 6.16 和 6.17 的启示下，可以很容易建立下面两个推论，它们首先是由 SENIOR[1951 b]提出的。

推论 6.20：集合 $\{a_i\}$ ($a_i \geq a_{i+1}$, i = 1, 2, ···, n - 1, n ≥ 2) 可实现为无自环的连通图的节点度的必要和充分条件是 $a_n \neq 0$，以及

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad 2e \tag{6.47 a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a > 2\max(a_1,\ n-1) \tag{6.47 b}$$

式中 e 是正整数(参见习题 6.40 和 6.41)。

推论 6.21：集合$\{a_i\}$可实现为连通图的节点度的必要和充分条件是对所有的 i 来说，有 $a_i \neq 0$，以及整数 a_i 之和是偶数，并且不小于 $2(n-1)$。

因此，根据推论 6.16，6.20 和 6.21，可以得出如下结论，对于一个给定的集合，如果连通图类的实现和无自环图类的实现都不是空类，则它们的交不可能是空集。

推论 6.22：当且仅当对所有 i，有 $a_i \neq 0$，以及$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2(n-1)$，则集合$\{a_i\}$可实现为树的节点度。

定理 6.9：集合$\{a_i\}$(对于 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1,\ n>2$)可实现为没有自环的不可分图的节点度，其必要和充分条件是对于所有的 i，有 $a_i \geq 2$，以及

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \quad 2e \tag{6.48 a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \geq 2(n+a_1-2) \tag{6.48 b}$$

式中 e 是正整数。

证明：只需证明式(6.48 b)是必要的，其它条件是不言而喻的。设G是集合的不可分图实现，并设 G_1 是从G中通过移去度为 a_1 的节点和在这点上相关联的所有边所得的图。则对于 G_1 的节点 i 有

$$\sum_{i=2}^{n} d(i) = \sum_{j=1}^{n} a_j - 2a_1 \tag{6.49}$$

如果式(6.48 b)不满足，则式(6.49)会少于 $2(n-2)$。根据推论

6.21，这就意味着 G_1 是不连通的。换言之，移去的节点是割点(定义 1.18)，因而图是可分的，这与假设是矛盾的。

为了证明充分性，考虑一非负整数 $c_j=a_j-2(1\leqslant j\leqslant n)$ 的集合 $\{c_j\}$。可以看到集合 $\{c_j\}$ 可实现为无自环图的节点度，应用推论 6.16，有

$$\sum_{j=1}^{n} c_j=\sum_{j=1}^{n} a_j-2n\geqslant 2(a_1-2)=2c_1$$

等式右边是根据式(6.48 b)得出的，设这一实现用 G_2 来表示，如果在 G_2 中添加一个长度为 n 的 Hamilton 回路，则可得到实现原集合 $\{a_j\}$ 的无自环图 G。由于图含有 Hamilton 回路，所以 G 也是不可分的，定理证毕。

定理 6.10：当且仅当集合 $\{a_j\}$ $(n\geqslant 3)$ 可实现为无自环连通图的节点度，以及满足下列三个条件的任一个：

(i) 如果 $n=3$，以及 $a_1\geqslant a_2\geqslant a_3$，则 $a_1=a_2+a_3$。

(ii) 如果 $n=4$，则在 $\{a_j\}$ 中存在 a_i 和 a_j，$a_i\neq a_j$。

(iii) 如果 $n\geqslant 4$，则在 $\{a_j\}$ 中存在一个 a_j，$a_j\neq 2$。

则集合可实现为无自环的可分连通图的节点度。

证明：对于条件(i)和(ii)的证明是简单的，因而细节留作练习(习题 6.36)，下面仅证明 $n>4$ 的情况。

由于每个节点的度都为 2 的连通图是一个回路，而回路是不可分图，条件(iii)的必要性就立刻得证。为了证明充分性，需考虑两种情况：

情况 1：$a_1\geqslant a_2\geqslant\cdots\geqslant a_n$，$n>4$，假定 a_1 是偶数，由于 $a_1\geqslant 2$，设 $a_1=2+a_{11}$。考虑下列整数 2，a_2，a_3 和 a_{11}，a_4，a_5，…，a_n 两个集合。显然这两个集合都满足推论 6.20 的条件，因此它们都可实现为无自环连通图的节点度。如果将这些图中度最低的节点叠在一起，就可以得到实现 $\{a_j\}$ 的可分且无自环的连通图。现假定 a_1 是奇数，那么 n 必定是偶数，而且 $a_1\neq 1$，因为如果不是这样，

推论 6.20 的条件是不会满足的。设 $a_1 \ 2 \ a_{12}$，考虑下列两个整数集，a_2，a_3 和 a_{12}，a_4，a_5，$\cdots$，a_n。再一次利用相同的论证，可以得到实现$\{a_i\}$的可分且无自环的连通图。

情况 2：假定对于 $i=1, 2, \cdots, n-1$，有 $a_i = a_{i+1}$ 以及 $a_1 \neq a_n$，考虑两个整数集 a_n，a_n 及(a_1-a_n)，a_2，a_3，$\cdots$，a_{n-1}。第一个集合显然可实现为无自环连通图的节点度。为了证明第二个集合满足推论 6.20，观察下列式子：

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i - a_n = \sum_{j=1}^{r} a_j - 2a_n$$

$$\geq 2\max\left(a_1, n-1, a_1+a_n, \frac{1}{2}na_n\right) - 2a_n$$

$$= 2\max\left[a_1-a_n, n-a_n-1, a_1, \frac{1}{2}(n-2)a_n\right]$$

$$\geq 2\max(a_1-a_n, n-2, a_2)$$

在第二行中已利用$\{a_i\}$满足式(6.47 b)的条件，因此存在实现这两个给定集合的无自环连通图。设这些图是 G_1 和 G_2，如果把 G_1 的一个节点叠在对应于整数 a_1-a_n 的 G_2 的节点上，则可得到实现原集合所要求的图，定理证毕。

例 6.11：构作一无自环的可分连通图，要求它是如图 6.16 所示图的 d 不变。由于所给定图的度满足于定理 6.10 中规定的所有条件，本题有解。利用定理 6.10 的证明中所述的方法，考虑整数集 2，2 及 2，4，3，3，这些集合可实现为(2，0)-图的节点度，如图 6.20 中虚线和实线所示，将度为 2 的对应节点叠在一起，便得到所要求的实现。

其次考虑下面的整数集：

$\{a_i, i=1, 2, \cdots, 8\} = \{5, 4, 4, 3, 3, 3, 2, 2\}$

要求实现为无自环的不可分图。由于整数满足定理 6.9 的所有要求，这问题是可解的。利用定理 6.9 的证明中所述的方法，考虑集合

{3, 2, 2, 1, 1, 1, 0, 0,}，这个集合可以很容易实现为(2, 0)-图的节点度，如图6.21中虚线所示。如果在这图上叠加一长度为8的Hamilton回路(实线)，便得到所要求的实现。

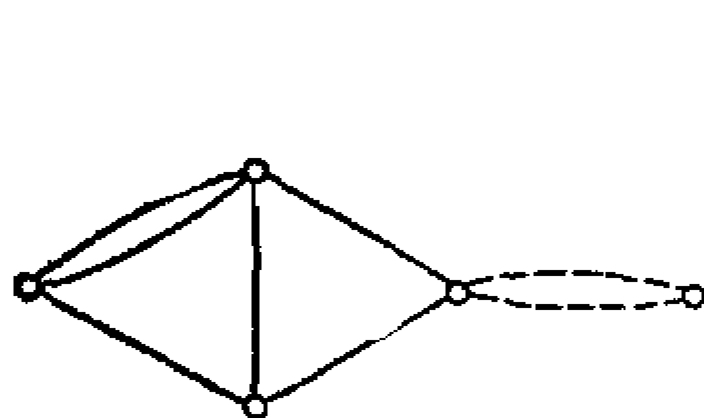


图 6.20 取自图6.16的d-不变的可分连通图(2, 0)-图

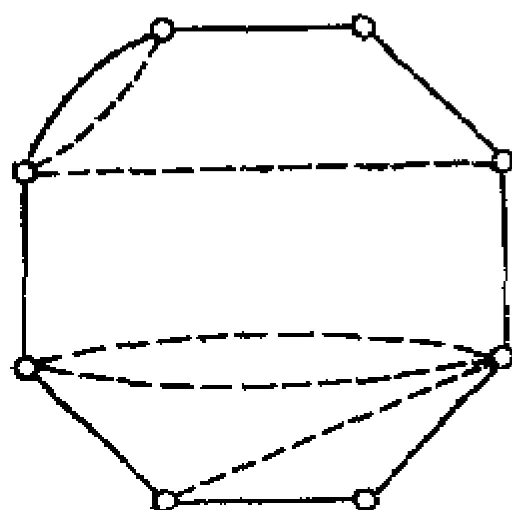


图 6.21 不可分(2, 0)图

§ 3. 无自环图的唯一可实现性

在这一节中，将研究一组非负整数为图或无自环连通图的节点度的唯一实现问题。这问题在结构有机化学中是有相当意义的（例如参见SENIOR[1951 a]）。首先是由SENIOR[1951 b]对连通图作出了解答，其后HAKIMI[1963]得出了对任何图的解。BABLER[1953]用不同方法也独立得出了这些解。在此，我们采用HAKIMI的观点。

我们将两个同构图 G_1 和 G_2 看成是等同的，并写成 $G_1 = G_2$。所谓一组非负整数的唯一实现指的是集合的全部实现(如果它们存在)是处于同构范围内的。面临这问题有两个困难，首先不容易考察两个无标号的图是否同构，其次，一个容许有一初等(∞, 0)d不变变换的图，不一定证明它不能是一非负整数集的唯一实现。因此必须利用图中产生基本变换的那些初等(∞, 0) d 不变变换，例如，增加或减少具有最大长度的路径或回路的长度，增加或减少并联边的

最大数等等。

除非另有说明，在整个这一节中，图指的是无自环图。

3.1 初步考虑

对一给定的图G，设{G}是取自G的d-不变的所有连通图的集合。我们将要讨论在什么条件下，在{G}中存在一个图G_c，使得$G\doteqdot G_c$。为此，我们求助于定理6.2，它是这样讲的：{G}的任一元素都可以从其它任一元素通过有限序次的初等(∞，0)d-不变变换得到。但是，主要困难是必须只选择不破坏图的连通性的那些变换。

引理 6.16．对于n-节点的树$G(n\geq3)$，设k是度≥2的节点数，只要下面两个条件中的任意一个得到满足：

(i) $4\leq k<n-2$，

(ii) $k=3$，以及三个最高节点度不具有同一值。

则在{G}中存在一连通图G_l，使得$G_l\doteqdot G$。

证明：(i) 在G中设

$$P_{ij}=(i,\ t_1)\cup(t_1,\ t_2)\cup\cdots\cup(t_q,\ j),\quad q>1, \tag{6.50}$$

是一个最大长度的路径。如果在G中存在一个与P_{ij}中节点不同的节点x，使得$d(x)=1$以及$q\geq3$，则在$G-P_{ij}$中存在一条路径$(y_1,\ y_2)\cup(y_2,\ t_z)(2\leq z<q-1)$。如果在G中用边$(i,\ t_z)$和$(t_1,\ y_2)$替换边$(i,\ t_1)$和$(y_2,\ t_z)$，则在{G}中产生一个图$G_1$，使得$G_1\doteqdot G$，因为$G_1$含有长度$>q+1$的路径。另一方面，如果在G中不存在这样的节点x，则可以假定$q\geq4$以及度≥2的所有节点都含于P_{ij}中。由于根据假设$k<n-2$，则在P_{ij}中至少存在一个度>2的节点。不失一般性，假定$t_w\left(1<w\leq\frac{1}{2}(q+1)\right)$是这样的一个节点，对于其它情况，可以在$P_{ij}$中从节点j而不是从节点i开始。由于$d(t_w)>2$，则存在与$P_{ij}$中节点不同的一个节点v，使得$(v,\ t_w)$在G中。如果$w\neq1$，则设$G_2$是从G中通过用边$(v,\ t_{q-1})$和$(t_w,\ t_q)$替换边$(v,$

t_w)和(t_{q-1}，t_q)所得的图。如果 $w=1$，则设 G_3 是从G中通过用边(v，t_{q-1})，(t_1，t_q)，(i，t_{q-2})和(t_1，t_{q-1})替换边(v，t_1)，(t_{q-1}，t_q)(i，t_1)和(t_{q-2}，t_{q-1})所得的图。显然 G_2 和 G_3 都在{G}中。由于在 G_2 或 G_3 中存在三个度≥2 的节点邻接节点 t_w，并由于至多只有两个度≥2 的节点邻接G中的任何节点，从而有 $G \neq G_2$ 或 G_3。

(ii) 设G是 $k=3$ 的树，并设式(6.50)的 P_1 是G中最大长度的路径，于是 $q=3$，而且所有度≥2 的节点都在 P_1 中。根据假设，不失一般性，可以假定 $d(t_1) \neq d(t_2)$。如果在G中用边(t_1，t_3)和(i，t_2)替换边(i，t_1)和(t_2，t_3)，则在{G}中会产生一个新连通图 G_1，使得 $G_1 \neq G$，定理证毕。

引理 6.17：设G是一连通图，具中含有一个长度至少为 4 的回路。如果在G中存在一个度≠2 的节点，则在{G}中存在连通图 G_1，使得 $G_1 \neq G$。

证明：需要考虑两种情况：

情况 1：G不含有并联边。设L是G中最大长度的回路。根据假设，在G－L中存在一条与L的节点 j 相并联的边(i，j)，如果节点 i 不在L中，可以考虑L的边(j，k)和(k，u)。如果在G中用边(j，k)和(i，u)替换边(i，j)和(k，u)，由于 G_1 在节点 j 和 k 之间有两条并联边，则在{G}中会产生新图 G_1，使得 $G_1 \neq G$，如果节点 i 也在L中，可以考虑分别属于由L和(i，j)形成的两个不同回路的边(i，k)和(j，u)。现在通过变换边(i，k)和(j，u)为(i，j)和(k，u)，可以构造{G}中的新图 G_2。由于 G_2 具有一对并联边，则 $G_2 \neq G$。

情况 2：G含有某些并联边，设并联边的最大数是连接在节点 i 和 j 之间的 $P(P>1)$，即 $\alpha(i, j)=P$。设L是G中最大长度的回路，需要考虑下列四种附加情况：

(i) (i,j)在L中，这包括(i,j)含于G中最大长度回路之中的可能性。考虑L的一个边(k，u)，这里 k 和 u 不同于 i 和 j，由于L至少长度为 4，这总是可能的。设 G_1 是从G中通过用边（i，u）和

(j, k)替换边(i, j)和(k, u)所得的图，显然G_1在{G}中。如果G_1 G，则在G中必存在(i, u)或(j, k)，在这一情况下，考虑L的(i, v)和(j, w)，这里$v \neq j$，$w \neq i$。如果在G中用边(v, w)和(i, j)替换边(i, v)和(j, w)，则在{G}中产生了G_2，它包含边(i, j)，并有α(i, j) P 1。因此$G_2 \neq G$。

(ii) (i, j)不在L中但i和j在L中，这类似于情况1，因此这里略去证明。

(iii) 节点i和j都不在L中，涉及L的边和(i, j)的一个简单变换会在{G}中产生图G_1，其中最大长度的回路至少比L多含有两条边。

(iv) i不在L中但j在L中，通过如情况1和情况2(i)中所概述的类似方法，可以证明这种情况，证明的细节留作为练习（习题6.37）。

引理 6.10：设G是含有最大长度回路L的连通图，如果有一条不与L的任何节点相关联的边，则在{G}中存在连通图G_1，使得$G_1 \neq G$。

3.2 连通图的唯一实现性

在这一节中，将讨论一组非负整数能实现为一个且仅有一个无自环连通图的节点度的必要和充分条件。

定理 6.11：考虑一集合$\{a_i\}$（对于i 1, 2, …, n 1, $n \geq 2$）可实现为无自环连通图的节点度，则当且仅当集合的整数至少满足下列条件之一时：

(1) $n \geq 3$	(6.51 a)
(2) a_1 2	(6.51 b)
(3) n 3 $a_1 - 1$ 以及 $a_1 - a_3 > a_4 = 1$	(6.51 c)
(4) n = 4 以及 a_1 $a_3 > a_4 = 1$	(6.51 d)
(5) a_1 $a_2 + a_3 + \cdots + a_n$	(6.51 e)
(6) a_1 (n 1)$a_2 - 2$，$a_1 > a_2$ a_n 以及 $n > 3$	(6.51 f)

(7) $a_3 = 1$ 以及 $n>3$ (6.51 g)

则实现为无自环的连通图是唯一的。

证明：由于集合$\{a_i\}$是可实现的，条件(2)完全等效于下列两个条件的任一个(习题 6.38)：

$$a_1 = a_n = 2 \tag{6.52 a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2(n-1) \text{ 以及 } a_{n-2} > a_{n-1} = a_n = 1, \quad n \geq 3 \tag{6.52 b}$$

同样，条件(3)等效于

$$\sum_{j=1}^{n} a_j = 2(n-1) \text{ 以及 } a_1 = a_3 > a_4 = 1 \tag{6.53}$$

必要性：设G为具有$d(j) = a_j$ ($j = 1, 2, \cdots, n$) 的集合的连通图实现，则根据推论 6.20 有

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \geq 2\max(a_1, n-1) \tag{6.54}$$

假定G是这唯一实现，考虑四种不同情况：

情况 1：G不含有回路，则G必定是树，设k是度≥2的节点，如果$k=1$，则节点度必定满足条件(5)。如果$k=2$，则节点度必定满足条件 7。如果$k=3$，以及$a_1=a_3$，则满足式(6.53)，这等效于条件(3)。如果$k=n-2$，则根据推论 6.22，节点度必定满足式(6.52 b)，这是条件 (2) 对于树的特殊情况。由于$k \leq n-2$，从而根据引理 6.16，对于k的所有其它可能性都不可能有唯一实现。

情况 2：G含有最大长度为 2 的回路。设L是G中最大长度的回路，以及 i 和 j 是L的起点，则根据引理 6.18，G的每条边(u, v)或者与节点 i 或者与节点 j 相关联。如果除 i 和 j 之外所有节点都是度为 1，则满足条件(7)。另一方面，如果存在度≥2 的节点 u ($u \neq i, j$)，则与 u 相关联的所有边必定全部与 i 或 j 相关联，都不能与二者都相关联，否则G将含有长度为 3 的回路。如果边(u, j)在G中，则根据引理 6.18，(x, i) ($x \neq j, u$) 不可能在G中，这就证

明满足条件（5）。类似地，对于边（u，1）在G中的情况，这也成立。

情况 3：G含有最大长度为3的回路，设$L=(i,j)\cup(j,k)\cup(k,i)$是G的一个回路，则根据引理6.18，G的每条边必定与L的一个节点相关联。假定与节点i相关联的非回路边数至少同与节点j或者k相关联的一样大。此外，可以假定如果$(u,v)(u\neq i,j,k)$在G中，则G中不存在$\alpha(x,y)\geqslant 2$的边(x,y) $(x=i,j,k,u$，以及$y\neq v)$，因为如果不是这样，则通过一初等$(\infty,0)$d-不变变换将产生含有长度为4的回路的图。如果在G中有边(x,i)和(y,j)，这里x和y不在L中，则用边(i,y)和(j,k)替换边(i,k)和(j,y)的变换，会在G中产生图G_1，使得$G_1\neq G$，这是因为与G_1的节点i相关联的非回路边数要比在G中的数大1。这样我们只需要考虑下列类型的G的边(x,y)：(i) x和y都在L中，以及(ii)如果x不在L中，则$y=i$。在下列三个子情况中考虑这两种类型的边。子情况1：在G中仅有在一条具有形式(x,i)的边，这里x不在L中。于是G恰好具有四个节点，而其中一个的度为1。如果$d(i)=d(j)=d(k)$，则满足条件(4)。因此，设$d(i)\neq d(k)$。如果在G中用边(x,k)和(i,j)来替换边(x,i)和(j,k)，则在$\{G\}$中会产生一个新图G_2，使得$G_2\neq G$，因为在G_2中有一非回路边关联于某一节点，这一节点与G中节点i有不同的度。子情况2：在G中至少有两条形式为(x,i)的边，这里x不在L中。如果(x,i)是非回路边，则通过类似于以上所讨论的变换，可以在$\{G\}$中产生与G不同的图。因此可以假定，所有的(x,i)都是回路边，此外在G中节点k和j之间不存在并联边。如果有并联边连接节点k和j，则用边(x,j)和(i,k)替换边(x,i)和(k,j)的变换，在$\{G\}$中会产生图G_3，使得$G_3\neq G$。因为G_3含有长度为4的回路。如果在G中除i之外所有节点具有相同的度，则满足条件（6）。如果在i之外还至少有两个不同度的节点，则作一次简单变换就会在$\{G\}$中产生图G_4，使得$G_4\neq G$。子情况3：G中没有类型(ii)的边，则满足条

件(1)。

情况 4：G含有长度至少为4的回路，如果G的所有节点的度都为2，则满足式(6.52 a)，这是条件(2)的一种特殊情况；另一条件(6.52 b)已在情况1中给出。如果存在度$\neq 2$的节点，根据引理6.17，则实现不可能是唯一的。这就完成了定理必要性部份的证明。

充分性：如果集合$\{a_i\}$可实现为连通图的节点度，以及它满足下列七个条件的任一个，则可证明实现是唯一的。

(1) 如果$n \leqslant 3$，则实现显然是唯一的，因为应用任何初等$(\infty, 0)d$-不变变换，不会破坏图的连通性，会产生与原图同构的图（推论6.11）。

(2) 如果a_1 a_n，则实现是长度为n的回路，这是唯一的。如果满足式(6.52 b)，实现是长度为n 的路径。因此，根据式(6.52)，条件(2)是充分的。

(3) 条件(3)等效于式(6.53)，这一集合的连通实现必定是树(推论6.22)，此外，每个树含有长度为4的路径。设P $(i_1, i_2) \cup (i_2, i_3) \cup (i_3, i_4) \cup (i_4, i_5)$是一个这样的路径，那么对于x 2，3，4，有$d(i_x)$ a_1~a_3，以及对于树中所有其它节点，有$d(y)$ 1。因此恰好有a_1-2条树的边，不含于路径P中，而与节点i_2，i_3和i_4的每一个相关联。这种类型的树对同构之内而言，显然是唯一的。

(4) 如果n 4以及a_1 $a_3>a_{\cdot}-1$，则实现显然是唯一的，证明与(1)相类似。

(5) 如果a_1 $a_2+a_3+\cdots+a_n$，则实现的所有边在对应于整数a_1的节点上相关联，因此这是唯一的。

(6) 如果a_1 $(n-1)a_2-2$，$a_1>a_2-a_n$，以及$n>3$，则除了实现的一条边之外，所有边在对应于整数a 的节点上相关联。显然，如果a_2 a_n，则没有初等$(\infty, 0)d$不变变换来产生与原图不同的图。因此实现是唯一的。

(7) 如果 $a_3=1$ 以及 $a_2\neq 1$，则任何实现必定含有长度为3的路径，设 $P=(i_1,i_2)\cup(i_2,i_3)\cup(i_3,i_4)$ 是一条这样的路径。不失一般性，假定 $d(i_2)=a_1$ 以及 $d(i_3)=a_2$，对于 $k=3, 4, \cdots, n$，由于 $a_k=1$，则实现必有 $\frac{1}{2}(a_1+a_2-n+2)$ 条并联边连接在节点 i_2 和 i_3 之间。所有其它边都在 i_2 或 i_3 上相关联，直到满足这两节点的度要求为止。因此，实现是唯一的。如果 $a_2=1$，实现显然是唯一的，定理证毕。

显然，在定理中给出的七个条件不是不相容的，例如，集合{2，1，1}满足条件(1)、(2)和(7)。另一方面，也有集合仅唯一满足一个条件，如集合{3，3，2}仅满足条件(1)、{2，2，2，2}仅满足条件(2)、{3，3，3，1，1，1，1，1}仅满足条件(3)，{3，3，3，1}仅满足条件(4)，{6，3，2，1}仅满足条件(5)，{4，2，2，2}仅满足条件(6)，以及{4，4，1，1}仅满足条件(7)。因此，表明这七个条件中没有一个是可以略去的，而且这些集合的每一个都可实现为一个且仅有一个无自环的图的节点度，在图6.22中已给出这些集合。

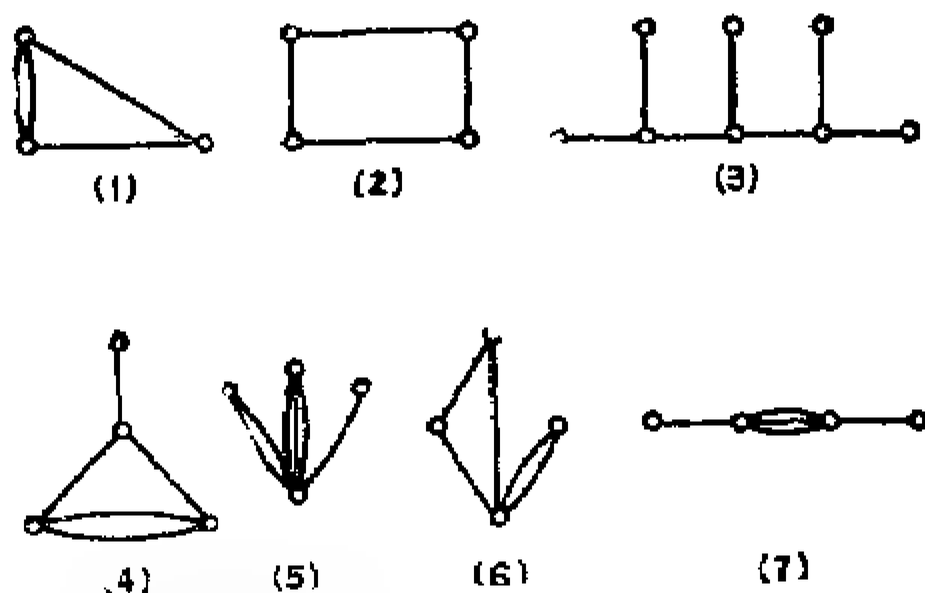


图 6.22 这七个集合中每一个节点度都唯一满足式(6.51)的一个条件

3.3 图的唯一可实现性

在这一节中将讨论集合的实现是连通图的条件，这就意味着定理 6.11 的唯一实现性条件现在可以放松一些。

定理 6.12：假设有一集合$\{a_i\}$（对于 $i=1, 2, \cdots, n-1, n\geq 2$，有 $a_i\geq a_{i+1}$）可实现为无自环图的节点度，当且仅当集合的整数至少满足下列条件中的一个：

(1) $n\leq 3$ (6.55 a)

(2) $n=4$ 以及 $a_1=a_3>a_4=1$ (6.55 b)

(3) $a_1=a_2+a_3+\cdots+a_n$ (6.55 c)

(4) $a_1=(n-1)a_2-2$，$a_1>a_2=a_n$，以及 $n>3$ (6.55 d)

(5) $a_2=a_n=1$ (6.55 e)

则实现无自环图是唯一的。

证明：必要性，设G是集合$\{a_i\}$的唯一实现，将证明如果集合的整数不满足式(6.55)条件中的任一个，则实现不是唯一的。不失一般性，可以假定G没有孤立节点，因为如果有孤立节点，可以删去这些节点，以及在$\{a_i\}$中相应的零，然后把余下的图和集合作为问题来讨论。考虑两种情况：

情况 1：G是连通的，则由于G是唯一的，它的节点度必定至少满足定理 6.11 的七个条件式（6.51）中的一个。分别考虑这些条件中的每一个，以及删去容许非连通实现的那些条件，就可以得到假设中的五个条件。注意，如果 $a_1=1$，条件式（6.51 g）容许一个非连通实现。

情况 2：G是不连通的，对于G中所有节点 j，设 $d(j)=a_j$，如果所有整数 a_i 之和不小于 $2(n-1)$，则根据推论 6.20，存在一个连通实现，因为整数之和满足式(6.41 b)。如果G具有回路，则根据引理 6.8，有一个与G不同的实现。因此，可以假定G不含有回路，以及整数 $d(j)$之和小于 $2(n-1)$。假定 k 是度为 2 的节点数。如果 $k\leq 1$，则满足条件(5)。对于 $k=1$，需要考虑两个子情况。如

果这些k个节点处于G的k的不同片中，则通过初等(∞，0)d不变变换，可以产生图G_1，其中这些k个节点处于G_1的k-1个片中。如果这些k个节点处于G的q(q<k)个片中，则再一次通过初等(∞，0)d-不变变换，可以产生图G_2，其中这些个节点处于G_2的q+1个片中。

充分性：利用推论6.11和定理6.11，式(6.55)五个条件的充分性是显而易见的，定理证毕。

作为一个例子，考虑如图6.22中所示的七个实现，可以很容易证明图6.22的图(2)、(3)和(7)同样具有非连通实现，它们在图6.23中给出。

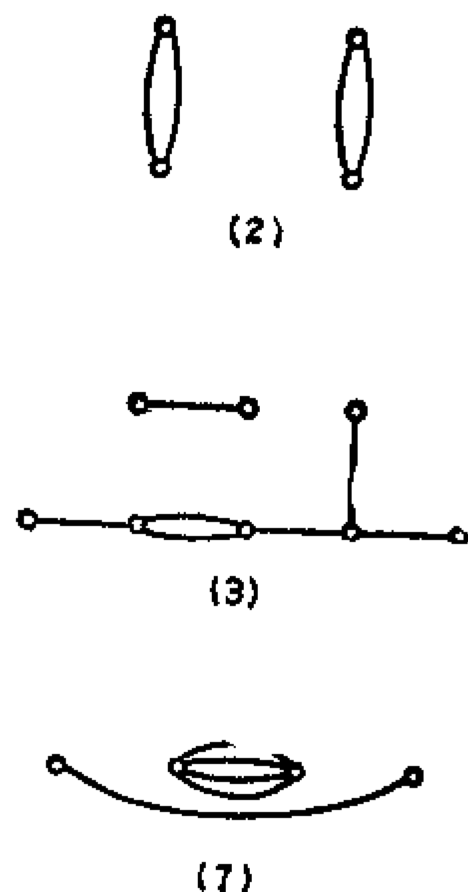


图 6.23 图6.22的图(2)(3)和(7)的非连通实现

§ 4. (p, s)-矩阵的存在性和可实现性

在前面章节中，已讨论了具有规定入度和出度的(p，s)-有向图存在性的必要和充分条件，在这一节中，将表明(p，s)有向图的存在性也可以形成称为(p，s)矩阵一类矩阵的存在性。

定义 6.7：(p，s)-矩阵

对于给定非负整数p和s，当且仅当非负整数的方阵的所有非对角线元有上界为p，以及所有对角线元有上界为s，则这样的方阵称为(p，s)矩阵。一个(p，p)矩阵也称为p矩阵。

对于一个阶为n的给定(p，s)矩阵M，设对于i，j=1，2，

…，n，M的第i行之和用a_i表示，以及M的j列之和用b_j表示，显然M中整数之和由下式给出：

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.56}$$

问题是对具有规定行和a_i以及列和b_j的(p，s)-矩阵存在性，确立必要和充分的数值条件。这问题可以利用具有规定节点度对(a_i, b_i)的(p，s)有向图的存在性来阐述。设$M=[\alpha_{ij}]$，于是M的对应(p，s)-有向图G_d是n节点有向图，其中如果$\alpha_{ij}\neq 0$，则对于i，j=1，2，…，n，有α_{ij}条从节点i指向节点j的并联边。相反，对于给定(p，s)-有向图，建立对应(p，s)-矩阵是简单明了的，因而不必详尽阐述。因此，在这两种不同表示法中存在一一对应关系。作为一个例子，考虑如图6.14所示的(2，0)-有向图，对应的(2，0)-矩阵由下给出：

$$M = \begin{array}{c|ccccc|} & 2 & 3 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 1 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

显然，对于(p，s)有向图得到的所有结论可以转入(p，s)-矩阵。由于它们只是稍有不同，所以几乎没有必要整个儿地重复相同的结论。这里仅只提出与(p，s)有向图初等(p，s)d不变变换相对应的(p，s)-矩阵的对应运算关系。

考虑下列类型M的2×2子矩阵：

$$M_1 = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{以及} M_2 = \begin{bmatrix} b & a \\ d & c \end{bmatrix} \tag{6.57}$$

式中min(a，d)≠0，以及如果b或c是M的非对角线元，则b，c<p，如果b或c是M的对角线元，则b，c<s。设

$$M_3=\begin{bmatrix} a-1 & b+1 \\ c+1 & d-1 \end{bmatrix} \text{以及} M_4=\begin{bmatrix} b+1 & a-1 \\ d-1 & c+1 \end{bmatrix} \tag{6.58}$$

(p, s)-交换定义为 M 元素的变换，或是改变给定类型 M_1 的子矩阵为 M_3，或是改变类型 M_2 的子矩阵为 M_4，M 的所有其它元素均不改变。假定对 M 使用有限次数的(p, s) 交换，则根据运算的性质，所产生的矩阵具有相同的行和以及相同的列和。于是根据定理 6.2，如果{M}是具有与 M 相同行和以及相同列和的所有可能的(p, s) 矩阵的集合，则{M}的每个元素可以从任何其它元素，通过有限序的(p, s) 变换得到。

作为一个例子，考虑以下两个(1, 0) 矩阵 H_1 和 H_2：

$$H_1=\begin{array}{c|ccccc|} & 2 & 3 & 3 & 4 & 0 \\ \hline 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

$$H_2=\begin{array}{c|ccccc|} 2 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

如果在 H_2 中用对应的子矩阵 $H_1(14;23)$替换子矩阵 $H_2(14;23)$，则可以通过(1, 0) 交换变换 H_2 为 H_1。这里 $H_2(14;23)$ 表示由 H_2 的行 1 和 4 以及列 2 和 3 所组成的子矩阵，对 $H_1(14;23)$同样是成立的。

显然，关于(p, s) 矩阵的讨论，通过添加仅由零组成相应的行或列数，可以很容易推广到具有规定行和列之和的有界非负整数的任一矩阵。由于 1 和 0 组成的矩阵有相当大的实用意义，所以在

下面将介绍简单的"n 步"方法。这首先是由GALE[1957]在构造具有规定行和列之和的1矩阵中提出的。

假定对于 $i=1, 2, \cdots, n$，$n\geq 2$，要求构造具有给定行和 a_i 以及列和 b_i 的1矩阵H。不失一般性，对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$，设 $a_j\geq a_{j+1}$ 和 $b_j\geq b_{j+1}$，当且仅当整数满足条件式(6.10)，则问题有解。假定这些条件是满足的，构造1-矩阵H的方法如下：设 $H=[h_{ij}]$，由于 $b_1<a_1^*$，从而有 $a_1, a_2, \cdots a_{b_1}\geq 1$。对于 $i\leq b_1$，设 $h_{i1}=1$，以及对于 $i>b_1$，设 $h_{i1}=0$。现在来考虑具有行和 $a_i'=a_i-h_{i1}$ 以及列和 b' 的阶为n的矩阵 H_1 的新问题，这里 $b_1'=0$，以及对于 $j\geq 2$，$b_j'=b_j$。显然，H_1 的第一列仅由零组成，可以断言新问题也是有解的，这样通过重复过程，最终填满整个矩阵H。

设 b_j' 排列为 $b_2', b_3', \cdots, b_n', b_1'$，为了证明新问题有解，必须证明对于任何k有

$$\sum_{j=1}^{k}(a_j')^* \geq \sum_{j=2}^{k+1} b_j \qquad (6.59\,a)$$

式中对于 $j>n$，$b_j=0$。记住，如果有必要，序列 b_j 或 b_j' 以及 $(a_j')^*$ 通过添加相应数的零，使得有相同的长度。根据式(6.11)，式(6.59 a)的左边可以写为

$$\sum_{j=1}^{k}(a')^* = \sum_{i=1}^{n}\min(a_i', k) = \sum_{i=1}^{b_1}\min(a_i-1, k)+\sum_{i=b_1+1}^{n}\min(a_i, k) \qquad (6.59\,b)$$

式中对于 $b_1=n$，第二个和式为零。如果 $a_{k+1}^*\geq b_1$，则对于 $i\leq b_1$，$a_i-1\geq k$，于是根据式(6.11)和(6.10 b)，因为 $b_1\geq b_{k+1}$，满足式(6.59 a)。如果 $a_{k+1}^*<b_1$，则

对于 $i\leq a_{k+1}^*$，$a_i\geq k+1$，

对于 $a_{k+1}^*<i\leq b_1$，$a_i\leq k$。

由于

对于 $a_i \geqslant k+1$，$\min(a_i-1, k)=\min(a_i, k)$

以及

对于 $a_i \leqslant k$，$\min(a_i-1, k)=\min(a_i, k)-1$

因为满足式(6.10 b)，式(6.59 b)的右边成为

$$\sum_{i=1}^{n}\min(a_i', k)=\sum_{i=1}^{n}\min(a_i, k)-(b_1-a_{k+1}^*)$$

$$=\sum_{i=1}^{k+1}a_i^*-b_1$$

$$\geqslant\sum_{j=1}^{k+1}b_j-b_1=\sum_{j=2}^{k+1}b_j$$

这就完成了问题的证明。

用下面的例子来说明以上方法。

例 6.12：假设要求分别构造具有下列行和及列和的可实现序列的 1 矩阵 H：

$\{a_i; i=1, 2, 3, 4, 5\}=\{4, 3, 2, 2, 1\}$，

$\{b_i; i=1, 2, 3, 4, 5\}=\{4, 3, 3, 2, 0\}$，

这已经以非增次序排列。由于 $b_1=4$ 和 $a_1^*=5$，于是 H 的第一列转置由下式给出：

[1 1 1 1 0]

其次，考虑新序列

$\{a_i'; i=1, 2, 3, 4, 5\}=\{3, 2, 1, 1, 1\}$

$\{b_i'; i=1, 2, 3, 4, 5\}=\{0, 3, 3, 2, 0\}$

由于 $b_2'=3$，于是 H 的第二列转置由下式给出

[1 1 1 0 0]

现考虑新序列{2, 1, 0, 1, 1}和{0, 0, 3, 2, 0}，于是 H 的第三列转置由下式给出

[1 1 0 1 0]

下一个序列分别是{1, 0, 0, 0, 1}和{0, 0, 0, 2, 0}，以及{0, 0, 0, 0, 0,}和{0, 0, 0, 0, 0}，它们产生H的最后二列，因此有

$$H=\begin{bmatrix}1&1&1&1&0\\1&1&1&0&0\\1&1&0&0&0\\1&0&1&0&0\\0&0&0&1&0\end{bmatrix}$$

§5. 加权有向图的可实现性

加权有向图是一个有向图，其中每条边赋予一个权。在第三章和第四章中，已应用这种概念来分析电网络和其它物理系统。因此把目前的讨论推广到加权有向图的情况是很自然的。

定义 6.8：加权(p, s)-有向图。

设 G_w 是1-有向图，其中每条边赋以非负实数，用 $f(i, j)$ 来表示与边(i, j)相关的数。对于给定的非负实数p和s，如果对于所有 $i\neq j$，

$$0\leq f(i, j)\leq p$$

以及对于所有i，

$$0\leq f(i, i)\leq s$$

则1-有向图 G_w 称为加权(p, s)-有向图。加权(p, p)-有向图也称为加权p-有向图。

在加权有向图中，不必考虑并联边，因为它可以用具有权等于这些并联边权之和的简单边来表示。对于n-节点加权(p, s)-有向图 G_w，对 $i=1, 2, \cdots, n$，下列非负实数对(w_i, w_i')

$$w_i = \sum_{j=1}^{n} f(i, j) \tag{6.60 a}$$

以及

$$w_i' = \sum_{j=1}^{n} f(j, i) \tag{6.60 b}$$

称为 G_w 的节点 i 的加权度对。我们的问题是求一组 n 个非负实数对(w_i, w_i')是 n 节点加权(p, s) 有向图的加权节点度对的必要和充分条件。

除了分别用 w_i 和 w_i' 取代 a_i 和 b_i 之外，可实现性条件与式(6.2)中给出的 (p, s) 有向图的完全相同，原因是可以用完全类似于证明定理 6.1 的方式来证明这个结论。但是，根据(kp, ks) 有向图，可以提出加权(p, s) 有向图的简单解释。

对于任一(p, s)-有向图 G_d，有一个加权(p, s) 有向图 G_w 的唯一表示法：如果在 G_d 中存在(i, j)，则(i, j)在 G_w 中，而 f(i, j)等于 G_d 中从节点 i 指向节点 j 的并联边数。相反地，如果 p, s 以及加权(p, s) 有向图 G_w 的权 f(i, j) 是有理数，则存在一个正整数 k，使得对于所有 i 和 j，kf(i, j) 是非负整数，于是其对应有向图 G_d 是(kp, ks) 有向图，其中对所有 i 和 j，有 kf(i, j) 条从节点 i 指向节点 j 的并联边。因此，实现一组非负整数对(w_i, w_i')为加权(p,s) 有向图的加权节点度对的问题，等效于实现一组非负整数对(kw_i, kw_i')为(kp, ks) 有向图的节点度对。由于 kp, ks, kw_i 和 kw_i' 都有公共因子 k，则整数 k 可以从定理 6.1 的条件式(6.2)中删去。因此，对于加权(p, s)-有向图的可实现性条件恰好与(p, s) 有向图的完全相同。换言之，前面章节所

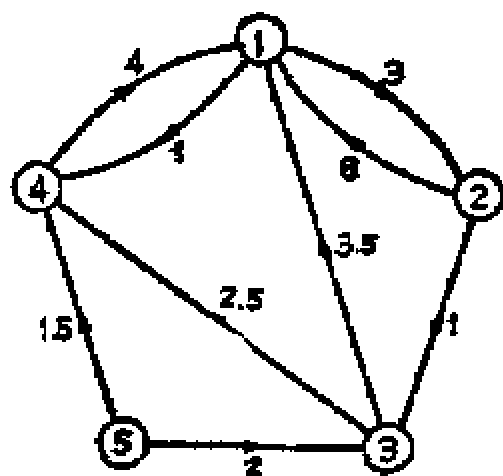


图 6.24 一组非负实数对实现为加权有向图的加权度对

讨论的绝大多数结论仍然有效，当然在细节上要作必要的修正，正如从以上论证或者在整个证明中作很小修改所看到的

作为一个例子，假设有非负实数对集：

$\{(w_i, w_i'); i=1, 2, 3, 4, 5\}=\{(4, 13.5), (6, 4), (7, 2), (4, 5), (3.5, 0)\}$

由于根据式(6.4)，(5.5)以及(6.6)，有

(6.4a)：$4+6+7+4+3.5=24.5=13.5+4+2+5+0$

(6.6)：$6+7+4+3.5=20.5\geq 13.5$

这一集合可实现为无自环加权有向图的加权度对，其一种实现如图6.24所示。

§6. 结　束　语

在这一章中，我们已经提供了一组非负整数对实现为(p，s)-有向图的节点度对的必要和充分条件。主要定理证明的简单构造，提出了从一可实现集合构造这种(p，s)有向图的简单方法。一般的存在性条件由一组 2^n-1 个不等式组成，这里n是集合的元素数。在许多情况下，这些条件可以转化为在假设的约束条件下一组n个不等式。我们已经指出，利用有限序列的初等(p，s)d 不变变换，集合的任何两种实现可以相互转换。利用这种类型的变换，从(p，s)有向图的节点度对的实现条件，导出了一组非负整数实现为(p，s)图的节点度的可实现性条件，也给出了集合实现为无自环的连通(p，s)有向图或可分图或不可分图的节点度对或节点度的可实现条件。

我们也提供了一组非负整数实现为无自环的图或连通图的节点度的唯一可实现的必要和充分条件，这问题在结构有机化学上有相当大的意义，因为它与给定化合物的结构异构体有紧密的关系。

(p，s)-有向图的存在性也确立了具有规定行和以及列和的(p，s)-矩阵的存在性的必要和充分的数值条件，著名的0 1矩阵成为一

种特殊情况。

最后把讨论推广到具有规定加权度对的加权（p，s）有向图的存在性。这问题是很有意义的，因为加权图的概念在图论应用于电网络和其它物理系统中是极其有用的。

习　题

6.1　设 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 和 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是两个实数集，使得

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \quad \sum_{i=1}^{n} y_i \tag{6.61 a}$$

证明

$$\sum_{i=1}^{n} x \geqslant y_n \tag{6.61 b}$$

当且仅当

$$\sum_{i=1}^{n} (x \;\; + y_i) \geqslant x_n + y_n \tag{6.61 c}$$

6.2　证明如果式(6.5)成立，则式(6.4 b)和(6.6)是等效的。

6.3　证明对于集合$\{a_i\}$有

$$\{\{a\}^*\}^* \quad \{a_i\} \tag{6.62}$$

6.4　对 n 应用归纳法证明推论 6.2。

6.5　在如图 6.5 所示的有向图中是否存在 d-不变的(2，0)-有向图？

6.6　证明在$\{a_i\}$中，对于 $i \;\; 1, 2, \cdots, n-1$，$n \geqslant 2$，如果 $a_i \geqslant a_{i+1}$，则式(6.24)中所定义的整数 a_j'' 的序列对于 $j=1, 2\cdots$，或是单调非增，不然就是对于某个 k，$1 \leqslant k < n$，有

$$a_1'' \geqslant \cdots \geqslant a_k'', \; a_{k+1}'' \quad a_k'' + 1 \geqslant a_{k+2}' \geqslant \cdots \geqslant a_n'' \tag{6.63}$$

6.7　证明推论 6.8。

6.8　集合$\{(a_i, b_i)\}$能实现为具有入度为 k 的半正则 (1，0)-有向

图的节点度对的必要和充分条件是什么？

6.9 证明推论 6.9 和 6.10。

6.10 推广习题 6.8 到实现具有入度为 k 的半正则(p, 0)-有向图。

6.11 对于 $p<s$，推论 6.8 仍然有效吗？如果不，给出一个反例。

6.12 证明引理 6.3、6.4 和 6.5。

6.13 在推论 6.2 中，假定式 (6.4 b) 满足等号，实现的有向图将是什么类型的？

6.14 证明引理 6.6。

6.15 假定有向图 G_d 至多只有一个节点其入度或者出度为零，证明对于 $n>1$，G_d 有一有向回路。

6.16 设 G_d 是至少含有两个节点的无圈有向图，证明至少存在两个入度和出度为零的节点。

6.17 证明推论 6.11、

6.18 给定一个无自环的图 G，其节点从 1 到 n 编号。对于 i = 1, 2, ···, n，设 b_i 是与 G 的节点 i 伴随的非负整数，证明对 G 的边可以选定方向，使得所产生有向图的节点 i 的入度是 b_i，当且仅当对于 G 的每个非空子图 g，

$$\sum_{i\in g} b_i - \alpha(g) \geq 0 \tag{6.64 a}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = \alpha(G) \tag{6.64 b}$$

式中 i 是 g 的节点，而 $\alpha(g)$ 表示 g 的边数 (HAKIMI [1965])。

6.19 证明推论 6.12。

6.20 给出集合 $\{(a_i, b_i)\}$ 能实现为一有向树 t_r 的节点度对的必要和充分条件，证明你的结论(提示：利用式(5.37))。

6.21 在习题 6.18 中，假定方向的选定是可能的，证明当且仅当所产生的有向图是无圈时，这一选定是唯一的。

6.22 设 G_d 是平面(1, 0) 有向图，证明如果在 G_d 中存在 $d^+(i)$

$\geqslant 3$ 的节点 i，则在 G_d 中存在一条 $d^+(j)\leqslant 2$ 的从节点 i 到节点 j 的有向路径(提示：$b\leqslant 3(n-2)$，这里 b 和 n 分别是 G 的边和节点数)。

6.23 证明对每一个平面 (1，0) 有向图可以以这样的方式重新取向，使每个节点的出度不大于 3(提示：应用习题 6.22 的结果)(LEMPEL[1968])。

6.24 证明定理 6.5，此外证明如果 s 是奇数，以及 $p=0$，则 h 会减少 1。

6.25 证明实现集合$\{a_i\}$的每个图G是零度为 $c-1$(这里 c 是G的片数)，当且仅当非负整数 a_i 之和等于 $2(n-1)$。

6.26 应用习题 6.25 的结论，证明推论 6.22。

6.27 证明推论 6.15。

6.28 确定集合{1，1，1，1，1，1，1，1，4，4，4}和{2，2，2，4}是否可唯一地实现为无自环连通图的节点度。

6.29 证明如果集合$\{a_i\}$可实现为平面(1，0) 图的节点度，则其非负整数必须满足定理 6.6 的条件，以及对于 $k=0, 1, \cdots, n-3$，$n\geqslant 3$，

$$\sum_{i=k+1}^{n} a_i - \sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant 6(n-k-2) \tag{6.65}$$

式中第二个求和式对于 $k=0$ 为零。此外，证明对于 $n<6$，条件是充分的，但对于 $n\geqslant 6$，条件是不充分的。用集合 {3，1，4，4，4，5} 来证明后一个论点(提示：这一集合具有唯一实现)。(BÖTTGER 和 HARDERS[1964])(对于有关的论述，参见 OWENS[1971])。

6.30 证明推论 6.17。

6.31 设 $a_1+a_2+\cdots+a_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$。对于 $i=1, 2, \cdots, n$，证明具有如上规定行和 a_i 及列和 b_i 的 p 矩阵存在性条件等效于其行和受大于非负整数 a_i 约束，以及其列和受小于

非负整数 b_i 约束的 p-矩阵存在性条件。

6.32 证明存在一个 $n \times n(1, 0)$-矩阵，其列和受小于非负整数 b 的约束，以及其第 i 行和受大于非负整数 a_i 的约束，当且仅当对于 $n \geq 2$，

$$nb \geq \sum_{i=1}^{n} a_i'' \tag{6.66}$$

式中 a_i'' 是式 (6.24) 中所定义的，以及对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$，$a_j \geq a_{j+1}$（提示：参见习题 6.31）（FOLKERSON [1960]）。

6.33 证明存在一个 $n \times n(1, 0)$ 矩阵，其行和受大于非负整数 a 的约束，以及其第 i 列和受小于非负整数 b_i 的约束，当且仅当 $b_i \leq n-1$，及

$$na \geq \sum_{j=1}^{n} b_j \tag{6.67}$$

式中 $i=1, 2, \cdots, n$（提示：参见习题 6.31）（FULKERSON [1960]）。

6.34 证明定理 6.8。

6.35 证明对于在 $1 \leq k \leq n$ 内的所有 k，式(6.24 b)成立，当且仅当在 $1 \leq k \leq x \leq n$ 内的所有 k，x，下式成立：

$$\sum_{i=x+1}^{n} a_i + k(x-1) \geq \sum_{j=1}^{k} a_j \tag{6.68}$$

式中第一求和式对于 $x=n$ 定义为零（提示：应用下列恒等式：

$$\sum_{j=1}^{k} a_j'' = \min_{0 \leq x \leq n} \left[\sum_{i=x+1}^{n} a_i + kx - \min(k, x) \right] \tag{6.69}$$

（FULKERSON et al[1965]以及 CHEN[1973]）。

6.36 证明定理 6.10 的条件(i)和(ii)。

6.37 在引理6.17的证明中，补充证明情况2的子情况(ii)-(iv)的细节。

6.38 验证式(6.52)和(6.53)中所给的等效条件。

6.39 证明(1, 0)-图总是可以通过有限次的初等(1, 0)d不变变换，变换为简单的标准形式，标准(1, 0)-图的形式是怎样的?(提示：利用引理6.10)。

6.40 假定集合$\{a_i\}$可实现为(1, 0)图的节点度，证明当且仅当对所有的i，有$a_i \neq 0$，以及整数a_i的和不小于$2(n-1)$时，可实现为连通(1, 0)图。

6.41 假定对一给定集合$\{a_i\}$，$n \geqslant 2$，存在(1, 0)图的实现，证明对于集合$\{a_i\}$，当且仅当对于所有i，有$a_i \geqslant k$时，存在具有如下性质(1,0)-图的实现：从图中移去任何少于k条边($k \geqslant 2$)剩下的图是连通的。(EDMONDS[1964])。

6.42 证明由四个或者不到四个非负整数所组成的集合实现的所有(1, 0)图，如果它们存在，则它们都是同构的。

6.43 考虑一非空n节点(1, 0)-图。设$n=a_1+a_2$，这里a_1和a_2都是非负整数。证明存在一个G的节点集的划分$V=V_1 \cup V_2$，使得V_1有a_1个元素、V_2有a_2个元素，以及

$$\max[d(i)]+\max[d(j)] \leqslant \max[d(k)] \qquad (6.70)$$

式中节点i和j分别处于局部子图$G[V_1]$和$G[V_2]$中，而k处于G中(LOVASZ[1966])。

6.44 证明对于每个正整数$n \geqslant 2$，恰好存在两个非同构的n节点(1, 0)图，其每个图中正好有两个节点具有相同的度，并且这些图是互补的(BEHZAD和CHARTRAND[1967])。

6.45 假定集合$\{a_i\}$可实现为图G和无自环图G_1的节点度，设$\{G\}$是取自G的d不变图的集合，而设$\{G_1\}$是取自G_1的d不变无自环图的集合。在$\{G\}$中，设G'是含有最少并联边数和自环数的元素，而在$\{G_1\}$中，设G'_1是含有最少并联边的元素，定义$X_k=\{x_1, x_2, \cdots, x_k\}$。证明如果对于所有的j，

有 x 2，则具有集合$\{a_i\}\cup X_1$ 可实现为(1，0) 图节点度的最小值k等于必须从 G'_j 中移去的最少边数，从而使所产生的图是(1，0)-图。类似地，证明如果对于所有的 j，x_j 1，则具有集合$\{a_i\}\cup X_{2k}$ 可实现为(1，0)-图节点度的最小值k等于必须从 G' 中移去的最少边数，从而使所产生的图是(1，0) 图(OWENS 和 TRENT[1967])。

6.46 设 G_1 是含有 $k(k\geq 1)$个自环的(p，s)-图，这里 $p\neq 0$。证明存在一个(p，s) 图 G_2，它取自 G_1 的 d 不变，并在度为最高的节点上含有 k 个自环。

6.47 证明式(6.42 b)对于所有在 $1\leq k\leq n$ 中的 k 都成立，当且仅当对于 x 1，2，$\cdots$，n 1，

$$x(x-1)+\sum_{i=x+1}^{n}\min(x,\ a_i)\geq\sum_{i=1}^{x}a_i \qquad (6.71)$$

(ERDÖS 和 GALLAI[1960]和 CHEN [1973])。

6.48 设 t 是一有 n 个标号节点的树，其中对于每个节点 i，有 $d(i)$ a_i，设 $\{t\}$ 是根据 t 的 n 个标号节点以及取自 t 的 d 不变的树集。证明对于 $n\geq 3$，有

$$\alpha\{t\}=(n-2;\ a_1-1,\ a_2-1,\ \cdots,\ a_n-1) \qquad (6.72\text{a})$$

式中

$$(n;\ a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k)=\frac{n!}{a_1!a_2!\cdots a_k!} \qquad (6.72\text{b})$$

(提示：利用恒等式

$$(n;\ a_1,\ a_2,\ \cdots a_k)=\sum(n-1;\ a_1,\ \cdots,\ a_i-1,\ \cdots,\ a_k) \qquad (6.72\text{c})$$

对于 $a_i\geq 1$，式中求和式取遍所有 i)。

6.49 在习题 6.48 中，证明在 $\{t\}$ 中，树的数目(其中一个给定节点的度为 k)由下式给出

$$\binom{n-2}{k-1}(n-1)^{n-k-1} \tag{6.73}$$

式中 $n \geqslant 3$(CLARKE[1958])。

6.50 下面那一个集合可实现为(1, 0)图的节点度?

(a) {2, 2, 3, 3, 3, 3,},

(b) {4, 4, 4, 4, 3, 3, 2},

(c) {3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3, 3,},

(d) {5, 5, 4, 4, 4, 3, 3}。

6.51 设G是一(p, 0)-图, $p \geqslant 2$, 其中至少存在两个节点, 这两个节点之间连接p条并联边。设k是G的度为最大的一个节点, 证明存在一个(p, 0)图 G_1, 它取自G的d不变, 且 G_1 中对某个节点j, 有p条并联边连接节点k。

6.52 在习题6.51中, 如果 k_1 和 $k_2(k_1 \neq k_2)$ 是两个具有最大度的G的节点, 则存在一个(p, 0)图 G_2, 它取自G的d不变, 并有p条并联边连接节点 k_1 和 k_2。

6.53 假定集合$\{a_i\}$(对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$, $n \geqslant 2$, 有 $a_j \geqslant a_{j+1}$)可实现为无自环图G的节点度。设{G}是取自G的d-不变的无自环图的集合。证明如果在{G}中不存在(p, 0)图, 则集合

$$\{a_1-p, a_2-p, a_3, \cdots, a_n\} \tag{6.74}$$

也可实现为无自环图的节点度(提示:利用习题6.52的结论)。

6.54 在式(6.74)中, 设 $p=1$, 假定简化图已进行了k次, 设 k_m 是使对应于第 k_m 次简化图的集合可实现为(1, 0)图的节点度的最小的k。证明 k_m 是从{G}中含有最少并联边数的一个图中必须移去的最少边数, 使得所产生的图是(1, 0)-图(OWENS[1970])。

6.55 应用习题6.54的结论, 证明对于以下集合

$$\{6, 7, 5, 5, 4, 3\}$$

$k_m = 3$。

6.56　假定集合$\{a_i\}$(对于$j=1, 2, \cdots, n-1$, $n\geq 2$, 有$a_j\geq a_{j+1}$)可实现为无自环图G的节点度。设$k_m(\{a_i\})$是习题6.54中对集合$\{a_i\}$所定义的整数k_m. 设a是$\{a_i\}$的整数之和，证明整数$k_m(\{a_i\})$也可以用下面的算法来确定：

情况1：如果$a_n<n-1$以及$2(a_1+a_n)<a$，则有

$$k_m(\{a_i\})=k_m(\{b_i\}) \qquad (6.75\,a)$$

式中$\{b_i\}$是由下列非负整数组成的集合，

$a_1-1, a_2-1, \cdots, a_{a_n}-1; a_{a_n+1}, \cdots, a_{n-1},$

$a-a_n$，以非增次序排列。

情况2：如果$a_n<n-1$，以及$2(a_1+a_n)\geq a$，则有

$$k_m(\{a_i\})=a_1-n+1 \qquad (6.75\,b)$$

情况3：如果$a_n\geq n-1$，则有

$$k_m(\{a_i\})=\max\left[(a_1-n+1),\ \frac{1}{2}a-\frac{1}{2}n(n-1)\right] \qquad (6.75\,c)$$

(提示：对于情况1，{G}中存在一个没有并联边从节点n射出的图。对于情况2，由于$a\leq 2(a_1+a_n)$，可以各用一条边连接节点n到a_n个节点上(除开节点1)，而其余的边连接节点1和其它节点。对于情况3，注意到，在n节点完备(1, 0)图中存在$\frac{1}{2}n(n-1)$条边)KLEITMAN[1970])。

6.57　应用式(6.75)，证明

(a) $k_m(\{8, 8, 4, 2, 2\})=5$,

(b) $k_m(\{8, 8, 7, 7\})=9$,

(c) $k_m(\{5, 5, 5, 4, 3, 2\})=1$,

(d) $k_m(\{8, 8, 4, 1, 1, 1, 1, 1, 1\})=4$。

6.58　设$\{G_d\}$是取自n节点(p, s)有向图G_d的d不变的有向图

的集合，设 G_1 和 G_2 是 $\{G_d\}$ 的两个元素。用 $G_1 \oplus G_2$ 表示从 G_1 和 G_2 中所得的 n 节点有向图，使得当且仅当 (i, j) 或者在 G_1 中，或者在 G_2 中，但不在两者公共边中，则 (i, j) 在 $G_1 \oplus G_2$ 中。假定对 $G_1 \oplus G_2$ 的边适当地标号，使得可以把 G_1 的边和 G_2 的边区别开。在 $G_1 \oplus G_2$ 中交替边列是这样的一条边列，沿着边列，边交替地属于 G_1 和 G_2，以及如果把其中 $G_1(G_2)$ 的这些边的方向反过来，可以得到有向边列。证明如果 $G_1 \oplus G_2 \neq \phi$，则它可以分解为偶长度 ≥ 4 的闭合交替边列的边不相接并。

6.59 在习题 6.58 中，设 $s \neq 0$，证明通过一系列初等 (p, s)d-不变变换，G_1 与 G_2 可以互相变换，变换次数不能少于

$$\frac{1}{2}E(G_1 \oplus G_2) \quad L(G_1 \oplus G_2) \tag{6.76}$$

这里 $E(G_1 \oplus G_2)$ 表示在 $G_1 \oplus G_2$ 中的边数，$L(G_1 \oplus G_2)$ 是 $G_1 \oplus G_2$ 中边不相接闭合交替边列的最大数(CHEN[1971 b])。

6.60 在习题 6.58 中，设 $s = 0$，证明通过连续 k 次(不能少于 k 次)初等 $(p, 1)$d-不变变换，G_1 和 G_2 可以相互变换，这里 k 是由式(6.76)所定的数。

6.61 证明如果 G_1 和 G_2 是两个 d 不变 (p, s) 图，则习题 6.59 的论述对任何 s 都是有效的。

6.62 考虑分别示于图 6.17 和 6.18 的两个 $(2, 0)$-有向图 G_1 和 G_2，利用习题 6.60 的结论，证明通过连续四次初等 $(2, 0)$ d-不变变换，G_1 和 G_2 可以相互变换，但不能少于四次。

6.63 对于一个 n 节点无自环图 G，设 G^* 是取自 G 的 d-不变且具有最少并联边数的无自环图。设 G_1 是不含有并联边的 G^* 的最大生成子图。设 D^* 和 D_1 分别是 G^* 和 G_1 的节点度的集合。对于一个给定的集合 $\{a_i\}$，如果另一集合 $\{b_i\}$ 的元素对于所有 i，都有 $b_i \leq a_i$，以及 $\{b_i\}$ 可实现为 $(1, 0)$ 图的节点度，且 $\{b_i\}$ 中元素之和达可能的最大值，则集合 $\{b_i\}$ 称为

相对于$\{a_i\}$的最大集合。显然，D_1是相对于D^*的最大集合，现在，设$\overline{G}_1$是含有不在G_1中的所有边的G^*的生成子图(这与第一章§2.1中所定义的子图的图稍有不同)。考虑$\overline{G}_1^*=(\overline{G}_1)^*$，设$G_2$是不含有并联边的$\overline{G}_1^*$的最大生成子图，并设$D_1^*$和$D_2$分别是$G_1^*$和$G_2$的节点度的集合。显然$D_2$是相对于$D_1^*$的最大集合，因此重复这个过程，将产生一系列的集合$D_i^*$和$D_i$，使对于$i=1, 2, \cdots, k$，$D_i$是相对于$D_{i-1}^*$的最大集合($D^*=D_0^*$)，这里k是使得$G_{k-1}$没有并联边的最小正整数，所以，$G_{k-1}=(\overline{G}_{k-1})^*=G_k$。设

$$D_i^*=\{d_i^*(x);\ x=1, 2, \cdots, n\}$$

$$D_i=\{d_i(x);\ x=1, 2, \cdots, n\}$$

则对于所有x，有

$$d_0^*(x)=d_1(x)+d_2(x)+\cdots+d_k(x) \qquad (6.77\text{a})$$

$$d_i^*(x)=d_{i-1}^*(x)-d_i(x) \qquad (6.77\text{b})$$

因此，D_i^*可以从D_{i-1}^*和D_i递归地得出，这里D_i是相对于D_{i-1}^*的最大集合。利用这种方法，证明对于一个给定集合$D_0^*=\{a_i\}$，如果它能分解为一系列具有以上性质的集合D_i^*和D_i，则对集合$D_i(i=1, 2, \cdots, k)$的(1, 0)图实现，将它们的对应节点叠加在一起所得的图是含有最少并联边数的$\{a_i\}$的无自环实现(AROUB和FRISCH[1970])。

6.64 推广习题6.63到任何图。

6.65 设

$$D_0^*=\{8, 4, 3, 1, 1, 1\}$$

应用习题6.63的结论，证明它可以分解为以下集合：

$$D_1=\{5, 2, 2, 1, 1, 1\}$$

$$D_1^*=\{3, 2, 1, 0, 0, 0\}$$

$$D_2=\{2, 1, 1, 0, 0, 0\}$$

$$D_2^*=\{1, 1, 0, 0, 0, 0\}$$

集合D_0^*的相应实现是什么?

6.66 设集合$\{(a_i, b_i)\}$(对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$, $a_j \geq a_{j+1}$)可实现为(1, 0)-有向图的节点度对。证明当且仅当对所有i，有$a_i=b_i \leq n-1$，并满足式(6.42 b)，则它也是一有向 Euler路(提示：应用定理5.37)。

6.67 假定集合$\{(a_i, b_i)\}$(对于 $j=1, 2, \cdots, n-1$, $a_j > a_{j+1}$)可实现为(1, 0)-有向图的节点度对，证明当且仅当对于所有 i，有 $\min(a_i, b_i) \neq 0$，以及对于 $k=1, 2, \cdots, n-1$，有

$$\sum_{i=1}^{k} b_i + \sum_{j=k+1}^{n} \min(b_j, k) > \sum_{i=1}^{k} a_i \qquad (6.78)$$

(BEINEKE 和 HARARY[1965])

则集合$\{(a_i, b_i)\}$存在一强连(1, 0)-有向图的实现。

6.68 证明如果式(6.16 a)满足，则当且仅当对于所有i，有$a_i \leq n-1$，式(6.16 b)也同时满足。

第七章 网络的状态方程

在第二章中，我们使用 Laplace 变换方法，以线性代数方程组的形式来表达网络方程。为了得到最后的时域解，必须采用Laplace反变换，这通常在计算上是困难的。作为另一个可采用的方法，可以在时域中用描述网络动态性能的一阶微分方程组来列写网络方程。用这种形式表示网络方程的优点是很多的。首先，这一系统在数学上已经有广泛研究，其解析解与数值解是掌握的，而且容易得到。其次，这一方法可以很容易和很自然地推广到时变和非线性网络。事实上，差不多所有的时变和非线性网络都可以用这种方法来描述。最后，一阶微分方程很容易为数字计算机编程序，或者在模拟计算机上模拟。

在这一章中首先以称为状态方程的一阶微分方程组形式来提出网络方程的系统公式，然后讨论在这些状态方程式中所要求动态独立状态变量的数目，并阐述这一数目或其上界如何用网络拓扑方法来确定。在下面的讨论中，仅局限于无源的或有源的，互易的或非互易的，以及时不变或时变的线性集总网络。

§ 1. 标准形式的状态方程

我们的目的是选择一个称为状态变量时间 t 的实函数 $x_1(t)$，$x_2(t)$，$\cdots$，$x_k(t)$的集合，使网络方程可以置于如下所示的 k 个一阶微分方程组的形式，

$$\dot{x}_i(t) = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(t)x_j(t) + \sum_{j=1}^{h} b_{ij}(t)u_j(t)$$

$$(i=1, 2, \cdots, k) \qquad (7.1)$$

上式中 $\dot{x}_i(t)$ 是 $x_i(t)$ 的时间导数，或写成矩阵形式：

$$\dot{\mathbf{x}}(t)=\mathbf{A}\mathbf{x}(t)+\mathbf{B}\mathbf{u}(t) \qquad (7.2)$$

式中由状态变量 $x_i(t)$ 形成的 k 矢量 $\mathbf{x}(t)$ 称为状态矢量。由 h 个已知驱动函数或激励 $u_i(t)$ 形成的 h-矢量 $\mathbf{u}(t)$ 称为输入矢量，而 $\dot{\mathbf{x}}(t)$ 表示其元素是 $x(t)$ 的时间导数的 k 矢量。系数矩阵 **A** 和 **B** 分别是 $k\times k$ 阶和 $k\times h$ 阶，它们都仅取决于网络的参数，对于线性时不变网络，是与时间 t 无关的常数矩阵。

状态变量 $x_i(t)$ 可能就是所要求的输出变量，也可能不是。因此，需要另一个矩阵方程用状态变量 $x_j(t)(j=1, 2, \cdots, k)$ 和输入激励 $u_j(t)(j=1, 2, \cdots, h)$，来表示所要求的输出变量 $y_j(t)$ $(j=1, 2, \cdots, w)$，如下所示：

$$\mathbf{y}(t)=\mathbf{C}\mathbf{x}(t)+\mathbf{D}\mathbf{u}(t) \qquad (7.3)$$

式中其元素是 w 个输出变量 $y_j(t)$ 的 w-矢量 $\mathbf{y}(t)$ 称为输出矢量，而仅取决于网络参数的系数矩阵 **C** 和 **D** 分别是 $w\times k$ 阶和 $w\times h$ 阶。

方程式(7.2)称为标准形式的状态方程，方程式(7.3)称为输出方程，合起来称为状态方程。

眼前的问题是选择网络变量作为状态变量来列写状态方程式。如果把所有支路的电流和电压的瞬时值，取为网络的"状态"，则所有这些变量的瞬时值就确定了网络的瞬时状态。但是，并不需要所有这些瞬时值来确定网络的瞬时状态；因为某些量可以从其它量计算得出。例如电阻的瞬时电压可以由瞬时电流通过欧姆定律得出。这样就产生一个问题，需要多少个支路电压和电流，它们的瞬时值能完全地确定网络的瞬时状态，这就导致了下列定义。

定义 7.1：状态变量的完全集。

在给定网络中，如果有一支路变量的最小集，它们的瞬时值足以完全地确定所有支路变量的瞬时值，则这一支路变量的最小集称为状态变量的完全集。

一般状态变量的完全集不是唯一的，在大多数情况下，电容上的电压和电感中的电流构成了网络的状态变量完全集。但是这种集合并不总是完全的，例如在含有两个电容并联连接的网络中，这两个电容电压不可能独立地选择，其中一个由另一个来确定。因此它们不可能都是完全集的项，因为任何完全集必须是最小的。在线性时不变网络中，我们将选择电容电压和电感电流为状态变量。对于线性时变网络，则选择电容电荷和电感磁链为状态变量比较方便，当然它们不是唯一可能的选择。事实上电容电压或电荷的任何线性组合，以及电感电流或磁链的任何线性组合都可以选择为状态变量。至于如何得到状态变量的完全集的方法将在以后讨论。

选择状态变量之后，就着手导出状态方程，其依据是如第三章§2中所给的三个基本方程式（2.40）–(2.42)。设N是用有向图G表示的网络，并令Q和B是G的基本割集基矩阵和回路基矩阵。如前那样，用n，b，r和m分别表示节点数、边数、秩和零度。对G的每一边，关联两个时间t的实函数v(t)和i(t)满足下列约束条件：

1．基尔霍夫电流定律

$$QI(t)=0 \tag{7.4}$$

式中支路电流矢量I(t)是表示G的边的电流i(t)的b矢量。

2．基尔霍夫电压定律

$$BV(t)=0 \tag{7.5}$$

式中支路电压矢量V(t)是表示G的边的电压V(t)的b矢量。

3．元件限定方程或广义的欧姆定律

电容边服从如下微分方程

$$i(t)=\frac{d}{dt}[C(t)V(t)]=\frac{dq(t)}{dt} \tag{7.6 a}$$

式中$c(t)$和$q(t)$是对应网络元件的电容和电荷，

电感边服从如下微分方程

$$V(t) = \frac{d}{dt}[L(t)\,i(t)] = \frac{d\lambda(t)}{dt} \qquad (7.6\,b)$$

式中$L(t)$和$\lambda(t)$是对应网络元件的电感和磁链。

电阻边服从如下代数方程

$$V(t) = R_k(t)i_k(t) \qquad (7.6\,c)$$

或

$$i(t) = G_k(t)V_k(t) \qquad (7.6\,d)$$

式中$i_k(t)$和$V_k(t)$表示边e_k的电流和电压，$i(t)$ 和 $V(t)$ 可能是同一个边的电流和电压，也可能不是，因此，式(7.6 c)或(7.6 d)或者表示控制参数是$R_k(t)$或$G_k(t)$的受控源，或者电阻是$R_k(t)$或电导是$G_k(t)$的单端口电阻器。

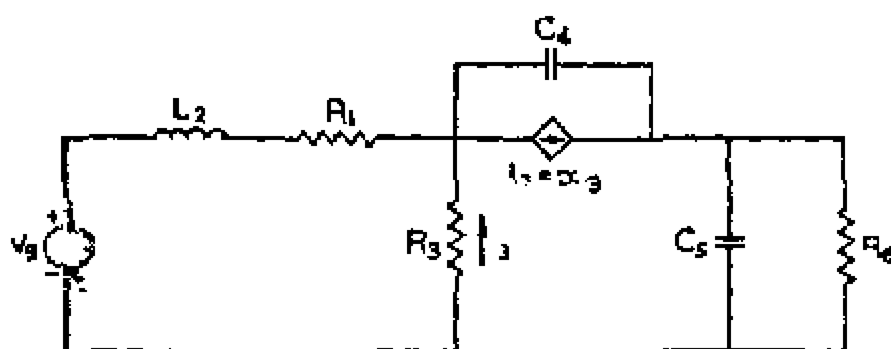


图 7.1 晶体管放大器的等效网络

为了简化符号，以后在写变量、矢量或矩阵中，如果它们是时间 t 的函数，则省略时间变量 t。只对于可能会产生混淆的地方或为了强调，才写成 t 函数的形式。

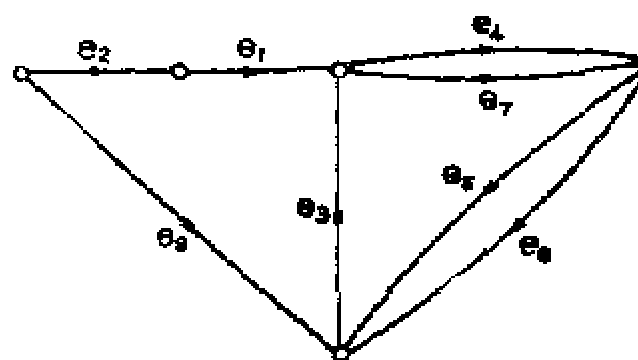


图 7.2 图7.1网络的有向图描述

例 7.1：如图 7.1 的网络，图 7.2 表示其有向图 G，设 Q 和 B 是相对于树 $t = e_3e_4e_5e_8$ 的基本割集矩阵和基本回路矩阵（这个 t 与时间变量 t 未必会引起混淆，为了与前面章节中采用的符号一致，

这符号继续在本章其余部分使用)。于是，基尔霍夫电流和电压定律成为

$$\begin{array}{c} \begin{matrix} e_8 & e_4 & e_5 & e_1 & e_3 & e_6 & e_7 & e_2 \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \begin{bmatrix} i_8 \\ i_4 \\ i_5 \\ i_1 \\ i_3 \\ i_6 \\ i_7 \\ i_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.7a}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_8 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_1 \\ v_3 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_2 \end{bmatrix} = 0 \tag{7.7b}$$

图 7.1 网络的元件限定方程是如下得出的：对于电容边 e_4 和 e_5，有

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} \tag{7.8a}$$

式中 $q_4 = C_4 v_4$ 以及 $q_5 = C_5 v_5$。对于电感边 e_2，其关系如下：

$$v_2 = L_2 \dot{i}_2 = \dot{\lambda}_2 \tag{7.8b}$$

式中 $\lambda_2 = L_2 i_2$。对于电阻边 e_3，e_6，e_7 和 e_1，可以写为

$$\begin{bmatrix} i_3 \\ i_6 \\ i_7 \\ \hline v_1 \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_6 & 0 & 0 \\ \alpha/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_1 \end{array}\right] \begin{bmatrix} v_3 \\ v_6 \\ v_7 \\ \hline i_1 \end{bmatrix} \tag{7.8c}$$

为了写出状态方程，选择电容器电压 v_4 和 v_5 以及电感电流 i_2 为状态变量，现在的问题是在方程式(7.7)和(7.8)中消去不需要的变量，使得最终方程只含有状态变量 v_4、v_5 和 i_2，以及它们的导数和已知的驱动函数 v_1、v_8。为了这个目的，可以展开方程式(7.7)为

$$i_8=-i_2 \tag{7.9 a}$$

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_3 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}[i_2] \tag{7.9 b}$$

$$i_1 = i_2 \tag{7.9 c}$$

$$\begin{bmatrix} v_3 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[v_8] - \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}[v_1] \tag{7.9 d}$$

$$[v_2] = -[-1][v_8] - [1 \quad 1]\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} - [1][v_1] \tag{7.9 e}$$

首先将式(7.8 a)和(7.8 b)代入式(7.9 b) 和 (7.9 c) 中来删去变量 i_4、i_5 和 v_2，得到

$$\begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & C_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i_3 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[i_2] \tag{7.10 a}$$

$$[L_2\dot{i}_2] = [v_8] - [1 \quad 1]\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} - [v_1] \tag{7.10 b}$$

为了继续这一消元过程，有必要用状态变量 v_4，v_5 和 i_2 来表示不需要的变量 i_3、i_6、i_7 和 v_1。为此，取变量方程式(7.8 c)、(7.9 c)和(7.9 d)，首先展开式(7.8 c)为

$$\begin{bmatrix} i_3 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_3 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_6 & 0 \\ \alpha/R_3 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_3 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [i_1] \tag{7.11 a}$$

$$[v_1] = [0\ 0\ 0] \begin{bmatrix} v_3 \\ v_6 \\ v_7 \end{bmatrix} + [R_1][i_1] \tag{7.11 b}$$

然后将式(7.9 c)和(7.9 d)代入式(7.11)得

$$\begin{bmatrix} i_3 \\ i_6 \\ i_7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/R_3 & 1/R_3 \\ 0 & 1/R_6 \\ \alpha/R_3 & \alpha/R_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \tag{7.12 a}$$

$$v_1 = R_1 i_2 \tag{7.12b}$$

为了完成消元过程，将式(7.12)代入式(7.10)得出

$$\begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha-1)/R_3 & (\alpha-1)/R_3 \\ -1/R_3 & -1/R_3 \quad 1/R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [i_2] \tag{7.13 a}$$

$$[L_2 \dot{i}_2] = [1\ \ 1] \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \quad [R_1][i_2] + [1][v_s] \tag{7.13 b}$$

将这些方程式写成标准形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{i}_2 \\ \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1/L_2 & 1/L_2 & -1/L_2 \\ 1/C_4 & (\alpha-1)/C_4R_3 & (\alpha-1)/C_4R_3 \\ 1/C_5 & -1/C_5R_3 & 1/C_5R_3 - 1/C_5R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1/L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [v_s] \tag{7.14}$$

这是图 7.1 网络状态方程的标准形式。

另外，可以选择电容电荷 $q_4 = C_4v_4$ 和 $q_5 = C_5v_5$，以及电感磁链 $\beta_2 = L_2i_2$ 为状态变量，在这种情况下，方程式(7.13)可以置于下

列形式：

$$\begin{bmatrix} \dot{\lambda}_2 \\ \dot{q}_4 \\ \dot{q}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1/L_2 & 1/C_4 & -1/C_5 \\ 1/L_2 & (\alpha-1)/C_4R_3 & (\alpha-1)/C_5R_3 \\ 1/L_2 & 1/C_4R_3 & -1/C_5R_3-1/C_5R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} [v_s] \tag{7.15}$$

这又是式(7.2)的形式。

注意到，在导出图 7.1 网络的状态方程时，给出了详细的消元过程。在§3 中将要表明，除了少数退化情况以外，这一方法在一般情况下都适用得出所要求的状态方程。事实上，在§3 中所导出的方法步骤与以上所概述的方法是紧密一致的。我们将经常用这个例子来说明问题。

假定变量 i_5，i_6 和 v_2 被选为输出，把式(7.9 b)的第二个方程与式(7.12 a)组合，可以得出

$$[i_5] = [-1/R_3 \quad -1/R_3 \quad 1/R_6] \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + [1][i_2] \tag{7.16 a}$$

电流 i_6 包含在式(7.12 a)中，即

$$[i_6] = [0 \quad 1/R_6] \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \tag{7.16 b}$$

根据式(7.9 c)和(7.12 b)，有

$$[v_2] = [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + [R_1][i_2] + [1][v_s] \tag{7.16 c}$$

将这些方程式写为矩阵形式，产生所要求的输出方程：

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1/R_3 & -1/R_3 & -1/R_6 \\ 0 & 0 & & 1/R_6 \\ R_1 & -1 & & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [v_s] \tag{7.17}$$

利用状态变量 q_4，q_5 和 λ_2，则输出方程变为

$$\begin{bmatrix} i_5 \\ i_6 \\ v_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/L_2 & -1/C_4R_3 & -1/C_5R_3-1/C_5R_3 \\ 0 & 0 & 1/C_5R_6 \\ -R_1/L_2 & -1/C_4 & -1/C_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_2 \\ q_4 \\ q_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} [v_g] \qquad (7.18)$$

方程式(7.14)和(7.17)，或(7.15)和(7.18)是图 7.1 网络的状态方程。

§2. 列写状态方程的方法

根据前面例子所述的步骤，现在来着手导出列写状态方程的方法。

如第二章§2 所示，如果网络具有只有独立电压源组成的回路，或者只有独立电流源组成的切割，只要存在一种，则网络就不具有唯一解。因此，我们把这些网络从讨论中排除。此外，根据第二章的推论 2.9，相对于所选的树，可以看到树枝电压决定所有其它电压，而补树弦电流决定所有其它电流，因此，为了利用电感电流或磁链，以及电容电压或电荷为状态变量来导出状态方程，应当把所有电压源和尽可能多的电容置于树中，而把所有电流源和尽可能多的电感置于补树中，这就导致产生下列定义。

定义 7.2：正规树。

表示网络的连通有向图的正规树是含有所有独立电压源边、最大的电容边数、最小的电感边数以及没有独立电流源边的树。

注意，在这定义中排除了非连通网络的可能性，通过研究由各片正规树所组成的正规林，这是很容易解决的。由于当且仅当子图不含有任何回路，可使子图构成树的一部份，则可以看到在规定的

假设下，所有独立电源边会是树的一部份。同样，当且仅当子图不含有任何切割，子图会是补树的一部份，这就意味着所有独立电流源边是补树的一部份，从树中排除。应用第五章的定理5.4，可以得出结论：存在含有所有独立电压源边和没有独立电流源边的树。在这样的一棵树中所包含的电容最大数和电感最小数将在后面讨论。

根据前一节所做的观察，现可以概述列写状态方程的步骤。

步骤1．从给定网络构造一有向图G表示这一网络的结构并标明网络元件电压和电流参考方向。

步骤2：在G中选择一个正规树 t，或者选 t 的电容电压和补树 $\bar{t}$ 的电感电流（t 的互补），或者选 t 的电容电荷和 $\bar{t}$ 的电感磁链为状态变量。

步骤3，对树 t 的每一树支标定一电压符号，对补树 $\bar{t}$ 的每条弦标定一电流符号

步骤4：利用基尔霍夫电流定律，写出每条树支电流为补树弦电流之和。如果有必要，可在G中表明。

步骤5：利用基尔霍夫电压定律，写出每条补树弦电压为树支电压之和。如果有必要，可在G中表明。

步骤6：对于G的每条边，应用元件限定方程式(7.6)。

步骤7：在上述步骤所得的方程式中，消去非状态变量。

步骤8：用正规形式写出所得的方程。

用下面的例子来说明以上步骤。

例 7.2．考虑图7.1的网络，根据以上步骤导出状态方程。

步骤1　表示图7.1网络的有向图G已在前面得出，如图7.2所示。

步骤2：如在例7.1中那样，可以看到树 $t=e_1e_4e_5e_8$ 是G的正规树，选择树电容电压和补树电感电流为状态变量。

步骤3：如图7.3所示，对树支标以电压符号 v_1，v_4，v_5 和 v_8，而用电流符号 i_2，i_3，i_6 和 i_7 标定补树弦，因此状态变量是

v_4，v_5 和 i_2。

步骤 4：利用基尔霍夫电流定律，树支电流可以表示为补树弦电流之和(f 割集)：

$$i_1 = i_2 \quad (7.19\ a)$$

$$i_4 = i_2 + i_3 - i_7 \quad (7.19\ b)$$

$$i_5 = i_2 + i_3 - i_6 \quad (7.19\ c)$$

$$i_8 = -i_2 \quad (7.19\ d)$$

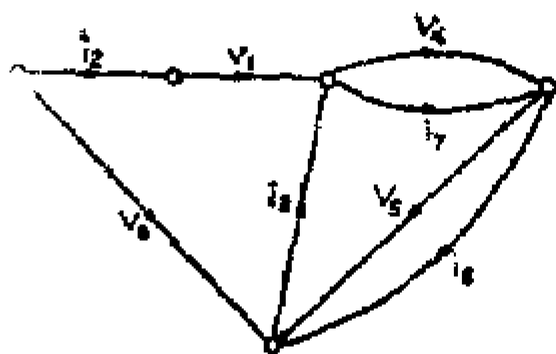


图 7.3　对于图 7.2 的有向图，用电压符号指定为树支而用电流符号指定为补树弦

步骤 5：利用基尔霍夫电压定律，补树弦电压可以表示为树支电压之和(f-回路)

$$v_2 = v_8 - v_1 - v_4 - v_5 \quad (7.20\ a)$$

$$v_3 = -v_4 - v_5 \quad (7.20\ b)$$

$$v_6 = v_5 \quad (7.20\ c)$$

$$v_7 = v_4 \quad (7.20\ d)$$

步骤 6：对G的每条边，应用元件限定方程式(7.6)，根据图 7.1 和图 7.3，以及式(7.19)和(7.20)，可以得到：

$$C_4\dot{v}_4 = i_2 + i_3 - i_7 \quad (7.21\ a)$$

$$C_5\dot{v}_5 = i_2 + i_3 - i_6 \quad (7.21\ b)$$

$$L_2\dot{i}_2 = v_8 - v_1 - v_4 - v_5 \quad (7.21\ c)$$

$$v_1 = R_1 i_2 \quad (7.22\ a)$$

$$i_3 = -(v_4 + v_5)/R_3 \quad (7.22\ b)$$

$$i_6 = v_5/R_6 \quad (7.22\ c)$$

$$i_7 = \alpha i_3 = -\alpha(v_4 + v_5)/R_3 \quad (7.22\ d)$$

式中 $v_8 = v_8$。

步骤 7：在式(7.21)中必须消去不需要的变量 v_1，i_3，i_6 和 i_7。对于这点来说，可以应用方程式(7.22)，据此可以用状态变量 i_2，v_4 和 v_5 来表示不需要的变量，这在式(7.22)中已经做到。为了完成消元过程，在式(7.21)中代入式(7.22)得到

$$L_2\dot{i}_2 = v_s - v_4 - v_5 - R_1 i_2 \qquad (7.23\,a)$$

$$C_4\dot{v}_4 = i_2 + (\alpha-1)v_4/R_3 + (\alpha-1)v_5/R_3 \qquad (7.23\,b)$$

$$C_5\dot{v}_5 = i_2 - v_4/R_3 - (1/R_3 + 1/R_6)v_5 \qquad (7.23\,c)$$

步骤 8：把方程式(7.23)写成矩阵形式，得出所要求的状态方程。

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \qquad (7.24\,a)$$

式中

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -R_1/L_2 & -1/L_2 & -1/L_2 \\ 1/C_4 & (\alpha-1)/C_4R_3 & (\alpha-1)/C_4R_3 \\ 1/C_5 & -1/C_5R_3 & -1/C_5R_3 - 1/C_5R_6 \end{bmatrix} \qquad (7.24\,b)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1/L_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{x} = \begin{bmatrix} i_2 \\ v_4 \\ v_5 \end{bmatrix}, \mathbf{u} = [v_s] \qquad (7.24\,c)$$

由于电阻、电容和电感是时不变的，则矩阵 A 和 B 是常数矩阵，与时间 t 无关。

例 7.3：为了说明对时变网络的处理方法，考虑图 7.1 的网络，其中设

$$C_4(t) = \frac{1}{2 - \sin 2t} \qquad (7.25\,a)$$

$$C_5(t) = \frac{1}{1 + \frac{1}{2}\cos t} \qquad (7.25\,b)$$

$$R_1(t) = 2 + \sin 3t \qquad (7.25\,c)$$

前面 5 步与例 7.2 所述步骤相同，为方便起见，选择电容电荷

$$q_4 = C_4 v_4 \qquad (7.26\,a)$$

$$q_5 = C_5 v_5 \qquad (7.26\,b)$$

和电感磁链

$$\lambda_2 = L_2 i_2 \qquad (7.26\,c)$$

为状态变量。

步骤 6：应用元件限定方程，可以得出

$$\dot{q}_4 = i_2 + i_3 - i_7 \tag{7.27 a}$$

$$\dot{q}_5 = i_2 + i_3 - i_6 \tag{7.27 b}$$

$$\dot{\lambda}_2 = v_8 - v_1 - v_4 - v_5 \tag{7.27 c}$$

$$v_1 = R_1 i_2 \tag{7.27 d}$$

$$i_3 = -(v_4 + v_5)/R_3 \tag{7.28 a}$$

$$i_6 = v_5/v_6 \tag{7.28 b}$$

$$i_7 = -\alpha(v_4 + v_5)/R_3 \tag{7.28 c}$$

式中 $v_8 = v_g$。

步骤 7：为了消去式(7.27)中不需要的变量 v_1，i_3，i_6 和 i_7，利用式(7.26)和(7.28)，用状态变量 q_4、q_5 和 λ_2 来表示不需要的变量，可以得出：

$$v_1 = R_1\lambda_2/L_2 \tag{7.29 a}$$

$$i_3 = -q_4/C_4R_3 - q_5/C_5R_3 \tag{7.29 b}$$

$$i_6 = q_5/C_5R_6 \tag{7.29 c}$$

$$i_7 = -\alpha q_4/C_4R_3 - \alpha q_5/C_5R_3 \tag{7.29 d}$$

将它们代入式(7.27)连同式(7.25)和(7.26)，可以得出

$$\dot{\lambda}_2 = v_g - R_1\lambda_2/L_2 - (2 + \sin 2t)q_4 - \left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)q_5 \tag{7.30 a}$$

$$\dot{q}_4 = \lambda_2/L_2 + (2 + \sin 2t)(\alpha - 1)q_4/R_3 + \left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)(\alpha - 1)q_5/R_3 \tag{7.30 b}$$

$$\dot{q}_5 = \lambda_2/L_2 - (2 + \sin 2t)q_4/R_3 - \left(1 + \frac{1}{2}\cos t\right)(1/R_3 + 1/R_6)q_5 \tag{7.30 c}$$

步骤 8：把方程式(7.30)写成矩阵形式，得到

$$\dot{x}(t) = A(t)x(t) + B(t)u(t) \tag{7.31 a}$$

式中

$$
A(t)=\begin{bmatrix} -R_1/L_2 & -(2+\sin 2t) & -\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right) \\ 1/L_2 & (2+\sin 2t)(\alpha-1)/R_3 & \left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)(\alpha-1)/R_3 \\ 1/L_2 & -(2+\sin 2t)/R_3 & -\left(1+\frac{1}{2}\cos t\right)(R_3+R_6)/R_3R_6 \end{bmatrix}
$$

(7.31 b)

$$
B=\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix},\quad x(t)=\begin{bmatrix}x_2\\q_4\\q_5\end{bmatrix},\quad u(t)=[v_g(t)] \qquad (7.31\ c)
$$

正如所料，由于网络是时变的，所以系数矩阵A(t)是t的函数。

为了说明并不是所有电容电压或电荷以及电感电流或磁链都能纳入状态变量完全集的元，在图7.1的网络中插入电感L_{10}和电容C_9，此外，添加一个独立电流源所产生的网络如图7.4所示。

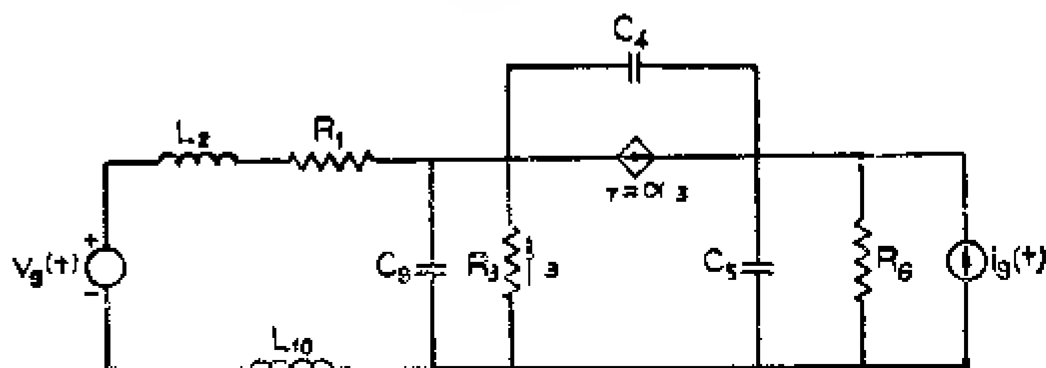


图 7.4 用来说明形成状态方程的有源网络

例 7.4：根据这一节中得出的八个步骤，写出图7.4的网络状态方程。

步骤1：表示图7.4网络的有向图G如图7.5所示。

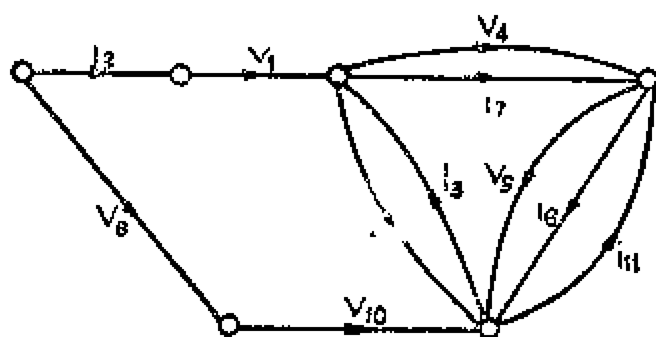


图 7.5 表示图7.4有源网络的有向图

步骤2．在G中，设e_4是与变量 … 相关的边，由于$e_2 e_5$是一个回路，所以在任一正规树中，至多只能包括两条电容边。类似地，由于$e_2 e_{10}$是一个割集，所以在正规树中至少有一个电感。

一个可能的正规树 t … $e_4 e_4 e_5 e_6 e_{11}$ 在图7.5中以粗线给出，其它可能的选择是 $e_1 e_4 e_8 e_9 e_{10}$，$e_1 e_4 e_8 e_9 e_{11}$，$e\ e_2 e_4 e_5 e_6$，$e_1 e_2 e_4 e_5 e$ … 和 $e_1 e_2 e_4 e_5 e_9$。

步骤3．如在图7.5中所示，树支用电压符号 v_2、v_4、v_5、v_3 和 v_{10} 来表示，而补树弦用电流符号 i_3、i_3、i_6、i_7、i_9 和 i_{11} 来表示，状态变量选取为 v_4、v_5 和 i_2。

步骤4．利用基尔霍夫电流定律，树支电流可以表示为补树弦电流之和(f 割集)：

$$i_1 \quad i_2 \tag{7.32 a}$$

$$i_4 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_7 \quad i_9 \tag{7.32 b}$$

$$i_5 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_{11} \quad i_6 \quad i_9 \tag{7.32 c}$$

$$i_8 = \quad i_2 \tag{7.32 d}$$

$$i_{10} \quad i_2 \tag{7.32 e}$$

步骤5．应用基尔霍夫电压定律，补树弦电压可以表示为树支电压之和(f-回路)：

$$v_2 \quad v_8 \quad v_{10} \quad v_4 \quad v_4 \quad v_5 \tag{7.33 a}$$

$$v_3 \quad v_4 \quad v_5 \tag{7.33 b}$$

$$v_6 \quad v_5 \tag{7.33 c}$$

$$v_7 \quad v_4 \tag{7.33 d}$$

$$v_9 \quad v_4 + v_5 \tag{7.33 e}$$

$$v_{11} \quad v_5 \tag{7.33 f}$$

步骤6．对于G的边，应用元件特性方程式(7.6)、连同式(7.32)和(7.33)，可得

$$C_4 \dot{v}_4 \quad i_2 \quad i_3 \quad i_7 \quad i_9 \tag{7.34 a}$$

$$C_5 \dot{v}_5 \quad i_2 + i_3 \quad i_6 \quad i_{11} \tag{7.34 b}$$

$$L_2 \dot{i}_2 \quad v_8 + v_{10} \quad v_1 \quad v_4 - v_5 \tag{7.34 c}$$

$$v_1 = R_1 i_2 \tag{7.35 a}$$

$$v_8 = v_4 \tag{7.35 b}$$

$$v_{10} = L_{10} \dot{i}_2 \tag{7.35 c}$$

$$i_3 = v_4/R_3 - v_5/R_3 \tag{7.35 d}$$

$$i_6 = v_5/R_6 \tag{7.35 e}$$

$$i_7 = \alpha v_3/R_3 = \alpha(v_4 - v_5)/R_3 \tag{7.35 f}$$

$$i_9 = C_9 \dot{v}_4 - C_9 \dot{v}_5 \tag{7.35 g}$$

$$i_{11} = i_g \tag{7.35 h}$$

步骤 7：在式(7.34)中，必须消去不需要的变量 v_1，v_8，v_{10}，i_3，i_6，i_7，i_9 和 i_{11}，这很容易在式(7.34)中通过代入式(7.35)来达到，得出

$$\begin{bmatrix} C_4+C_9 & -C_9 \\ -C_9 & C_5+C_9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{v}_4 \\ \dot{v}_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\alpha-1)/R_3 & -(\alpha-1)/R_3 \\ -1/R_3 & 1/R_3-1/R_6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} i_2 \\ -i_2+i_g \end{bmatrix} \tag{7.36 a}$$

$$(L_2+L_{10})\dot{i}_2 = v_g - R_1 i_2 - v_4 - v_5 \tag{7.36 b}$$

步骤 8：把方程式(7.36)写成矩阵形式，结果为

$$\dot{x} = Ax + Bu \tag{7.37 a}$$

式中

$$A = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -R_1\Delta/(L_2+L_{10}) & -\Delta/(L_2+L_{10}) & -\Delta/(L_2+L_{10}) \\ C_5 & (\alpha-1)(C_5+C_9)/R_3+C_9/R_3 & R_3(\alpha-1)/(C_5+C_9)/R_3+C_9(1/R_3+1/R_6) \\ C_4 & -(\alpha C_9+C_4)/R_3 & -(C_4-C_9)(1/R_3+1/R_6)-(\alpha-1)C_9/R_3 \end{bmatrix} \tag{7.37 b}$$

$$B = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} 0 & \Delta/(L_2+L_{10}) \\ -C_9 & 0 \\ C_4+C_9 & 0 \end{bmatrix} \tag{7.37 c}$$

$$\mathbf{x}=\begin{bmatrix} i_2 \\ v_1 \\ v_a \end{bmatrix},\quad \mathbf{u}=\begin{bmatrix} i_g \\ v_g \end{bmatrix} \tag{7.37d}$$

以及

$$\Delta = C_2C_5 + C_3(C_4+C_5) \tag{7.37e}$$

§ 3. 状态方程的显式

在前一节中，对于有源或无源，时不变或时变的线性网络，我们介绍了导出标准形式的状态方程的方法。在这一节中，对于一般线性网络将导出标准形式的状态方程的显式。对于下面的一般步骤，将假设某些矩阵是非奇异的，如果发生对某一个别网络来说，这一假设不成立，则利用下面所描述的方法，将不可能得出所要求的形式。由于它的普遍性，显式是极其复杂的，而对于特定网络，通常还是利用前节中概述的方法，来求得所要求的状态方程比较简单些。这一节的目的是形成一般网络的状态方程的公式，以及给出其一般形式。

我们的出发点是式(7.4)～(7.6)的三个基本网络方程系。如前面一样，第一步是在表示网络N的有向图G中选择一个正规树。设$\mathbf{Q}_f$和$\mathbf{B}_f$是相对于树t的f割集和f回路，按照树t的树支和弦，将$\mathbf{Q}_f$和$\mathbf{B}_f$分块，相应地划分支路电流矢量$\mathbf{I}$和支路电压矢量$\mathbf{V}$，然后借助定理2.9、式(7.4)和(7.5)，可以写出

$$[\mathbf{U}_t\mathbf{Q}_{\bar t}]\begin{bmatrix}\mathbf{I}_t\\ \mathbf{I}_{\bar t}\end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{7.38}$$

$$[-\mathbf{Q}_{\bar t}'\mathbf{U}_m]\begin{bmatrix}\mathbf{V}_t\\ \mathbf{V}_{\bar t}\end{bmatrix}=\mathbf{0} \tag{7.39}$$

为了便于论述，必须按照在正规树t及其补树$\bar t$中出现的边类型，进一步划分支路电流和支路电压矢量。为此，在表示各种边类型中

采用下列惯例表示法：

e　独立电压源；

ct　树 t 的电容，树支；

rt　树 t 的电阻，树支；

lt　树 t 的电感，树支；

$c_{\bar t}$　补树 $\bar t$ 的电容弦支；

$r_{\bar t}$　补树 $\bar t$ 的电阻弦支；

$l_{\bar t}$　补树 $\bar t$ 的电感弦支；

j　独立电流源

因此，I_{ct} 表示树 t 中电容电流的电流矢量，而 $V_{r\bar t}$ 表示补树 $\bar t$ 中电阻电压的电压矢量，把这些符号推广到其它类型的元件是容易的，因而没有必要进一步描述，根据这种惯例可以写出

$$V_t=\begin{bmatrix}V_e\\V_{ct}\\V_{rt}\\V_{lt}\end{bmatrix}\quad 和\quad V_{\bar t}=\begin{bmatrix}V_{c\bar t}\\V_{r\bar t}\\V_{l\bar t}\\V_j\end{bmatrix}\tag{7.40 a}$$

$$I_t=\begin{bmatrix}I_e\\I_{ct}\\I_{rt}\\I_{lt}\end{bmatrix}\quad 和\quad I_{\bar t}=\begin{bmatrix}I_{c\bar t}\\I_{r\bar t}\\I_{l\bar t}\\I_j\end{bmatrix}\tag{7.40 b}$$

同样，子矩阵 $Q_{\bar t}$ 可以写为

$$Q_{\bar t}=\begin{array}{c}\\e\\c\\r\\l\end{array}\begin{array}{c}\begin{array}{cccc}c & r & l & j\end{array}\\\begin{bmatrix}Q_{ec} & Q_{er} & Q_{el} & Q_{ej}\\Q_{cc} & Q_{cr} & Q_{cl} & Q_{cj}\\Q_{rc} & Q_{rr} & Q_{rl} & Q_{rj}\\Q_{lc} & Q_{lr} & Q_{ll} & Q_{lj}\end{bmatrix}\end{array}\tag{7.41}$$

根据正规树的定义，必须有以下关系式

$$Q_{rc}=0,\ Q_{lc}=0,\ Q_{lr}=0\tag{7.42}$$

例如，如果 $Q_{rc}\neq 0$，则存在由正规树的电阻树支所定义的并含有电容弦支的 f-割集，在正规树中，用电容弦支替换这个电阻树支，会产生比"正规树"多一条电容边的树，除电阻边之外，所有其它类型的边相同。这是与正规树的定义相矛盾的，因而 $Q_{rc}=0$。以类似的方式，可以证明 $Q_{lc}=0$ 和 $Q_{lr}=0$（习题 7.2）。

把这些分块矩阵代入基尔霍夫方程式(7.38)和(7.39)，以及展开所产生的方程，可以得出

$$I_e + Q_{ec}I_{c\bar t} + Q_{er}I_{r\bar t} + Q_{el}I_{l\bar t} + Q_{ej}I_j = 0 \tag{7.43 a}$$

$$I_{ct} + Q_{cc}I_{c\bar t} + Q_{cr}I_{r\bar t} + Q_{cl}I_{l\bar t} + Q_{cj}I_j = 0 \tag{7.43 b}$$

$$I_{rt} + Q_{rr}I_{r\bar t} + Q_{rl}I_{l\bar t} + Q_{rj}I_j = 0 \tag{7.43 c}$$

$$I_{lt} + Q_{ll}I_{l\bar t} + Q_{lj}I_j = 0 \tag{7.43 d}$$

$$V_{c\bar t} - Q'_{cc}V_{ct} - Q'_{ec}V_e = 0 \tag{7.43 e}$$

$$V_{r\bar t} - Q'_{cr}V_{ct} - Q'_{rr}V_{rt} - Q'_{er}V_e = 0 \tag{7.43 f}$$

$$V_{l\bar t} - Q'_{cl}V_{ct} - Q'_{rl}V_{rt} - Q'_{ll}V_{lt} - Q'_{el}V_e = 0 \tag{7.43 g}$$

$$V_j - Q'_{cj}V_{ct} - Q'_{rj}V_{rt} - Q'_{lj}V_{lt} - Q'_{ej}V_e = 0 \tag{7.43 h}$$

除了这些方程以外，还有如式(7.6)所示的元件限定方程式。对于电容边，有

$$\begin{bmatrix} I_{ct} \\ I_{c\bar t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} C_t & 0 \\ 0 & C_{\bar t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} V_{ct} \\ V_{c\bar t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot q_{ct} \\ \dot q_{c\bar t} \end{bmatrix} \tag{7.44 a}$$

式中电容电荷矢量 q_{ct} 和 $q_{c\bar t}$ 由下列关系式所确定：

$$\begin{bmatrix} q_{ct} \\ q_{c\bar t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_t V_{ct} \\ C_{\bar t} V_{c\bar t} \end{bmatrix} \tag{7.44 b}$$

对于电感边，有下列关系式：

$$\begin{bmatrix} V_{lt} \\ V_{l\bar t} \end{bmatrix} = \frac{d}{dt}\begin{bmatrix} L_t & L_{t\bar t} \\ L_{\bar t t} & L_{\bar t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_{lt} \\ I_{l\bar t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot\lambda_{tt} + \dot\lambda_{t\bar t} \\ \dot\lambda_{\bar t\bar t} + \dot\lambda_{\bar t t} \end{bmatrix} \tag{7.45 a}$$

式中电感自磁链矢量 λ_{tt} 和 $\lambda_{\bar t\bar t}$，以及互磁链矢量 $\lambda_{t\bar t}$ 和 $\lambda_{\bar t t}$ 由下式所确定：

$$
\begin{bmatrix} \lambda_{tt} \\ \lambda_{tt} \\ \lambda_{tt} \\ \lambda_{tt} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} L_{ti} I_{t} \\ L_{tt} I_{ll} \\ L_{t} I_{l} \\ L_{ti} I_{lt} \end{bmatrix} \tag{7.45 b}
$$

记住，不同于式(7.44 a)中所定义的电容矩阵，为了将可能存在的互感考虑进去，式(7.45 a)的电感矩阵不一定是对角线的 但是，它是对称的，具有 L_{ii} I_{tt}、L_{ll} L'_{tt} 和 $L_{lt}-L'_{tl}$。

最后，对于电阻边，假定可以用下面混合式来表示：

$$
\begin{bmatrix} I_{r} \\ V_{rl} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} H_{rr} & H_{rl} \\ H_{lr} & H_{ll} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{rl} \\ I_{rl} \end{bmatrix} \tag{7.46}
$$

我们的目的是在方程式(7.43)～(7.44)之间，消去所有不需要的矢量，只是保留矢量 V_{ct} 和 I_{li}，电源矢量以及它们的导数。为此，以下列方式进行消元过程。

A：消去矢量 I_{ct}，I_{c} 和 V_{ct}

这可以首先将来自式(7.43 e)的 V_{ci} 代入式(7.44 a)，然后将所产生的式(7.44 a)的 I_{c} 和 I_{t} 代入式(7.43 b)而达到，得出

$$
\frac{d}{dt}(C_{t}V_{ct}) \quad Q_{cr}I_{ri} \quad Q\ I_{li} \quad Q_{cj}I_{j} \quad \frac{d}{dt}(C_{e}V_{e}) \tag{7.47}
$$

式中

$$
C_{t} \quad C_{tt} + Q_{ec}C_{tt}Q'_{ec} \tag{7.48 a}
$$

$$
C_{e} \quad Q_{cc}C_{tt}Q'_{ec} \tag{7.48 b}
$$

B：消去矢量 V_{ll}，V_{l} 和 I_{lt}

将来自式(7.43 c)的 I_{t} 代入式(7.45 a)，然后将来自所产生的(7.45 a)的 V_{l} 和 V_{lt} 代入式(7.43 g)，得出

$$
\frac{d}{dt}(L_{t}I_{lt}) \quad Q'_{ct}V_{ct} + Q'_{r}V_{rt} + Q'_{et}V_{e} \quad \frac{d}{dt}(L_{j}I_{j}) \tag{7.49}
$$

式中

$$
L_{t} \quad L_{tt} \quad L_{tl}Q_{l} \quad Q'L_{lt} + Q'_{lj}L_{l}Q_{ll} \tag{7.50 a}
$$

$$
L_{j} \quad Q\ L_{l}Q_{lj} + L_{tl}Q_{lj} \tag{7.50 b}
$$

C：消去矢量 $\mathbf{I}_{rt}$ 和 $\mathbf{V}_{rt}$

除了必须消去的 $\mathbf{I}_{rt}$ 和 $\mathbf{V}_{rt}$ 之外，方程式(7.47)和(7.49)都包含所有要求的矢量，此时仍有未使用的方程式(7.43c)，(7.43f)和(7.46)，将前面两个方程式代入后一个，便可得到

$$(\mathbf{U}_{rt}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr})\mathbf{I}_{rt}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{V}_{rt}=\mathbf{F}_1 \tag{7.51a}$$

$$\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{I}_{rt}+(\mathbf{U}_{rt}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr})\mathbf{V}_{rt}=\mathbf{F}_2$$

式中 $\mathbf{U}_{rt}$ 和 $\mathbf{U}_{r}$ 是具有相应阶的单位矩阵，而

$$\mathbf{F}_1=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr}\mathbf{V}_{ct}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc}\mathbf{I}_{ct}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er}\mathbf{V}_{e}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj}\mathbf{I}_{j} \tag{7.52a}$$

$$\mathbf{F}_2=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr}\mathbf{V}_{ct}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc}\mathbf{I}_{ct}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er}\mathbf{V}_{e}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj}\mathbf{I}_{j} \tag{7.52b}$$

为了简化符号，定义

$$\mathbf{W}_1=\mathbf{U}_{rt}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr} \tag{7.53a}$$

$$\mathbf{W}_2=\mathbf{U}_{rt}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr} \tag{7.53b}$$

如果 $\mathbf{W}_1$ 和 $\mathbf{W}_2$ 是非奇异的，则从式(7.51)可以解出 $\mathbf{I}_{rt}$ 和 $\mathbf{V}_{rt}$。将这些式子代回到式(7.51)中去，而将各项重新排列一下，可以得到

$$\mathbf{M}_1\mathbf{I}_{rt}=\mathbf{F}_{11}\mathbf{V}_{ct}-\mathbf{F}_{12}\mathbf{I}_{ct}+\mathbf{P}_{11}\mathbf{V}_{e}-\mathbf{P}_{12}\mathbf{I}_{j} \tag{7.54a}$$

$$\mathbf{M}_2\mathbf{V}_{rt}=\mathbf{F}_{21}\mathbf{V}_{ct}-\mathbf{F}_{22}\mathbf{I}_{ct}+\mathbf{P}_{21}\mathbf{V}_{e}-\mathbf{P}_{22}\mathbf{I}_{j} \tag{7.54b}$$

式中

$$\mathbf{M}_1=\mathbf{W}_1-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr} \tag{7.55a}$$

$$\mathbf{M}_2=\mathbf{W}_2-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr} \tag{7.55b}$$

$$\mathbf{F}_{11}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr} \tag{7.56a}$$

$$\mathbf{F}_{12}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc} \tag{7.56b}$$

$$\mathbf{F}_{21}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr} \tag{7.56c}$$

$$\mathbf{F}_{22}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rc} \tag{7.56d}$$

$$\mathbf{P}_{11}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er} \tag{7.57a}$$

$$\mathbf{P}_{12}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj}+\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{rr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj} \tag{7.57b}$$

$$\mathbf{P}_{21}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er} \tag{7.57c}$$

$$\mathbf{P}_{22}=\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj}-\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rj} \tag{7.57d}$$

假定 $\mathbf{M}_1$ 和 $\mathbf{M}_2$ 是非奇异的，由式(7.54)可以解出 $\mathbf{I}_{rt}$ 和 $\mathbf{V}_{rt}$，将答案代回到式(7.47)和(7.49)，则所产生的方程式可以置于以下形

式

$$\begin{bmatrix}\dot{V}_{ct}\\ \dot{I}_{lt}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}A_{11} & A_{12}\\ A_{21} & A_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{ct}\\ I_{lt}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}B_{11} & B_{12} & B_{13} & 0\\ B_{21} & B_{22} & 0 & B_{24}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{s}\\ I_{J}\\ \dot{V}_{s}\\ \dot{I}_{J}\end{bmatrix}$$

(7.58)

式中假定 C_c 和 L_l 是非奇异的。

$$A_{11}=-C_c^{-1}(Q_{cr}M_1^{-1}F_{11}+\dot{C}_c) \quad (7.59\text{a})$$

$$A_{12}=C_c^{-1}(Q_{cr}M_1^{-1}F_{12}-Q_{cl}) \quad (7.59\text{b})$$

$$A_{21}=L_l^{-1}(Q'_{cl}+Q'_{rl}M_2^{-1}F_{21}) \quad (7.59\text{c})$$

$$A_{22}=-L_l^{-1}(Q'_{rl}M_2^{-1}F_{22}+\dot{L}_l) \quad (7.59\text{d})$$

$$B_{11}=C_c^{-1}(\dot{C}_c-Q_{cr}M_1^{-1}P_{11}) \quad (7.60\text{a})$$

$$B_{12}=C_c^{-1}(Q_{cr}M_1^{-1}P_{12}-Q_{cJ}) \quad (7.60\text{b})$$

$$B_{13}=C_c^{-1}C_e \quad (7.60\text{c})$$

$$B_{21}=L_l^{-1}(Q_{es}-Q'_{rl}M_2^{-1}P_{21}) \quad (7.60\text{d})$$

$$B_{22}=L_l^{-1}(\dot{L}_J-Q'_{rl}M_2^{-1}P_{22}) \quad (7.60\text{e})$$

$$B_{24}=L_l^{-1}L_J \quad (7.60\text{f})$$

方程式(7.58)是一般网络所要求的状态方程，在此强调一下，它只在 W_1、W_2，M_1、M_2、C_c 和 L_l 是非奇异的假设条件下才有效。

此外，可以选择由下列方程式所定义的电容电荷的线性组合以及电感磁链的线性组合为网络的状态变量。

$$q=C_cV_{ct} \quad (7.61\text{a})$$

$$\lambda=L_lI_{lt} \quad (7.61\text{b})$$

在这种情况下，状态方程变为

$$\begin{bmatrix}\dot{q}\\ \dot{\lambda}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-Q_{cr}M_1^{-1}F_{11}C_c^{-1} & (Q_{cr}M_1^{-1}F_{12}-Q_{cl})L_l^{-1}\\ (Q'_{cl}+Q'_{rl}M_2^{-1}F_{21})C_c^{-1} & -Q'_{rl}M_2^{-1}F_{22}L_l^{-1}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}q\\ \lambda\end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} \dot{C}_e - Q_{cr}M_1^{-1}P_{11} & Q_{cr}M_1^{-1}P_{12} - Q_{cj} & C_e & 0 \\ Q'_{el} + Q'_{rl}M_2^{-1}P_{21} & \dot{L}_l \quad Q'_{rl}M_2^{-1}P_{22} & 0 & L_l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \\ \dot{V}_e \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} \tag{7.62}$$

由下面的例子来说明以上结论。

例 7.5：要求利用以上公式得出图 7.4 网络的状态方程，表示图 7.4 网络的有向图 G 如图 7.5 所示。象在例 7.4 中一样，选择正规树 $t = e_1e_4e_5e_8e_{10}$，相对于此树 t 的 f 割集矩阵 Q_f 的子矩阵 Q_t，按照式(7.41)来分块，由下式给出：

		c	r			l	j
		e_9	e_3	e_6	e_7	e_2	e_{11}
e	e_8	0	0	0	0	1	0
c	e_4	1	1	0	1	−1	0
c	e_5	1	−1	1	0	1	1
r	e_1	0	0	0	0	1	0
l	e_{10}	0	0	0	0	1	0

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{ee} & Q_{er} & Q_{el} & Q_{ej} \\ Q_{ce} & Q_{cr} & Q_{cl} & Q_{cj} \\ Q_{re} & Q_{rr} & Q_{rl} & Q_{rj} \\ Q_{le} & Q_{lr} & Q_{ll} & Q_{lj} \end{bmatrix} \tag{7.63}$$

参数矩阵如下式：

$$\begin{bmatrix} C_{tt} & 0 \\ 0 & C_{ll} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 & 0 \\ 0 & C_5 & 0 \\ 0 & 0 & C_9 \end{bmatrix} \tag{7.64 a}$$

$$\begin{bmatrix} L_{ll} & L_{lt} \\ L_{tl} & L_{tt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_2 & 0 \\ 0 & L_{10} \end{bmatrix} \tag{7.64 b}$$

$$\begin{bmatrix} H_{tt} & H_{tl} \\ H_{lt} & H_{ll} \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc|c} 1/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_6 & 0 & 0 \\ \alpha/R_3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & R_1 \end{array}\right] \tag{7.64 c}$$

其它参数矩阵可以根据式(7.48)和(7.50)来计算：

$$C_t = C_{tt} + Q_{ct}C_{ll}Q'_{ct} = \begin{bmatrix} C_4 & 0 \\ 0 & C_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[C_9][1\ \ 1]$$

$$= \begin{bmatrix} C_4 + C_9 & C_9 \\ C_9 & C_5 + C_9 \end{bmatrix} \tag{7.65 a}$$

$$C_n = Q_{ct}C_{ll}Q'_{cc} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}[C_9][0] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.65 b}$$

$$\begin{aligned} L_l &= L_{ll} - L_{lt}Q_{tl} - Q'_{tl}L_{tl} + Q'_{tl}L_{tt}Q_{tl} \\ &= [L_2] - [0][1] - [1][0] + [1][L_{10}][1] \\ &= [L_2 + L_{10}] \end{aligned} \tag{7.65 c}$$

$$L_j = (L_{tl} - Q'_{tl}L_{tt})Q_{tj} = ([0] - [1][L_{10}])[0] = [0] \tag{7.65 d}$$

根据式(7.53)、(7.55)、(7.56)和(7.57)，可以得到

$$W_1 = U_{tt} + H_{tl}Q_{tt} = U_3 \tag{7.66 a}$$

$$W_2 = U_{ll} - H_{lt}Q'_{tl} = [1] \tag{7.66 b}$$

$$M_1 = W_1 + H_{tl}Q'_{tl}W_2^{-1}H_{lt}Q_{tl} = U_3 \tag{7.67 a}$$

$$M_2 = W_2 + H_{lt}Q_{tl}W_1^{-1}H_{tl}Q'_{tl} = [1] \tag{7.67 b}$$

$$F_{11} = H_{tt}Q'_{ct} - H_{tl}Q'_{tl}W_2^{-1}H_{lt}Q'_{ct} = \begin{bmatrix} -1/R_3 & -1/R_3 \\ 0 & 1/R_6 \\ -\alpha/R_3 & \alpha/R_3 \end{bmatrix} \tag{7.68 a}$$

$$\mathbf{F}_{12} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{cl} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{tr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{cl} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.68 b}$$

$$\mathbf{F}_{21} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{cr} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{cr} = [0 \quad 0] \tag{7.68 c}$$

$$\mathbf{F}_{22} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rl} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rl} = [-R_1] \tag{7.68 d}$$

$$\mathbf{P}_{11} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{el} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{tr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{el} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.69 a}$$

$$\mathbf{P}_{12} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{el} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{tr}\mathbf{W}_2^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{el} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.69 b}$$

$$\mathbf{P}_{21} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}'_{er} = [0] \tag{7.69 c}$$

$$\mathbf{P}_{22} = \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rl} - \mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rr}\mathbf{W}_1^{-1}\mathbf{H}_{tt}\mathbf{Q}_{rl} = [0] \tag{7.69 d}$$

最后，为了得出状态方程，由式(7.59)和(7.60)计算得出

$$\mathbf{A}_{11} = -\mathbf{C}_c^{-1}(\mathbf{Q}_{cr}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{F}_{11} + \dot{\mathbf{C}}_c)$$

$$= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} C_5 + C_9 & C_9 \\ -C_9 & C_4 + C_9 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} (\alpha - 1)/R_3 & (\alpha - 1)/R_3 \\ 1/R_3 & 1/R_3 - 1/R_6 \end{bmatrix} \tag{7.70 a}$$

$$\mathbf{A}_{12} = -\mathbf{C}_c^{-1}(\mathbf{Q}_{cr}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{F}_{12} - \mathbf{Q}_{cl}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} C_9 \\ C_9 \end{bmatrix} \tag{7.70 b}$$

$$\mathbf{A}_{21} = \mathbf{L}_l^{-1}(\mathbf{Q}'_{cl} - \mathbf{Q}'_{rl}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{F}_{21}) = \frac{1}{L_2 + L_{10}}[-1 \quad 1] \tag{7.70 c}$$

$$\mathbf{A}_{22} = -\mathbf{L}_l^{-1}(\mathbf{Q}'_{rl}\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{F}_{22} + \dot{\mathbf{L}}_l) = \frac{1}{L_2 + L_{10}}[-R_1] \tag{7.70 d}$$

$$\mathbf{B}_{11} = -\mathbf{C}_c^{-1}(\dot{\mathbf{C}}_e - \mathbf{Q}_{cr}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P}_{11}) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.71 a}$$

$$\mathbf{B}_{12} = -\mathbf{C}_c^{-1}(\mathbf{Q}_{cr}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{P}_{12} - \mathbf{Q}_{ce}) = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} C_9 \\ C_4 + C_9 \end{bmatrix} \tag{7.71 b}$$

$$\mathbf{B}_{13} = \mathbf{C}_c^{-1}\mathbf{C}_s = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{7.71 c}$$

$$\mathbf{B}_{21} = \mathbf{L}_t^{-1}(\mathbf{Q}_s' + \mathbf{Q}_r'\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{P}_{21}) = \frac{1}{L_2 + L_{10}}[1] \tag{7.71 d}$$

$$\mathbf{B}_{22} = \mathbf{L}_t^{-1}(\dot{\mathbf{L}}_j - \mathbf{Q}_r'\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{P}_{22}) = [0] \tag{7.71 e}$$

$$\mathbf{B}_{24} = \mathbf{L}_t^{-1}\mathbf{L}_j = [0] \tag{7.71 f}$$

将它们代入式(7.58)即得到所要求的状态方程

$$\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ i_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} C_5 + C_9 & -C_9 & 0 \\ -C_9 & C_4 + C_9 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\Delta}{L_2 + L_{10}} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dfrac{\alpha-1}{R_3} & \dfrac{\alpha-1}{R_3} & 1 \\ -\dfrac{1}{R_3} & -\dfrac{1}{R_3}-\dfrac{1}{R_6} & 1 \\ -1 & -1 & -R_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \\ i_2 \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} 0 & -C_9/\Delta & 0 & 0 \\ 0 & (C_4 + C_9)/\Delta & 0 & 0 \\ 1/(L_2 + L_{10}) & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_s \\ i_s \\ \dot{v}_s \\ \dot{i}_s \end{bmatrix} \tag{7.72}$$

这就是式(7.37)。

此外，如式(7.61)中所示，可以选择电荷和磁链为状态变量，在这种情况下，状态变量由下式给出：

$$\mathbf{q} = \begin{bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \end{bmatrix} = \mathbf{C}_c\mathbf{V}_{ct} = \begin{bmatrix} C_4 v_4 + C_9(v_4 + v_5) \\ C_5 v_5 + C_9(v_4 + v_5) \end{bmatrix} \tag{7.73 a}$$

$$\boldsymbol{\lambda} = [\lambda] = \mathbf{L}_t\mathbf{L}_t = (L_2 + L_{10})[i_2] \tag{7.73 b}$$

将它们代入式(7.62)，得

$$
\begin{bmatrix} \dot{q}_\alpha \\ \dot{q}_\beta \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}
= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} -\frac{(\alpha-1)}{R_3} & \frac{(\alpha-1)}{R_3} & 1 \\ -\frac{1}{R_3} & \frac{1}{R_3} \quad \frac{1}{R_6} & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} C_5+C_9 & -C_9 & 0 \\ C_9 \quad C_4 & C_9 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\Delta}{L_2+L_{10}} \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ \lambda \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \\ v_g \\ i_g \end{bmatrix} \tag{7.74}
$$

经过简化之后，式(7.74)变为

$$
\begin{bmatrix} \dot{q}_\alpha \\ \dot{q}_\beta \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix}
= \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} (\alpha-1)C_5/R_3 & (\alpha \quad 1)C_4 \quad R_3 & \Delta/(L_2+L_{10}) \\ C_9/R_6 \quad C_5/R_3 & (C_4+C_9)/R_6 \quad C_4/R_3 & \Delta/(L_2+L_{10}) \\ -C_5 & C_4 & -R_6\Delta/(L_2+L_{10}) \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} q_\alpha \\ q_\beta \\ \lambda \end{bmatrix}
+ \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}
\begin{bmatrix} v_g \\ i_g \end{bmatrix} \tag{7.75}
$$

注意，变量 q_α，q_β 和 λ 表示电容电荷或电感磁链的线性组合。为了显示这一点，把式(7.73)重写为

$$q_\alpha = C_4v_4 + C_9(v_4+v_5) = C_4v_4 + C_9v_9 = q_4+q_9 \tag{7.76 a}$$

$$q_\beta = C_5v_5 + C_9(v_4+v_5) = C_5v_5 + C_9v_9 = q_5+q_9 \tag{7.76 b}$$

$$\lambda = L_2i_2 + L_{10}i_2 = L_2i_2 + L_{10}i_{10} = \lambda_2+\lambda_{10} \tag{7.76 c}$$

§ 4. 状态方程的另一种表示式

在上一节中表明了线性网络的状态方程具有如下一般形式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}_1\mathbf{u} + \mathbf{B}_2\dot{\mathbf{u}} \tag{7.77}$$

$\dot{\mathbf{u}}$ 是激励 $\mathbf{u}$ 的时间导数。有可能通过以下变换移去这激励的导数

$$\mathbf{x} \to \mathbf{x} + \mathbf{B}_2\mathbf{u} \tag{7.78}$$

当代入式(7.77)中，就得到

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \tag{7.79 a}$$

式中

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{A}\mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{B}_2 \tag{7.79 b}$$

在电荷和磁链被选为状态变量的式(7.62)的情况下，式(7.77)中的矢量 $\mathbf{x}$ 和 $\mathbf{u}$ 可以表示为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} \\ \boldsymbol{\lambda} \end{bmatrix} \quad 和 \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_e \\ \mathbf{I}_j \end{bmatrix} \tag{7.80}$$

经过变换式(7.78)之后，新的状态矢量x变为

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{q} - \mathbf{C}_e\mathbf{V}_e \\ \boldsymbol{\lambda} - \mathbf{L}_j\mathbf{I}_j \end{bmatrix} \tag{7.81}$$

利用式(7.61)以及式(7.48)，(7.50)，(7.43 d)和(7.43 e)，可以写为

$$\begin{aligned}
\mathbf{x} &= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_c\mathbf{V}_c - \mathbf{C}_e\mathbf{V}_e \\ \mathbf{L}_l\mathbf{I}_l - \mathbf{L}_j\mathbf{I}_j \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt}\mathbf{V}_{lt} + \mathbf{Q}_{cc}\mathbf{C}_{tt}(\mathbf{Q}'_{cc}\mathbf{V}_{ct} + \mathbf{Q}'_{ec}\mathbf{V}_e) \\ \mathbf{L}_t\mathbf{I}_{lt} - \mathbf{Q}'_l\mathbf{L}_{ll}\mathbf{I}_{ll} - \mathbf{L}_{tt}(\mathbf{Q}\,\mathbf{I} + \mathbf{Q}_{lj}\mathbf{I}_j) + \mathbf{Q}'_l\mathbf{L}_{l}(\mathbf{Q}_{ll}\mathbf{I}_{ll} + \mathbf{Q}_{lj}\mathbf{I}_j) \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{C}_{tt}\mathbf{V}_{ct} + \mathbf{Q}_{cc}\mathbf{C}_{tt}\mathbf{V}_c \\ \mathbf{L}_{tt}\mathbf{I}_{lt} - \mathbf{Q}'_{ll}\mathbf{L}_{ll}\mathbf{I}_{lt} + \mathbf{L}_{ll}\mathbf{I}_{lt} - \mathbf{Q}'_{l}\mathbf{L}_{tt}\mathbf{I}_{lt} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \mathbf{q}_{ct} + \mathbf{Q}_{cc}\mathbf{q}_{cc} \\ \boldsymbol{\lambda}_{lt} - \mathbf{Q}'_{ll}\boldsymbol{\lambda}_{ll} + \boldsymbol{\lambda}_{lt} - \mathbf{Q}'_{l}\boldsymbol{\lambda}_{lt} \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{7.82}$$

最后一步是根据式(7.44 b)和(7.45 b)得出的。因此，x(状态变量)的元不是表示电容电荷就是表示电感磁链的线性组合。

在手算中，利用这些一般公式得出简单的具体网络的状态方程是无意义的。因此，人们可能会问，这些一般公式是否有价值。这里的推导有两个目的，首先，至少经历一次在坚实的基础上推导状态方程的一般公式是有价值的。其次，当利用数字计算机的时候，一般公式很适合列出状态方程。

§ 5. 参数矩阵的物理解释

在前面两节中介绍了一般线性网络标准形式的状态方程的显式。在这一节中，将讨论状态方程的参数矩阵的物理意义。由于考虑的是一般时变的情况，因此选用电荷和磁链作为状态变量比较方便。

我们的依据是式(7.61)，合併式(7.61 a)、(7.44)和(7.82)，可得

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{C}_e\mathbf{V}_{e}) &= \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{C}_e\dot{\mathbf{V}}_e + \dot{\mathbf{C}}_e\mathbf{V}_e \\ &= -\frac{d}{dt}(\mathbf{C}_{et}\mathbf{V}_{et} + \mathbf{Q}_{el}\mathbf{C}_l\mathbf{V}_{el}) \\ &\quad - \mathbf{I}_{el} - \mathbf{Q}_{el}\mathbf{I}_{lj}\end{aligned} \qquad (7.83)$$

类似地，由式(7.61 b)、(7.45)和(7.82)，可以得出

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_l\mathbf{I}_l) &= \dot{\boldsymbol{\lambda}} = \mathbf{L}_j\dot{\mathbf{I}}_j + \dot{\mathbf{L}}_j\mathbf{I}_j \\ &= -\frac{d}{dt}(\mathbf{L}_{tl}\mathbf{I}_t + \mathbf{L}_t\mathbf{I}_{tl} + \mathbf{Q}'_{ll}\mathbf{L}_{ll}\mathbf{I}_{lt} + \mathbf{Q}'_{tl}\mathbf{L}_{tl}\mathbf{I}_{ll}) \\ &\quad - \mathbf{V}_{tl} - \mathbf{Q}'_l\mathbf{V}_{el}\end{aligned} \qquad (7.84)$$

将式(7.83)中的 $\dot{\mathbf{q}}-\mathbf{C}_e\dot{\mathbf{V}}_e$ 及式(7.84)中的 $\dot{\boldsymbol{\lambda}}-\mathbf{L}_j\dot{\mathbf{I}}_j$ 代入式(7.62)，并重新整理，给出一纯粹的代数方程式，其系数矩阵可以很容易地得

到物理解释：

$$\begin{bmatrix} I_{ct} \\ -V_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{cr}M_1^{-1}F_{11} & Q_{cr}M_1^{-1}F_{12} - Q_c \\ -Q_c' + Q_l'M_2^{-1}F_{21} & Q_l'M_2^{-1}F_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{ct} \\ I_{lt} \end{bmatrix}$$

$$+\begin{bmatrix} Q_{cc} & 0 \\ 0 & Q_l' \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{ct} \\ -V_{lt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_{cr}M_1^{-1}P_{11} & Q_{cr}M_1^{-1}P_{12} - Q_c \\ -Q_c' + Q_l'M_2^{-1}P_{21} & Q_l'M_2^{-1}P_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \end{bmatrix} \tag{7.85}$$

参考原网络N，以符号形式重画如图7.6所示，这里每个单"矢量端口"表示对应类的子网络。例如，V_{ct}表示由N的所有树支电容组成的子网络 图7.6中电压和电流的参考方向与所导出的方程式取一致。通过对适当的变量置零，上述方程式的各种小网络的物理意义可以很容易地确定如下：

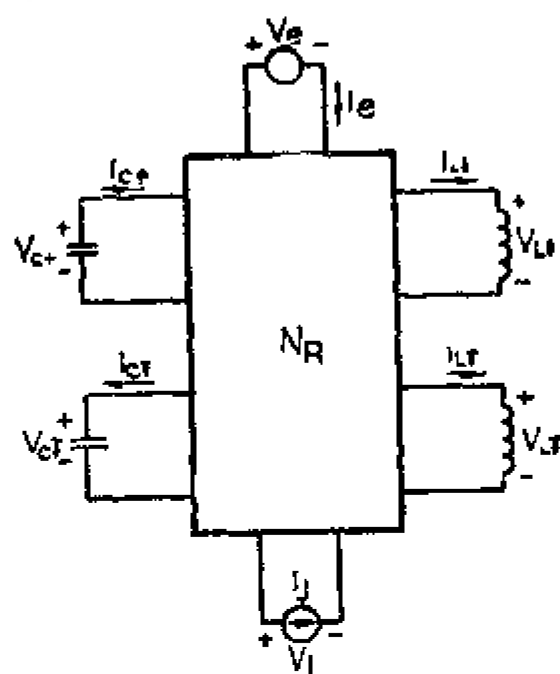


图 7.6 一般网络的矢量端口表示法，这里每个单矢量端口表示对应类的子网络

$$-I_{ct} = Q_{cr}M_1^{-1}F_{11}V_{ct}|_{I_{lt},\ I_{ct},\ V_e 和 I_j = 0} \tag{7.86 a}$$

$$I_{ct} = (Q_{cr}M_1^{-1}F_{12} - Q_{cl})I_{lt}|_{V_{ct},\ I_{cl},\ V_e 和 I_j = 0} \tag{7.86 b}$$

$$V_{lt} = (Q_c' - Q_l'M_2^{-1}F_{21})V_{ct}|_{I_{lt},\ V_{lt},\ V_e 和 I_j = 0} \tag{7.86 c}$$

$$V_{lt} = Q_l'M_2^{-1}F_{22}(-I_{lt})|_{V_{ct},\ V_{lt},\ V_e 和 I_j = 0} \tag{7.86 d}$$

回顾一下式(7.43 d)和(7.43 e)，可以认识到如果置$I_{lt}=0$和$I_j=0$，则树支电感电流矢量I_{lt}必定也为零，而如果置$V_{ct}=0$和$V_e=0$，同样补树弦电容电压矢量V_c也将为零。重提一下，移去一个独立源，指的是短路一个电压源或开路一个电流源。因此得出以下结论：

$$Y_{ce} = Q_{cr}M_1^{-1}F_{11} \tag{7.87}$$

其端口是接树支电容的端口，而所有其它电容及电感均作为开路，独立电源也均移去。这一电阻多端口网络表示如图 7.7 所示。类似地，子矩阵

$$\mathbf{Z}_l = \mathbf{Q}_{ll}'\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{F}_{22} \tag{7.88}$$

是电阻多端口网络的开路阻抗矩阵，其端口由补树弦支电感的端子所形成，所有其它电容与电感均作为短路并移去所有独立源。如图 7.8 所示。

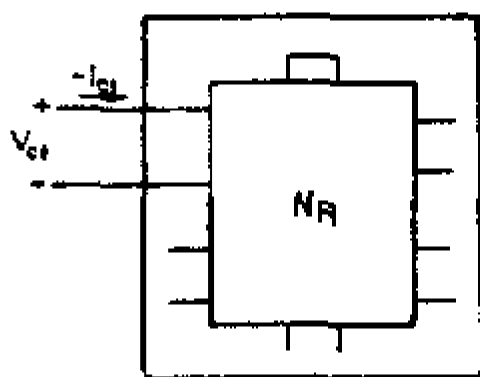


图 7.7 用来定义导纳矩阵 $\mathbf{Y}_c$ 的电阻多端口网络

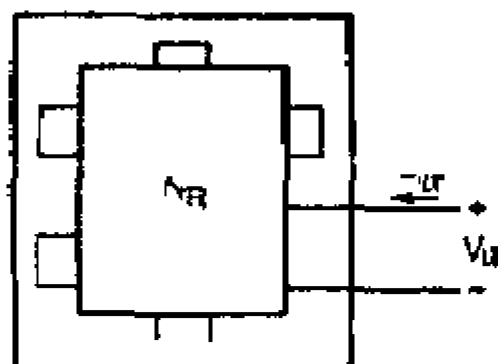


图 7.8 用来定义阻抗矩阵 $\mathbf{Z}_l$ 的电阻多端口网络

为了求出其它两个子矩阵，设

$$\mathbf{H}_{lc} = \mathbf{Q}_{cc}\mathbf{M}_1^{-1}\mathbf{F}_{12} - \mathbf{Q}_{cl} \tag{7.89}$$

$$\mathbf{H}_{cl} = \mathbf{Q}_{cc}' + \mathbf{Q}_{ll}'\mathbf{M}_2^{-1}\mathbf{F}_{21} \tag{7.90}$$

因此，$\mathbf{H}_{lc}$ 是当所有补树弦支电容开路，并移去所有独立源时的电阻多端口网络的电流转移矩阵，其输入端口由补树弦电感形成，而其输出则是树支电容端子上的短路电流。树支电感由电流源置换，其值是由具有 $\mathbf{I}_j = \mathbf{0}$ 的式(7.43 d)来确定。电阻多端口网络如图 7.9 所示。注意，根据基尔霍夫电压定律的制约，跨在补树弦电容上的电压总是零。

最后，$\mathbf{H}_{cl}$ 是所有树支电感短路，而所有独立源移去时的电阻多端口网络的电压转移矩阵，其输入端口由树支电容形成，而其输出是跨在补树弦电感端子上的开路电压。根据具有 $\mathbf{V}_s = \mathbf{0}$ 的式

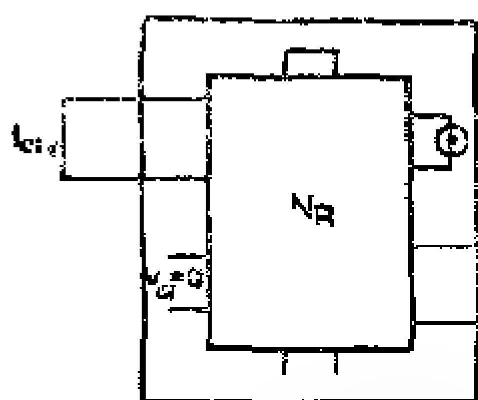


图 7.9 用来定义电流转移矩阵 H 的电阻多端口网络

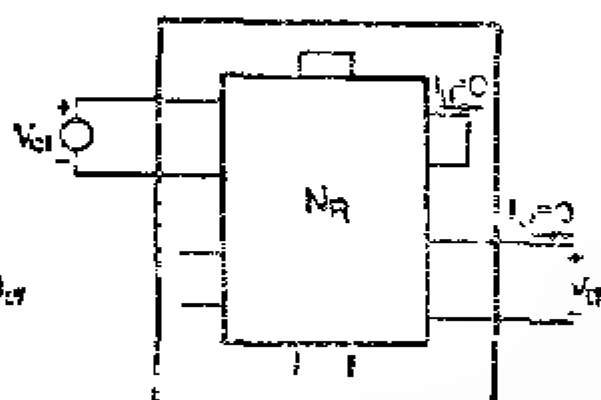


图 7.10 用来定义电压转移矩阵 H_{v} 的电阻多端口网络

(7.43 e)、补树支电容电压现在是已知的，因此它们可以移去．电阻多端口网络如图 7.10 所示，其中树支电感电流总是为零。

同样，式(7.85)中的系数矩阵 V 及 I，可以如下式定义，并作出相应物理解释。

$$\mathbf{I}_{c} \quad \mathbf{Y}_{cc}\mathbf{V}_{c} \quad \mathbf{Q} \; \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P} \; \mathbf{V}_{c} \; {}_{v \quad 1} \text{，和} \; {}_{i \quad 0} \tag{7.91 a}$$

$$\mathbf{I}_{c} \quad \mathbf{H}_{c} \quad \mathbf{Q} \; \mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{22} \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{I} \; {}_{v_{cc}, 1 \cdots i_{t}} \text{，和} \; v_{c}=0 \tag{7.91 b}$$

$$\mathbf{V} \quad \mathbf{H}_{c}\mathbf{V}_{s} \quad \mathbf{Q} \quad \mathbf{Q}_{t}'\mathbf{M}^{-1}\mathbf{P}_{21}\mathbf{V}_{e}|_{v_{c} \; 1_{1}, v_{c}} \text{，和} \; i_{l} \; 0 \tag{7.91 c}$$

$$\mathbf{V}_{i} \quad \mathbf{Z}\,\mathbf{I}_{l} = \quad \mathbf{Q}'\mathbf{M}_{2}^{-1}\mathbf{P}_{12}\mathbf{I}\,|_{v_{c} \; 1 \quad v_{c}} \text{，和} \; v_{c} \; 0 \tag{7.91 d}$$

根据前面的讨论，这些子矩阵的物理意义是清楚的，它们表示各种相应多端口的转移导纳矩阵、电流转移矩阵、电压转移矩阵和转移阻抗矩阵，这些物理解释的细节留作练习(习题 7.3 和 7.4)。

在阐明以上物理解释之前，说明[illegible]参数矩阵 C_{c} 和 L_{l} 也具有简单物理意义。如在第四章 §5.3 中那样，设 G (g_{1}; g_{2})表示从 G 中首先短接所有含于子图 g 的边(不移去由此产生的自环)，然后移去所有含于子图 g_{2} 的边所得的有向图．g [illegible] g_{2} 是两个边不相交的子图．

对于 C_{c}，设 g 是包含所有非电容树支的正规树的子图，而 g_{2} 是包含所有非电容连支的补树的子图，于是对于仅由电容树支组成

的简化下规树的G(g - g_2)，它的割集矩阵是[U_{cc} Q_{cc}]，其有关的割集导纳矩阵由下式给出：

$$[U_{cc}\ Q_{cc}]\begin{bmatrix} sC & 0 \\ 0 & sC_{t1} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U_{cc} \\ Q'_{cc} \end{bmatrix} = sC_c \tag{7.92}$$

类似地，对于L_l，设g_3是包含所有非电感支的 [illegible] 子图，而g_4是包含所有非电感支的补树的子图，于是对于这个简化电感补树的G(g_3：g [illegible] 的回路矩阵是 [Q' U]，其有关的回路阻抗矩阵由下式给出：

$$[\ Q'\ U\ ]\begin{bmatrix} sL_r & sL_{t} \\ sL_t & sL \end{bmatrix}\begin{bmatrix} Q \\ U_t \end{bmatrix} = sL_l \tag{7.93}$$

由下面的例子来说明以上结论

例 7.6：假设要求利用以上概念来得出图7.4网络的状态方程，图7.4网络的 [illegible] 如图 [illegible] 5所示。像在例7.4中那样，选择正规树 [illegible]

为了计算式 7.8 [illegible] 的Y_{cc}，开路两个电感和电容C_3，移去独立的电流源，短路独立电压源，并用两个具有与电容电压同极性的电压源v_4和v_5来替换两个电容C_4和C_5，得出的网络如图7.1 [illegible] 所示。我们的目的是利用电压源v_4和v_5，计算电流 i_4和$-i_5$。得出

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-\alpha)/R_3 & (1-\alpha)/R_3 \\ 1/R & 1/R_3 + 1/R_5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \tag{7.94}$$

系数矩阵是由式(7.[illegible])所定义的割路导纳矩阵Y_{cc}。

为了计算式 [illegible] 的Z_l，[illegible] 电容 [illegible] 电感L_6和独立电压源 [illegible] 以与电感 [illegible] 方向与电感L_1的相反的电流源 [illegible] 电感L_2，最终网络如图7.12所示，向这个电流源看进去的输入 [illegible] 由下式给出：

$$Z_l \quad [\,P_s\,] \tag{7.95}$$

最后，为了确定H_c和H_{cl}，[illegible] 图7.13(a)和(b)的网络，

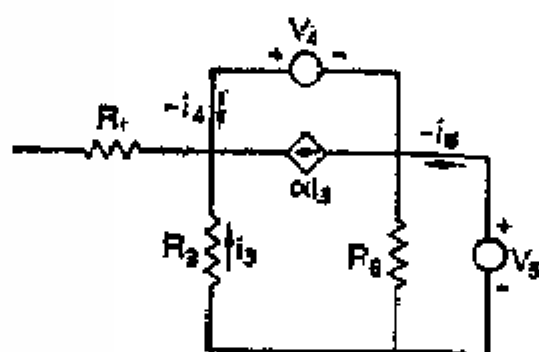


图 7.11　用来计算导纳矩阵 Y_{cc} 的电阻网络

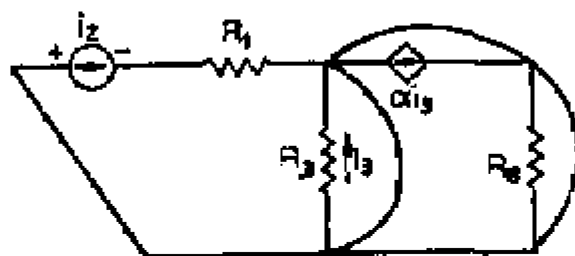


图 7.12　用来计算阻抗矩阵 Z_{ll} 的电阻网络

得出所要求的方程如下.

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} [i_2] \qquad (7.96\text{ a})$$

$$[v_2] = [-1 \quad -1] \begin{bmatrix} v_4 \\ v_5 \end{bmatrix} \qquad (7.96\text{ b})$$

其系数矩阵分别是 $\boldsymbol{H}_{lc}$ 和 $\boldsymbol{H}_{cl}$。

以类似的方式，可以计算式(7.91)的系数矩阵。对于式(7.91 a)和(7.91 d)的系数矩阵 $\mathbf{Y}_{cc}$ 和 $\mathbf{Z}_{ll}$，很容易验证它们是零矩阵。对于式(7.91 b)，可以利用图 7.14 的网络，得出

$$\begin{bmatrix} i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [i_8] = \mathrm{H}_{j}\,\mathrm{I}_{j} \qquad (7.97)$$

最后，对于式(7.91 c)，系数矩阵 H_{cl} 是[1]。

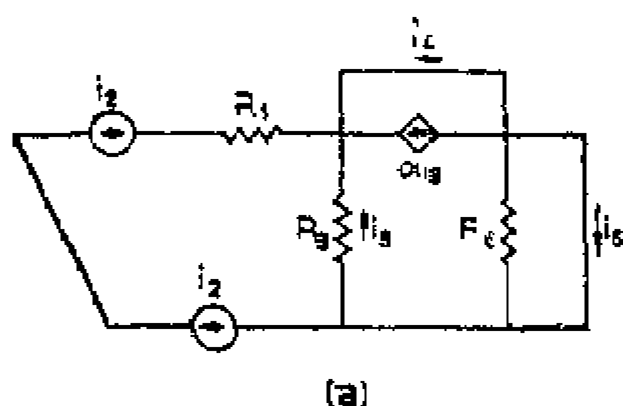
如在式(7.92)和(7.93)中所示，易于验证

$$s\mathrm{C}_c = s\begin{bmatrix} C_4 + C_9 & C_9 \\ C_9 & C_5 + C_9 \end{bmatrix} \qquad (7.98)$$

是相对于由支路 C_4 和 C_5 组成树的图 7.15(a)电容网络的割集导纳矩阵，而

$$s\mathrm{L}_l = s[\mathrm{L}_2 + \mathrm{L}_{10}] \qquad (7.99)$$

是相对于补树 L_2 的图 7.15(b)电感网络的回路阻抗矩阵。



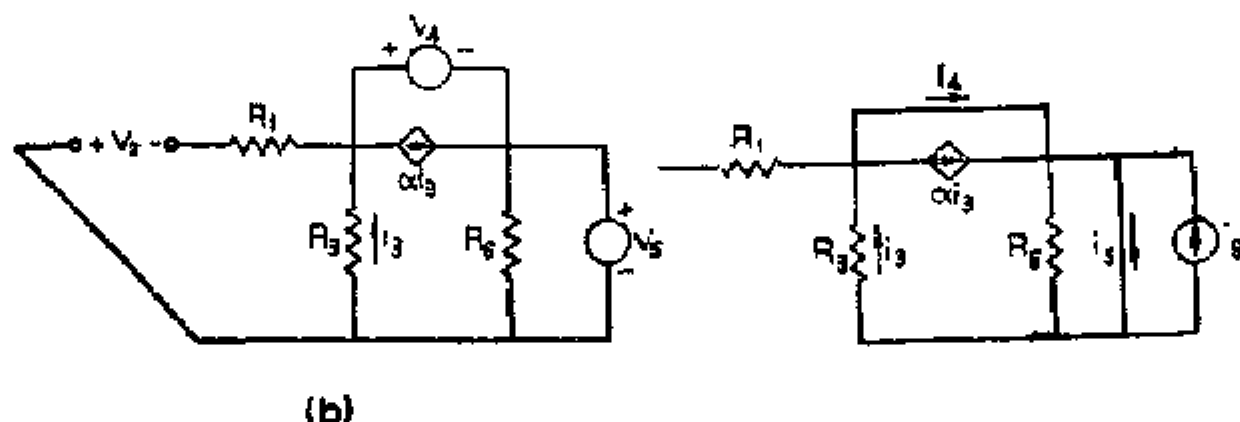
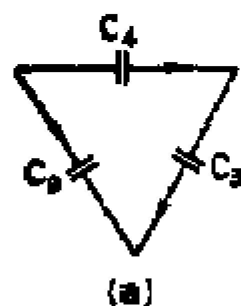


图 7.13 (a) 用以计算电流转移矩阵 H_{lc} 的电阻网络(b) 用以计算电压转移矩阵 H_{cl} 的电阻网络

图 7.14 用于计算电流转移矩阵 H_{lc} 的电阻网络

利用式(7.86)和(7.91)的系数矩阵，状态方程(7.62)成为

$$\begin{bmatrix} \dot{q} \\ \dot{\lambda} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -Y_{cc}C_c^{-1} & H_{cl}L_l^{-1} \\ H_{lc}C_c^{-1} & -Z_{ll}L_l^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q \\ \lambda \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \dot{C}_e - Y_{ce} & H_{cj} & C_e & 0 \\ H_{le} & \dot{L}_j - Z_{lj} & 0 & L_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_e \\ I_j \\ \dot{V}_e \\ \dot{I}_j \end{bmatrix} \tag{7.100}$$



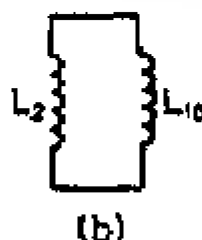


图 7.15 (a) 用于计算矩阵 C_c 的电容网络 (b) 用于计算矩阵 L_l 的电感网络

在式(7.100)中，根据式(7.91)～(7.99)，代入相应的量，便可获得如式(7.75)中所示的状态方程。

§6. 复 杂 度

在上述内容中，提出了一般线性网络的标准形式状态方程的显式。为了一般的推导过程能够进行，我们假定某些矩阵是存在的。为了圆满完成这一公式的推导，必须表明，所有的网络变量可以用状态变量和已知的电源来表示。这样做了之后，就可以下结论说作为网络变量一部分的输出变量，总可以用式(7.3)的形式来表示。这种情况总是可以直接根据式(7.43)～(7.46)得出。例如，根据式(7.43 d)，矢量 I_{lt} 可以用 I_{ll} 和 I_j 来表示。为了计算 V_{lt}，利用式(7.45 a)的第二个方程以及式(7.43 d)，可以得出

$$
\begin{aligned}
V_{lt} &= \frac{d}{dt}\left([L_{tl}\ \ L_{tt}]\begin{bmatrix} I_{ll} \\ Q_{ll}I_{ll}+Q_{lj}I_j \end{bmatrix}\right) \\
&= (L_{tl}-L_{tt}Q_{ll})\dot{I}_{ll}+(\dot{L}_{tl}-\dot{L}_{tt}Q_{ll})I_{ll}-\dot{L}_{tt}Q_{lj}I_j-L_{tt}Q_{lj}\dot{I}_j \\
&= (L_{tl}-L_{tt}Q_{ll})A_{21}V_{ct}+[(L_{tl}-L_{tt}Q_{ll})A_{22}+\dot{L}_{tl}-L_{tt}Q_{ll}]I_{ll} \\
&\quad +(L_{tl}-L_{tt}Q_{ll})[B_{21}V_{c}+B_{22}I_{s}+B_{24}\dot{I}_j] \\
&\quad -\dot{L}_{tt}Q_{lj}I_j-L_{tt}Q_{lj}\dot{I}_j
\end{aligned}
\qquad (7.101)
$$

最后一行直接根据状态方程式(7.58)得出。同样，可以计算所有其它变量，其推导细节留作为练习(习题 7.8～7.11)。换言之，一旦状态变量确定，其余的网络变量只需用代数方法就可以求得。由于选用的状态是电容电压和电感电流，与电阻边有关的变量是静态的不一样，每个元件限定方程均含有导数，这些变量是动态的。这就产生了这样一个问题，有多少动态独立状态变量，它们的瞬时值足以完全确定网络的瞬时状态，引出了网络的“复杂度”概念。

确定这个数目的早期方法是由 GUILLEMIN[1931]给出的，并称它为自由度，但它只适用于不含有任何全电容或全电感回路的时不变 RLC 网络。这名词起源于机械系统的研究，其中得出有意义

的门"位置"或者"方位"，后来，REZA[1955]对仅含有两类元件的网络给出了解决方法，并采用了"复杂度"这一名词，这将在下面的讨论中随之得出。时不变RLC网络的完整解法是由BRYANT[1959，1960]，BERS[1959]以及SESHU和REED[1961]分别独立得出的。而推广到有源网络则是最近的事，PURSLOW和SPENCE[1967]，TOW[1968]，MARK[1971]以及CHEN[1972a]都投入了这一研究。与RLC网络的情况不一样，主要的难点在于这样的情况，即这一数目一般仅由拓扑结构无法确定，它还取决于网络的参数值，这使问题大大复杂化。但是对于一个一般的网络，在这个数目上的许多上界都是知道的。在这一节中将介绍某些已知结论的统一概述。遗憾的是没有简单的必要和充分条件可以利用，因而仍然是一个未解决的问题。

我们首先精确地定义一般网络的"复杂度"，然后表明怎样来确定它，或通过观察得出其上界。这里讨论限于由独立电压源和电流源、电阻、电容，具有正定电感矩阵的自感和互感，以及受控电流源组成线性时不变网络。在适当的等效变换下，受控电压源，回转器和阻抗变换器也考虑在内。每个受控源都假定具有实常数的控制参数，并受通过一个具有有限阻抗元件的电流，或者跨在一对节点(这可能有一个元件直接连接在节点之间，也可能没有)上的节点对电压所控制。每个受控源由一个元件电流或节点对电压所控制。每个元件在表示网络N的有向图G中作为独立边出现。如以前那样，为了寻找有意义的解答，进一步规定网络N既没有仅由独立电压源和受控电压源组成的回路，也没有仅由独立电流源和受控电流源组成的割集。由于独立源和初始条件不影响以下所提出的讨论，为了简化讨论，不失一般性，假定所有独立电源和初始条件已从网络中移去。

为了应用第四章中所导出的拓扑公式，现转换所有电流控制电流源为等效的电压控制电流源，在这样的处理中，受控源所产生的控制参数可能含有积分算子和(或)微分算子，对此定义运算符号

$$px(t)=\frac{dx(t)}{dt} \text{和} \frac{1}{p}x(t)=\int_0^t x(\tau)d\tau \qquad (7.102)$$

于是元件限制方程式(7.44 a)，(7.45 a)和(7.46)，除了受控源，可以合并为以下形式的矩阵方程

$$Z_{IMR}(p)I_a(t)=Y_c(p)V_a(t) \qquad (7.103)$$

式中 $I_a(t)$ 和 $V_a(t)$ 表示电阻、电容和电感的电流矢量和电压矢量，矩阵 $Y_c(p)$ 是对角矩阵，在对应于电感或电阻的对角元上具有单位元，以及对应于一个电容有一项 C_P。同样地，Z_{IMR} 是对称矩阵，在对应于电容的对角元上具有单位元，在对应于一个电阻的对角上有一项R，以及对应于一个电感有一项 L_P。对于电压控制电流源可以由下面矩阵方程来表征

$$I_\beta(t)=Y_\beta(t)V_a(t) \qquad (7.104)$$

式中 $I_\beta(t)$ 表示受控源中的电流矢量，而 $Y_\beta(t)$ 是控制参数的矩阵。

除了元件限定方程之外，还有基尔霍夫电流定律和电压定律。设 Q_f 和 B_f，是相对于所选正规树的基本割集矩阵和基本回路矩阵，按照式(7.103)和(7.104)划分这些矩阵，可以得到

$$[Q_a \ \ Q_\beta]\begin{bmatrix} I_a(t) \\ I_\beta(t) \end{bmatrix}=0 \qquad (7.105\text{ a})$$

$$[B_a \ \ B_\beta]\begin{bmatrix} V_a(t) \\ V_\beta(t) \end{bmatrix}=0 \qquad (7.105\text{ b})$$

$V_\beta(t)$ 是受控源的电压矢量。合并式(7.103)～(7.105)可以得出下列基本网络方程：

$$\begin{bmatrix} Q_a & Q_\beta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B_a & B_\beta & B_\beta \\ -Z_{IMR}(P) & 0 & Y_c(P) & 0 & 0 \\ 0 & -U_\beta & Y_\beta(P) & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} I_a(t) \\ I_\beta(t) \\ V_a(t) \\ V_\beta(t) \end{bmatrix}=0$$

(7.106 a)

或更紧凑地写为

$$H(p)\begin{bmatrix} I(t) \\ V(t) \end{bmatrix} = 0 \qquad (7.106b)$$

I(t)和V(t)是G的支路电流矢量和支路电压矢量。应当强调指出，H(p)含有算子，必须小心处理。

有了这些预备知识，现在可以确切地定义一般网络的"自然频率"，接着来定义"复杂度"。

定义 7.3：自然频率

对于网络元件的电流和电压，可构成一组一阶微分方程和(或)代数方程，网络的自然频率就定义为网络方程式的算子矩阵行列式的多项式的根。

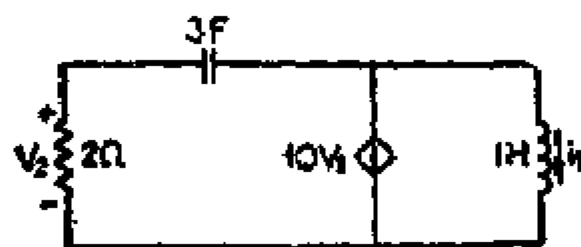
定义 7.4：复杂度

网络的自然频率数称为网络的复杂度，对每个频率都按它的阶计数。

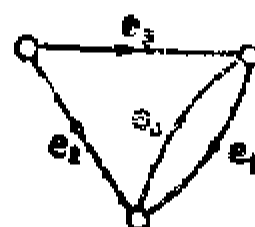
因此，从式(7.106)的算子矩阵 H(p)得出的多项式 detH(s)的根是网络N的自然频率，其数目是N的复杂度。前已指出，在网络方程的状态变量公式中，复杂度是动态独立元件电流和电压的最小数，其瞬时值足以完全确定网络的瞬时状态，因此是状态空间的维数。状态空间是用状态矢量 x(t)生成的空间，其坐标系是 x(t)的分量。在数学上，它是网络方程通解中出现的任意常数的数目。在物理结构上，它是N中线性独立储能元件的最大数，或等效地说，它是确定N工作的线性独立初始条件的最大数，这些是阐述同一问题的不同方式。

用下面的例子来说明以上结论。

例 **7.7**：考虑图 7.16(a)的有源网络N，它的有向图G表示如图 7.16(b)所示。选择 e_2e_3 为正规树，



(a)



(b)

图 7.16 (a) 说明公式算子矩阵H(p)的有源网络　(b) (a)中所示的有源网络的有向图

于是基本网络方程(7.106)成为

$$
\left[\begin{array}{ccc|c|ccc|c}
1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\
\hline
-P & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 3p & 0 \\
\hline
0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 10 & 0 & 0
\end{array}\right]
\left[\begin{array}{c}
i_1(t) \\ i_2(t) \\ \hline i_3(t) \\ \hline i_4(t) \\ \hline v_1(t) \\ v_2(t) \\ v_3(t) \\ \hline v_4(t)
\end{array}\right] = 0
\tag{7.107}
$$

系数矩阵为算子矩阵 H(p)，因此，自然频率是多项式 $\det H(s)$ 的根，这可由下式给出：

$$\det H(s) = -63 s^2 - 6 s - 1 \tag{7.108}$$

得出

$$s_1,\ s_2 = -0.0476 \pm j0.1166 \tag{7.109}$$

所以图 7.16 (a) 网络的复杂度是 2，意味着可以独立地指定两个初始条件，初始电容电压和初始电感电流。

6.1 detH(s)和网络行列式之间的关系

为了应用第四章中讨论所得的结论，现继续研究矩阵 H(s) 的行列式和割集导纳矩阵行列式之间的相互关系。为此，首先重写式(7.105)的系数矩阵为两矩阵的乘积，然后求行列式值：

$$\det H(s)=\det\begin{bmatrix} U_r & 0 & 0 & 0\\ 0 & U_m & 0 & 0\\ 0 & 0 & Z_{LMR}(s) & 0\\ 0 & 0 & 0 & U_\beta\end{bmatrix}\det\begin{bmatrix} Q_\alpha & Q_\beta & 0 & 0\\ 0 & 0 & B_\alpha & B_\beta\\ U_\alpha & 0 & Z_{LMR}^{-1}(s)Y_c(s) & 0\\ 0 & -U_\beta & Y_\beta(s) & 0\end{bmatrix}$$

$$=[\det Z_{LMR}(s)]\det\begin{bmatrix} Q_f & 0\\ 0 & B_f\\ U_b & Y(s)\end{bmatrix} \tag{7.110}$$

式中

$$Y(s)=\begin{bmatrix} Z_{LMR}^{-1}(s)Y_c(s) & 0\\ Y_\beta(s) & 0\end{bmatrix} \tag{7.111}$$

是网络N的支路导纳矩阵。注意到，矩阵 $Z_{LMR}(s)$ 是非奇异的，因为假定电感矩阵是正定的。

定理 7.1：设Q是给定网络有向图的基本割集矩阵，其支路导纳矩阵是 Y(s)，于是

$$\det H(s)=常数\cdot[\det Z_{LMR}(s)][\det QY(s)Q'] \tag{7.112}$$

$Z_{LMR}(s)$ 是对应于电阻以及自感和互感那部分网络的支路阻抗矩阵。

证明：利用定理 2.20，不失一般性，可以假设 $Q=Q_f$ 为相对于正规树的f割集矩阵，根据这个正规树的树支和弦支，划分式(7.110)的矩阵 Q_f，B_f 和 Y(s)，可以得出

$$\det\begin{bmatrix} Q_f & 0\\ 0 & B_f\\ U_b & Y_b\end{bmatrix}=\det\begin{bmatrix} U_t & Q_{12} & 0 & 0\\ 0 & 0 & -Q_{12}' & U_m\\ -U_t & 0 & Y_{tt} & Y_{tl}\\ 0 & -U_m & Y_{lt} & Y_{ll}\end{bmatrix}$$

$$
=\det\begin{bmatrix} 0 & 0 & Y_{tt}+Q_{22}Y_{lt} & Y_{tl}+Q_{22}Y_{ll} \\ 0 & 0 & -Q'_{22} & U_m \\ -U_t & 0 & Y_{tt} & Y_{tl} \\ 0 & -U_m & Y_{lt} & Y_{ll} \end{bmatrix}
$$

$$
=\pm\det\begin{bmatrix} Y_{tt}+Q_{22}Y_{lt} & Y_{tl}+Q_{22}Y_{ll} \\ -Q'_{22} & U_m \end{bmatrix}
$$

$$
=\pm\det\begin{bmatrix} Y_{tt}+Q_{22}Y_{lt}+Y_{tl}Q'_{22}+Q_{22}Y_{ll}Q'_{22} & Y_{tl}+Q_{22}Y_{ll} \\ 0 & U_m \end{bmatrix}
$$

$$
=\pm\det(Y_{tt}+Q_{22}Y_{lt}+Y_{tl}Q'_{22}+Q_{22}Y_{ll}Q'_{22})
$$

$$
=\pm\det Q_f Y(s) Q'_f \tag{7.113}
$$

上式在利用定理2.9之后，$Q_f=[U_t\ Q_{22}]$，$B_f=[-Q'_{22}\ U_m]$，以及

$$
Y(s)=\begin{bmatrix} Y_{tt} & Y_{tl} \\ Y_{lt} & Y_{ll} \end{bmatrix} \tag{7.114}
$$

式(7.113)代入式(7.110)可得所要求的结论。

作为一个例子，计算图7.16(a)网络的节点导纳矩阵 $Y_n(s)$，$Y_n(s)$由下式给出：

$$
Y_n(s)=\begin{bmatrix} 3s+0.5 & -3s \\ 10-3s & 3s+1/s \end{bmatrix} \tag{7.115}
$$

得其行列式为

$$
\det Y_n(s)=(63s^2+6s+1)/2s \tag{7.116}
$$

把式(7.116)和式(7.108)相比较，可得出

$$
-\det H(s)=\det Z_{LMR}(s)\det Y_n(s) \tag{7.117}
$$

式中

$$
Z_{LMR}(s)=\begin{bmatrix} s & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{7.118}
$$

这就进一步证实了式(7.112)。

在确立了所要求的关系式(7.112)之后，现在可以应用第四章的结论，来确定网络N的复杂度或者上界。为此，设$\hat{Y}$是N的不定导纳矩阵，$G(\hat{Y})$是与定义4.3相应的$\hat{Y}$的伴随有向图，这不同于表示N的有向图G，如在第四章§6.2中所讨论的那样，如果认为一条无向边代表一对方向相反的有向边，在这一对边中每条有向边有关的权(导纳)与无向边的权相同，则所产生的$G(\hat{Y})$是一个混合图，这可以直接根据等效网络，只需在由原网络电阻、电容和自感组成的子网络上，叠加与单向元件相应的有向图，或者理想变压器和互感耦合线圈的伴随图得出。可以进一步认为，混合图$G(\hat{Y})$中的有向边称为有源边，而无向边称为无源边。

利用定理2.20和定理4.3，式(7.112)可以表示为

$$\det H(s) = \text{常数}\cdot s^{B_l}\cdot \det Y_n(s)$$

$$= \text{常数}\cdot s^{B_l}\sum_{t_k} f(t_k) \qquad (7.119)$$

式中$Y_n(s)$是N的节点导纳矩阵，B_l表示N中电感的数目，而t_k是$G(\hat{Y})$中以k为参考节点的有向树。注意到由于式(7.119)右边的k是任意的，可以灵活地选任一节点为有向树的参考节点。

因此，在$G(\hat{Y})$中有三种类型的边：

(i) 电感边，边的导纳具有$1/Ls$的形式，L是实系数。

(ii) 电容边：边的导纳具有Cs的形式，C是实系数。

(iii) 电阻边：边的导纳是实系数。

电感边是由自感和(或)受电感电流控制的受控电流源所形成；电容边是由电容和(或)受电容电流控制的受控电流源所形成；而电阻边是由电阻和(或)电压控制的电流源所形成，其控制参数是实常数或受电阻电流控制的受控电流源。

定义 7.5：C-割集和L-割集。

$G(\hat{Y})$的C-割集(L-割集)是仅由电容(电感)边所组成的割集。

定义 7.6：C-回路和L-回路。

$G(\hat{Y})$ 的C-回路（L-回路）是仅由电容（电感）边所组成的回路。

$G(\hat{Y})$的L-子图 $G_L(\hat{Y})$是由所有电感边组成的子图，亦即通过移去所有非电感边所得的子图。同样，定义$G(\hat{Y})$的C-子图$G_c(\hat{Y})$是由所有电容边组成的子图。因此，L-割集或C-回路是L-子图的割集或回路，但L-子图中的L-割集不一定是$G(\hat{Y})$中L-割集。用$G_L^*(\hat{Y})$表示从$G(\hat{Y})$中通过短接所有非电感边（不移去由此产生的自环）形成的有向图。用类似的方式，可以定义有向图$G_C^*(\hat{Y})$。

对于$G(\hat{Y})$的子图g，用r(g)和m(g)分别表示g的秩和零度。此外，用blg和bcg分别表示g的电感边和电容边的数目。对于$g=t_k$，blt_k表示有向树t_k的电感边的数目，在$g=G(\hat{Y})$的特殊情况下，写b_c、b_{cg}和b_L-b_{Lg}。

引理 7.1： 设g是连通图G的子图，则含于G的任一树中的g的最大边数由g的秩给出，而含于G的任一树中的g的最小边数是用从G中通过短接所有不含于g中的边所得的图的秩来给出的。

证明：这一结论对于有向图和无向图都有效，在习题3.43中，已指出一个子图，当且仅当它不含有任何回路，则它可以成为树的一部分。含于g的任一无回路的子图的最大边数是r(g)。因此，r(g)是含于G的任一树中的g的最大边数。

为了证明引理的第二部分，可以利用习题2.44，它指出一个子图当且仅当它不含有G的任一割集，则它可以成为补树的一部分。因此，含于G的任一树中的g的最小边等于含于g中G的线性独立割集的数目，每个割集仍然是在G中通过短接所有不含于g中的边所得图中的一个割集。因此，这样，线性独立割集的数目等于所产生图的秩，由此得出引理，引理证毕。

有了这些预备知识，现在可以进行推导确定复杂度或其上界的公式。首先研究RLC网络，因为对于这样的网络，公式是最最简单的。

6.2 RLC 网络

在N是 RLC 网络的情况下，$G(\hat{Y})$和N是同构的，而$G(Y)$的电感边、电容边和电阻边分别就是N的电感、电容和电阻，因此，可以任意交替使用$G(\hat{Y})$和N。当谈到N中的C-回路时，指的是仅由电容组成的回路，这也适用于所有其它类似名词。

定理 7.2： RCL 网络的复杂度等于电抗元件的数目减去线性独立L割集的数目和线性独立C回路的数目。

证明：可以写出

$$\det Y_n(s) = a_k s^k + a_{k-1} s^{k-1} + \cdots + a_0 + a_{-1} s^{-1} + \cdots + a_{-q} s^{-q} \tag{7.120}$$

式中$a_k \neq 0$和$a_{-q} \neq 0$，k和q是待确定的整数，根据式（7.19）和（7.120），显然，N的复杂度由下式给出

$$\sigma = k + q + (b_l - q) = k + b_l \tag{7.121}$$

因此只要确定k就行了，由于$\det Y_n(s)$等于所有树支导纳乘积之和，从而有

$$k = b_{ct} - b_{lt} \tag{7.122}$$

t是N的一个树，以使差值达到最大。现在可以证明在树t中有可能同时使电容数目达到最大值，而电感数目达到最小值。设t_1是G的含有最大电容数目的一个树，对于这些电容的子图用g_1表示，设t_2是含有最小电感数目的一个树，对应于这些电感的子图用g_2来表示。如果g_2是L子图中$\bar{q}_2$的互补，则补树t_2含有g_2。利用定理5.4，可以得出结论，存在N的一个树t。其中g_1和$\bar{q}_2$是t的子图。根据引理7.1，有$b_{ct} = r(N_c)$，及$b_{lt} = r(N_L^*)$，这里$N_c = G_c(\hat{Y})$，$N_L^* = G_L^*(\hat{Y})$。将这些关系式代入式（7.121）连同（7.122），可以得出

$$\begin{aligned} \sigma &= b_{ct} + b_l - b_{lt} = r(N_c) + b_l - r(N_L^*) \\ &= b_c - m(N_c) + b_l - r(N_L^*) \end{aligned} \tag{7.123}$$

可以观察到，在N_c中线性独立C回路的数目由于等于其零度

$m(N_L)$，与N中的相同，而在N_C^*中线性独立L割集的数目由于等于其秩$r(N_C^*)$亦与N中的相同，于是定理可以得出，证毕。

推论 7.1：RLC网络的非零自然频率的数目等于其复杂度减去线性独立L-回路的数目和线性独立C割集的数目。

证明：根据式(7.119)和(7.120)，显然自然频率为零的数目由$b_t - q$给出。如在定理7.2的证明中那样，有$q = b_t - b_{ct}$，t是N的使差值达最大的一个树，此外可以证明$b_{lt} = r(N_L)$和$b_{ct} = r(N_C^*)$，这里$N_L = G_L(\hat{Y})$和$N_C^* = G_C^*(\hat{Y})$(习题7.12)，这就导致

$$
\begin{aligned}
b_t - q &= b_t - b_{lt} + b_{ct} = b_t - r(N_L) + r(N_C^*) \\
&= m(N_L) + r(N_C^*)
\end{aligned} \tag{7.124}
$$

表明零自然频率的数目是由$m(N_L)$(它等于N的线性独立L回路的数目)加上$r(N_C^*)$(它等于N的线性独立C割集的数目)。推论证毕。

可以得出对于这个推论的另一种表示法，并表示如下：

推论 7.2：RLC网络的非零自然频率的数目由下式给出：

$$f = r(N_C) + r(N_L) - r(N_C^*) - r(N_L^*) \tag{7.125 a}$$

$$= m(N_C^*) + m(N_L^*) - m(N_C) - m(N_L) \tag{7.125 b}$$

$$= [m(N_L^*) - m(N_L)] + [r(N_C) - r(N_C^*)] \tag{7.125 c}$$

推论 7.3：LC网络的非零自然频率的数目由下式给出：

$$f = 2[m(N) - m(N_C) - m(N_L)] \tag{7.126}$$

在RLC网络不含有任何L回路和C回路的情况下，式(7.125b)可简化为$f = m(N_C^*) + m(N_L^*)$，GUILLEMIN[1931]给出了一种算法，公式(7.126)由REZA[1955]首先得出，他称f为动态独立回路数目。

在物理结构上，自然频率对应于围绕仅由电感所组成的回路中的恒定电流，或者是跨在仅由电容所组成割集上的恒定电压。这些恒定电流和恒定电压对在L回路中的电流或跨在C割集的电压，不会增加任何其它的代数约束关系，而仅与它们的变化率有关。例

如，对L-回路增加了一个如下形式的微分关系式

$$L_1\frac{di_1}{dt}+L_2\frac{di_2}{dt}+\cdots+L_k\frac{di_k}{dt}=0 \qquad (7.127)$$

对上式从0到t积分，得：

$$L_1i_1+L_2i_2+\cdots+L_ki_k=\text{常数} \qquad (7.128)$$

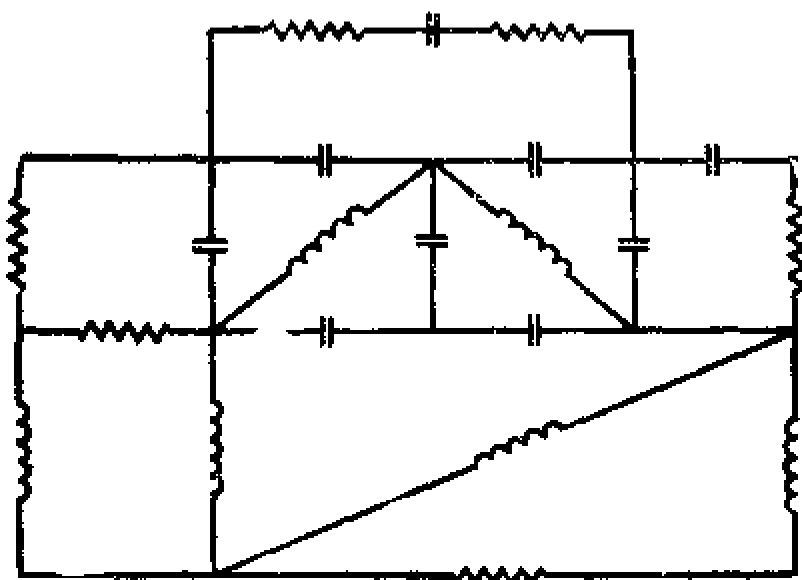


图 7.17 说明确定复杂度的RLC网络

似乎这也表示了电感电流上的一个约束关系，但是，右边的常数项是不确定的，对它限定需要一个独立关系。关于跨接于网络C-割集元件的电压也可以得出类似的论述。

用下面的例子来说明以上结论。

例 7.8：考虑图7.17的RLC网络，使用以上所定义的符号，可以得出

$$b_L=6 \qquad b_C=9 \qquad (7.129\,a)$$

$$r(N_C)=9-2=7, \qquad r(N_L)=6-1=5 \qquad (7.129\,b)$$

$$r(N_C^*)=3-1=2, \qquad r(N_L^*)=2-1=1 \qquad (7.129\,c)$$

$$m(N_C)=9-9+2=2, \qquad m(N_L)=6-6+1=1 \qquad (7.129\,d)$$

$$m(N_C^*)=9-3+1=7, \qquad m(N_L^*)=6-2+1=5 \qquad (7.129\,e)$$

于是可以得出

线性独立C-割集的数目 $=r(N_C^*)=2$ (7.130 a)

线性独立 L-割集的数目　$r(N_L^*)$　1　(7.130 b)

线性独立 C 回路的数目　$m(N_C)$　2　(7.130 c)

线性独立 L 回路的数目　$m(N_L)$　1　(7.130 d)

因此，RCL 网络的复杂度由下式给出：

$$\sigma = b_c + b_l - r(N_l^*) - m(N_C) = 9 + 6 - 1 - 2 = 12 \quad (7.131)$$

这就是可以对N给定的线性独立初始条件的最大数，或者等效地说，N的自然频率的总数，包括零频数和相重频率。根据推论 7.1，非零自然频率由下式给出：

$$f = \sigma - m(N_L) - r(N_C^*) = 12 - 1 - 2 = 9 \quad (7.132)$$

这也可以直接根据式(7.125)计算得出，请读者自行验证一下。

6.3　有源网络

根据式 (7.119)，显然有源网络N的复杂度等于电感的数目加上 $\det \mathbf{Y}_n(s)$中 s 的最高指数。但是，$\det \mathbf{Y}_n(s)$中 s 的最高指数不一定含于被称为正规有向树的 $G(\hat{Y})$的有向树 t_t中，使含于其中电容边数和电感边数之间的差达到最大。这是因为，不象 RLC 的情况，它在形成导纳乘积之后，与其它正规有向树可能会出现对消。新项不同于用在 RLC 网络的树之处，在于在同一有向树中不可能总是使电容边数达最大值，而电感边数达最小值。

定理 7.3：含有 B_l 个电感的有源网络N的复杂度 σ 的上界由下式给出：

$$\sigma \leqslant \sigma_{max} = B_l + b_{ct} - b_{lt} \quad (7.133)$$

t 是 $G(\hat{Y})$ 的正规有向树，其参考节点是任意的。当且仅当所有正规有向树导纳乘积之和为非零时，等式才成立。

如果公式(7.133)直接用N的子网络而不是 $G(\hat{Y})$的子网络来建立，可以更为方便，对此，定义如下。

定义 7.7：网络的无源树。

网络N的无源树是仅由N的电阻、电感和电容所组成的树。

定理 7.4：在由电阻、电感、电容和电流控制电流源（其控制参数是实常数）所组成的网络N中，设t是所选的N的无源树，使电容数和电感数之间的差值达到最大，则N的复杂度σ的上界由含于t中的电容数加上含于补树$\bar{t}$（N中t的互补）中的电感数给出，即

$$\sigma \leq \sigma_{max} = b_{ct} + b_{l\bar{t}} \tag{7.134}$$

证明：设$\hat{N}$是从N中通过变换所有电流控制电流源为等效的电压控制电流源所得的网络。为这样做，在$G(\hat{Y})$中引入有源电阻、电容或电感边，在$G(\hat{Y})$中设$\hat{t}_k$是使$b_c\hat{t}_k - b_l\hat{t}_k$差达最大值以及不会在$\det Y_n(s)$中产生完全对消的有向树(不一定是正规有向树)，我们的目的是证明

$$B = b_c\hat{t}_k - b_l\hat{t}_k \leq b_{ct} + b_{l\bar{t}} \tag{7.135}$$

对此，只要证实可以构造一个N的无源树$\hat{t}$，便具有如$\hat{t}_k$那样相同的指数s就足够了。如果t_k仅由无源边所组成，则N中其对应元件就是所要求的树$\hat{t}$。因此，假定$\hat{t}_k$至少含有一条有源边。如在习题7.13中所述，图4.38(b)的电压控制电流源，四条有源边中，至少有一条会出现在$\hat{t}_k$中而不会在$\det Y_n(s)$中引起对消。不失一般性，设(c, b)是$\hat{t}_k$中的这一有源边，为了利用习题7.24中所述的结论，可以进一步规定$t_k - (c\ b) = t_{za,kbd}$(参见定义4.12)，于是运算$\hat{t}_k \cup (a, b) - (c, b) = t'$，得出$G(\hat{Y})$的一个树(不一定是有向树)，这里(a, b)是对应于受控源的控制元件(电阻、电容或电感)的无源边。由于(a, b)和(c, b)的导纳仅相差一个乘积常数，则t'和$\hat{t}_k$具有相同指数s。如在t'中有其它的有源边，显然这一过程可以重复进行。因此，可以产生一个仅由无源边组成的$G(\hat{Y})$的树t''，其在N中的对应子网络是一个具有如$\hat{t}_k$那样相同指数s的树t。此外，有$b_{ct} = b_{ct''} = b_c\hat{t}_k$及$b_{l\bar{t}} \geq b_l\hat{t}_k$，将它们代入(7.135)中，以及利用$B = b_{l\bar{t}}$，便得出所要求的公式(7.134)，定理证毕。

以上定理可以推广到电压控制电流源的情况，事实上，按照如上所给的同一论证，可以证明如果N不含有仅由电感和受控电流源

所组成的任何割集，其中的一个电感电压是一控制元件，则式（7.134)仍然有效(习题7.27)。

作为一个例子,考虑如图7.18的网络N，很容易验证元件 R、C 和 L 构成N的唯一完全树，根据定理，其复杂度的上界由下式给出：

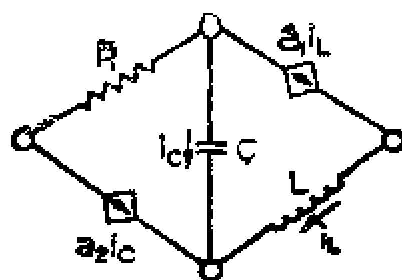


图 7.18 说明确定复杂度上界的有源网络

$$\sigma \le \sigma_{max} = 1 + 0 = 1 \tag{7.136}$$

可以证明，如果N是唯一解，则 $a_1 \neq 1$，$a_2 \neq -1$，以及 $\sigma = 1$（习题7.14)。

推论 7.4：含有回转器(晶体管或电子管)网络的复杂度不小于移去回转器(受控电流源)后网络(等效网络)的复杂度。

证明：通过划分根据不含有任何有源边的及至少含有一个有源边划分 $G(\hat{Y})$ 的有向树集，节点行列式可以置于两个和式中，每部分均为非负。利用这一点连同式(7.119)，推论立即可以得出，推导细节留作练习(习题7.15和7.16)。

§7. 结　束　语

我们以称为状态方程的一阶微分方程组形式，提出系统化建立网络方程的方法开始这一章的讨论，然后对于一般线性网络以标准形式导出状态方程的显式。对于显式的存在性，假定某些矩阵是非奇异的，由于它的通用性，显式是极其复杂的，而对于特定网络，利用在§2中概述的方法来导出所要求的状态方程通常比较简单。对于提出一般公式的目的是为表明状态方程的一般公式是有坚实基础的，并显示其推导过程可以利用数字计算机来完成，接着讨论状态方程的各种参数矩阵的物理意义。但是状态方程解没有讨论，它们可以在微分方程理论的任何教科书中找到（例如参见 CODDINGTON 和 LEVINSOW[1955]以及 PONTRYAGIN[1962])。

网络的复杂度是其状态空间的维数，是其动态独立状态变量的最小数，其瞬时值足以完全确定网络的瞬时状态，它也是网络的线性独立初始条件的最大数。在微分方程理论中，它是在网络方程一般解中出现的任意常数的数目，这些是叙述同一事物的不同方法。

对于由电阻、电感、电容和其控制参数是实常数的受控电流源所组成的网络来说，其复杂度的上界可以与网络的无源树相联系，使在无源树中电容的数目和电感数目之差达到最大值。一般来说，网络可以得出这一上界，在 RLC 网络中，其复杂度可以单独地由其拓扑结构来确定，它等于电抗元件数目减去线性独立 L 割集的数目和线性独立 C 回路的数目。

习　　题

7.1　确定图 7.19 网络的复杂度，然后导出它的状态方程。

7.2　在式(7.41)中证明 $Q_{lc}=0$ 和 $Q_{cr}=0$。

7.3　对于式(7.91 a)的转移导纳矩阵 Y_{ec} 和式(7.91 d)的转移阻抗矩阵 Z_{jl}，给出物理解释。

7.4　对于式(7.91 b)的电流转移矩阵 H_{e} 和式(7.91 c)的电压转移矩阵 H_{el}，给出物理解释。

7.5　假设有图 7.20 的网络，其中电阻 R_4 中电流和电阻 R_3 上电压选为输出变量，导出网络的状态方程和输出方程。

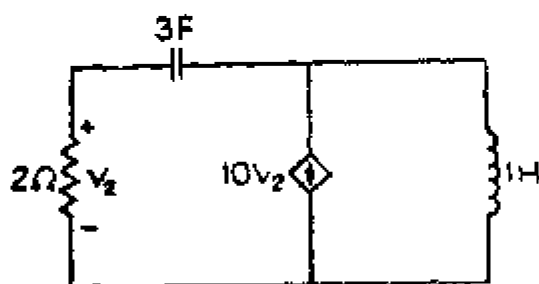


图 7.19　含有电压控制电流源的网络

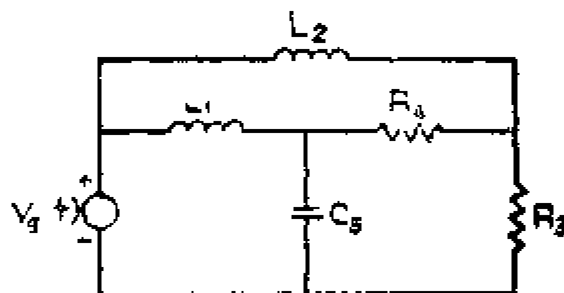


图 7.20　具有独立电压源的RLC网络

7.6 根据状态变量和电压源，表示图 7.20 网络的所有元件电压和电流。

7.7 对于图 7.21 网络选择一正规树，以及导出状态方程，此外，根据状态变量和电源，表示所有元件电压和电流。网络的复杂度是多少？确定所有自然频率。

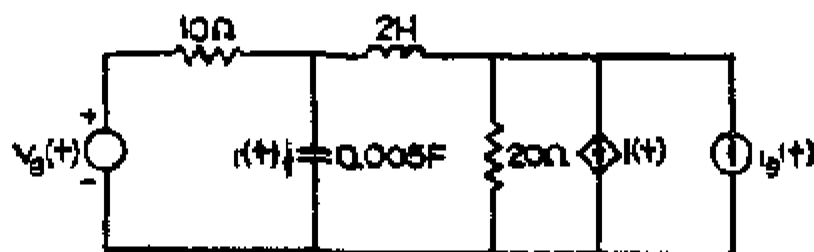


图 7.21 含有一个电流控制电流源和两个独立源的有源网络

7.8 证明

$$\begin{aligned}I_{c\bar{t}} = & -(C_{\bar{t}t}Q'_{cc}A_{11} + \dot{C}_{\bar{t}t}Q'_{cc})V_{ct} - C_{\bar{t}t}Q'_{cc}A_{12}I_{l\bar{l}} \\ & + (C_{\bar{t}t}Q'_{cc}B_{11} + \dot{C}_{\bar{t}t}Q'_{cc})V_{e} - (C_{\bar{t}t}Q'_{cc}B_{13} + C_{\bar{t}t}Q'_{ec})\dot{V}_{e} \\ & + C_{\bar{t}t}Q'_{cc}B_{12}I_{j}\end{aligned} \qquad (7.137)$$

7.9 利用式(7.85)以及式(7.101)和(7.137)，根据状态变量和电源变量，表示 I_{ct} 和 V_{cl}。

7.10 利用式(7.43a)和(7.43b)以及式(7.54)，(7.101)和(7.137)，根据状态变量和电源变量，表示 I_e 和 V_j。

7.11 根据习题 7.8～7.10 以及式(7.54)和(7.101)。如在式(7.3)中那样，证明网络的支路电流矢量和支路电压矢量可以用状态矢量和电源矢量来表示。

7.12 在 RLC 网络 N 中，假定 $\hat{t}$ 是树，使 $b_{ct}-b_{cl}$ 差最大，证明 $b_{ct}=r(N_1)$ 和 $b_{cl}=r(N_C^*)$。

7.13 参考图 4.38(b)，假定 T_{k_2} 是 $G(\hat{Y})$ 的有向树 t_k 的集合，其中每个树都含有四条有源边中的两条，证明

$$\sum_{t_k\in T_{k_2}} f(t_k) = 0 \qquad (7.138)$$

（参见 CHEN 1972 b]）。

7.14 证明如果 $a_1 \neq 1$ 和 $a_2 \neq 1$，则图 7.18 的网络具有唯一解。

7.15 参考图 4.38（b），以及利用式（4.186）和（4.189）中所定义的符号，证明节点行列式可以表示为

$$\det \mathbf{Y}_n(s) = V_k - V_d = V_d^0 + yW^0_{\cdot b} + yW^0_{ca,db} \qquad (7.139)$$

其中上标 0 表示从 $G(\hat{\mathbf{Y}})$ 中通过置 $y=0$ 所得的子图中求得的各种导纳乘积。利用式(7.139)以及式(7.140)，证明推论 7.4。

7.16 参考图 4.55（b），以及利用式(4.178)和(4.188)中所定义的符号，证明节点行列式可表示为

$$\det \mathbf{Y}_n(s) = V_k^1 + g^2 U_{a,b,c} \qquad (7.140)$$

式中 V_k^1 表示移去回转器的网络节点行列式。

7.17 应用公式（7.58），计算如图 7.20 所示的网络状态方程的参数矩阵，利用式(7.86)和(7.91)的多端口解释，证明结论。

7.18 对于图 7.21 网络，重复习题 7.17。

7.19 重复习题 7.5，但这次假定电容是具有 $C_5 = 1 + \frac{1}{4}\sin t$ 的时变电容。

7.20 短路图 7.17 网络顶部的两个电阻，确定所产生的网络的复杂度，以及非零自然频率的数目。

7.21 网络的自然频率习惯地定义为回路阻抗矩阵或节点导纳矩阵的行列式的零值，这个定义涉及某些非单值性和不相容性，证明这些非单值性和不相容性。

7.22 重复习题 7.5，但这次电容 C_6 跨接在电感 L_1 两端。

7.23 在图 7.17 中，用两个电感替换网络顶部的两个电阻，确定所产生的网络的复杂度和非零自然频率的数目。

7.24 证明如果 T_{k2} 用 T_{k1} {t_k：四条有源边的一条在 t_k 中，使得如果(c，a)在 t_k 中，则 $t_k - (c, a) \cup t_{ab,kad}$；如果（d，b）在 t_k 中，则 $t_k - (d, b) \cup t_{da,kbc}$，如果(c，b)在 t_k 中，则 $t_k - (c,$

b) $\fallingdotseq t_{ca,kbd}$；以及如果(d, a)在 t_k 中，则 t_k (d, a)$\fallingdotseq t_{db,kca}$}来替换，式(7.138)满足。

7.25 证明电压源的导数当存在 C 回路时才出现在状态方程中，以及电流的导数当存在只由电感和(或)独立电流源组成的割集时才出现在状态方程中。

7.26 对于具有独立源的 RLC 网络，简化公式(7.58)～(7.60)。

7.27 证明如果N不含有只由电感和控制电流源组成的任何割集，使得一个电感的电压是控制元件，则公式(7.134)仍然有效。

参 考 文 献

van Aardenne-Ehrenfest, T and N G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, Simon Stevin 28(1951) 203 217.

Aitken, A C, Determinants and Matrices (Interscience, New York) 9 th ed., 1952.

Ash, R. B Topology and the solution of linear systems, J Franklin Inst 268 (1959) 453 463.

Avondo-Bodino, G, Economic Applications of the Theory of Graphs (Gordon and Breach, New York), 1962.

Ayoub, J N and I T Frisch, Degree realization of undirected graphs in reduced form J Franklin Inst 289(1970)303 312

Babler, F, Uber eine spezielle Klasse Eulerscher Graphen, Comment Math. Helv 27(1953) 81 100.

Balabanian, N and T A Bickart, Electrical Network Theory (Wiley, N Y.), *1969*.

Barabaschi, S. and E. Gatti, Modern methods of analysis for active electrical networks with particular regard to feedback systems, Part I, Energia Nucleare 2(1954) 105-119.

Baron, G and W Imrich On the maximal distance of spanning trees, J Combinatorial Theory 5(1968) 378 385.

Bashkow, T R, The A matrix, new network description, IRE trans. Circuit Theory CT 4 (1957) 117 119.

Behzad M and G Chartrand, No graph is perfect, Amer Math. Monthly 74 (1967) 962 963

Beineke, L W. and F. Harary, Local restrictions for various classes of directed graphs, J London Math Soc 40(1965) 87 95.

Berge, C, Theory of Graphs and Its Applications (Methuen, London), 1962.

Berger, I and A Nathan, The algebra of sets of trees, k-trees, and other configurations IEEE Trans, Circuit Theory CT-15(1968) 221 228.

Bers A, The degrees of freedom in RLC networks, IRE Trans. Circuit Theory CT 6(1959)91 95.

Boisvert, M and I P A. Robichaud, Direct analysis of electrical networks, Rapport de Recherches No 9, Dept de Genie Electrique, Universite Laval Quebec, Canada, October 1[illegible]

Bott, R and J P Mayberry, Matrices and trees in. O Morgenstern (ed), Economic Activity Analysis (Wiley, New York), 1954, 391 400.

[illegible]iger, G. and H. Harders, Note on a problem by S. L. Hakimi concerning planar graphs without parallel elements, J. Soc. Indust. Appl. Math. 12 (1961) 838-839.

Branin Jr., F. H., The relation between Kron's method and the classical methods of network analysis, Matrix Tensor Quart. 13 (1962) 69-105.

Brooks, R. L., C. A. B. Smith, A. H. Stone and W. T. Tutte, The dissection of rectangles into squares, Duke Math. J. 7 (1940) 312-340.

Brown, D. P., Derivative explicit differential equations for RLC graphs, J. Franklin Inst. 275 (1963), 503-514.

Brown, D. P., Topological properties of resistance matrices, SIAM J. Appl. Math. 16(1968) 387-394.

Brown, D. P. and A. Budner, A note on planar graphs, J. Franklin Inst. 280 (1965) 222-230.

Brownell, R. A., Growing the trees of a graph, Proc. IEEE 56(1968) 1121-1123.

Brownlee, A., Directed graph realization of degree pairs, Amer. Math. Monthly 75(1968) 36-38.

Bryant, P. R., A topological investigation of network determinants, Proc. IEE (London) 106C(1959a) 16-22.

Bryant, P. R., The order of complexity of electrical networks, Proc. IEE (London) 106C (1959b) 174-188.

Bryant, P. R., Problems in electrical network theory, Ph. D. dissertation, Cambridge University, Cambridge(1959c)

Bryant, P. R., The degrees of freedom in RLC networks, IRE Trans. Circuit Theory CT-7 (1960) 173-174 and 357.

Bryant, P. R., The algebra and topology of electrical networks, Proc. IEE (London) 108C (1961) 215-229.

Bryant, P. R. The explicit form of Bashkow's A matrix, IRE Trans. Circuit Theory CT-9 (1962) 303-306.

Bryant, P. R. and J. Tow, The A matrix of linear passive reciprocal networks, J. Franklin Inst. 293(1972)401-419.

Busacker, R. G. and T. L. Saaty, Finite Graphs and Networks: An Introduction with Applications (McGraw-Hill, New York), 1965.

Carlin, H. J. and A. B. Giordano, Network Theory (Prentice Hall, N. J.), 1964.

Cayley, A., A theorem on trees, Quart. J. Math. 23(1889) 376-378.

Cayley, A., The Collected Papers of A. Cayley, Cambridge 13(1897) 26-28.

Cederbaum, I., Invariance and mutual relations of electrical network determinants, J. Math. Phys. 35(1956) 236-244.

Chen, W. K., The inversion of matrices by flow graphs, J. Soc. Indust. Appl. Math. 12(1964a) 676-685

Chen, W. K., On signal flow graphs, Proc. IEEE 52 (1964b) 967.

Chen, W. K., Flow graphs: some properties and methods of simplification,

IEEE Trans Circuit Theory CT-12 (1965a) 128-130.
Chen, W K, On the modifications of flow graphs, J Soc Indust. Appl Math 13(1965b) 493-505.
Chen W K, Matrix graphs and bipartite graphs, IEEE Trans Circuit Theory CT 12(1965c) 268 269.
Chen W K, Topological analysis for active networks, IEEE Trans Circuit Theory CT 12 (1965d) 85 91.
Chen, W. K, On directed trees and directed k trees of a digraph and their generation, SIAM J. Appl Math. 14(1966a) 550 560.
Chen, W K, On the realization of directed trees and directed 2 trees, IEEE Transt Circuit Theory CT-13 (1966b) 230 232.
Chen, W K, Note on topological analysis for active networks IEEE Trans Circuit Theory CT 13(1966c) 438 439
Chen, W K, A generalization of the equicofactor matrix, IEEE Trans Circuit Theory CT 13 (1966d) 440 442.
Chen W K. On the realization of a (p, s) digraph with prescribed degrees J Franklin Inst 281(1966e) 406 422.
Chen, W. K, On directed graph solutions of linear algebraic equations SIAM Rev 9(1967a) 692 707.
Chen, W K, Unified theory on topological analysis of linear systems, Proc IEE (London) 114(1967b) 1630 1636.
Chen, W K, Hamilton circuits in directed tree graphs, IEEE Trans Circuit Theory CT 14 (1967c) 231 233.
Chen, W. K, Iterative procedure for generating trees and directed trees Electronics Letters 4 (1968a) 516 518
Chen, W K, On unisignants and their evaluation, SIAM J Appl Math 16 (1968b) 603 619.
Chen, W K, A physical interpretation of the multiple node removal algorithm of a flow graph, Proc IEEE 57(1969a) 1691-1692.
Chen, W K, Conversion of an arbitrary node into a source node in a flow graph, Electronics Letters 5(1969b) 338 339.
Chen, W K., Modification of topological formulas for active two port networks, Proc IEEE 57(1969c) 2166 2167.
Chen, W K On generation of trees without duplications, Proc IEEE 57 (1969d) 1292 1293
Chen, W K. Generation of trees and cotrees of a graph by decomposition, Proc IEE (London) 116 (1969e) 1639 1643.
Chen. W K, Computer generation of trees and cotrees in a cascade of multiterminal networks, IEEE Trans Circuit Theory CT-16 (1969f) 518 526
Chen, W K, Unified theory on the generation of trees of a graph Part I The Wang algebra formulation, Int. J Electronics 27 (1969g) 101 117.
Chen, W. K, Unified theory on the generation of trees of a graph Part II

The matrix formulation, Int J Electronics 27 (1969 f) 319 336.

Chen W K, Graph theoretic considerations on the invariance and mutual relations of the determinants of the generalized network matrices and their generalized cofactors, Quart J Math Oxford(2), 21(1970a) 459-479

Chen, W K, On vector spaces associated with a graph, Proc. 13 th Midwest Symposium on Circuit Theory, University of Minnesota, Minneapolis, Minnesota, 1970b, XI 2.1-XI 2 1)

Chen, W K. On the nonsingular submatrices of the incidence matrix of agraph over the real field J. Franklin Inst. 289 (1970c) 155-166.

Chen, W K., On vector spaces associated with a graph, SIAM J Appl Math 20 (1971a) 526 529.

Chen, W K., On d-invariant transformations of (p,s) digraphs, J. Franklin Inst 291 (1971 b) 89-100.

Chen W K, Unified theory on the generation of trees of a graph Part III Decomposition and elementary transformations Int J Electronics 31(1971c) 301 319.

Chen W K, Topological formulations and the order of complexity of active networks A unified survey, Networks 2(1972a) 237 260.

Chen, W K, Characterizations of complete directed trees and two trees, IEEE Trans Circuit Theory CT-19 (1972b) 241-247.

Chen, W K, Codifying trees and multitrees of a complete graph, J. Franklin Inst. 293(1972c) 11 23.

Chen, W K, On matrices and composite graphs of active networks, IEEE Trans Circuit Theory CT 19 (1972d) 510 511.

Chen, W. K. On equivalence of realizability conditions of a degree sequence. IEEE Trans Circuit Theory CT 20(1973) 230 232.

Chen, W. K and F N T Chan, On the unique solvability of linear active networks, IEEE Trans Circuits Systems CAS 21(1974) 26 35.

Chen, W. K and I C Goyal, Tables of essential complementary partitions, *IEEE Trans. Circuit Theory CT 18 (1971) 562 563.*

Chen W K. and H C Li, Computer generation of directed trees and complete trees, Int J Electronics 34(1973) 1 21.

Chen, W K. and S K. Mark, On the algebraic relationships of trees, co-trees, circuits, and cutsets of a graph, IEEE Trans Circuit Theory CT-16(1969) 176-184.

Chow, Y and E. Cassignol, Linear Signal Flow Graphs and Applications (Wiley, New York), 1962.

Clarke, L E, On Cayley's formula for countingtrees, J. London Math. Soc 33(1958) 471 474.

Coates C L, General topological formulas for linear network functions, IRE Trans Circuit Theory CT 5 (1958) 30 42.

Coates C. L, Flow graph solutions of linear algebraic equations, IRE Trans

Circuit Theory CT 6 (1959) 170 187.

Coddington, E. A and N. Levinson, Theory of Ordinary Differential Equations (McGraw-Hill, New York), 1955

Copi, I M , Matrix development of the calculus of relations, J. Symbolic Logic 13 (1958) 193-203.

Cummins, R L., Hamilton circuits in tree graphs, IEEE Trans Circuit Theory CT-13 (1966) 82 90.

Dervisoglu, A , Bashkow's, "A matrix for active RLC networks" IEEE Trans Circuit Theory CT 11 (1964) 404 406.

Desoer, C A , The optimum formula for the gain of a flow graph or a simple derivation of Coates' formula, Proc IRE 48 (1960) 883 889

Dijkstra, E W , Some theorems on spanning subtrees of a graph Indag Math 22(1960) 196 199.

Doyle, T C , Topological and dynamical invariant theory of an electrical network, J. Math Phys 34(1955) 81 94.

Duffin, R. J , An analysis of the Wang algebra of networks, Trans. Amer Math. Soc 93 (1959) 114 131.

Eckmann, B., Harmonische Funktionen und Randwert Aufgaben in einem Komplex, Comm Math Helvetici 17(1944 1945) 240 255.

Edmonds, J , Existence of k edge connected ordinary graphs with prescribed degrees, J Res Natl. Bur. Stand 68 B (1964) 73-74.

Erdös, P. and T *Gallai, Grafok előírt fokú pontokkal*, Mat. Lapok 11(1960) 264-274.

Euler, L. Solutio problematis ad geometriam situs pertinentis, Comment Academiae Sci. I petropolitanae 8(1736) 128 140.

Fettweis, A , On the algebraic derivation of the state equations, IEEE Trans. Circuit Theory CT-16 (1969) 171-175.

Feussner, W., Uber Stromverzweigung in Netzförmigen Leitern Ann Phys , 4 th series, 9 (1902)1304-1329

Feussner, W , Zur Berechnung der Stromstarke in Netzförmigen Leitern, Ann Phys , 4 th series, 15 (1904) 385 39..

Flament, C , Applications of Graph Theory to Group Structure (Prentice Hall, N J.) 1963.

Ford Jr , L R and D R Fulkerson, Flows in Networks (Princeton University Press, N. J), 1962.

Franklin, P , The electric currents in a network, J Math. Phys 4(1925) 97 102.

Fulkerson, D R , *Zero-one matrices with zero trace, Pacific J. Math* 10 (1960) 831 836.

Fulkerson, D R , A J Hoffman and M H McAndrew, Some properties of graphs with multiple edges Can J Math 17(1965) 166-177.

Gale, D , A theorem on flows in networks, Pacific J Math 7(1957) 1073-1082.

Gardner, M. F. and J. L. Barnes, Transients in Linear Systems (Wiley, New York), 1945.

Gould, R., Graphs and vector spaces, J. Math. Phys. 37(1958) 193 214.

Guillemin, E. A., Communication Networks (Wiley, New York) 1931, vol. 1.

Hakimi, S. L., On the realizability of a set of trees, IRE Trans. Circuit Theory CT 8 (1961) 11-17.

Hakimi, S. L., On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph I, J. Soc. Indust. Appl. Math. 10(1962) 496 506.

Hakimi, S. L., On realizability of a set of integers as degrees of the vertices of a linear graph II. Uniqueness, J. Soc. Indust. Appl. Math. 11 (1963) 135 147.

Hakimi, S. L., On the degrees of the vertices of a directed graph, J. Franklin Inst. 279(1965) 290 308.

Hakimi, S. L., On the existence of graphs with prescribed degrees and connectivity, SIAM J. Appl. Math. 26(1974) 154 164.

Hakimi, S. L. and S. S. Yau, Distance matrix of a graph and its realizability, Quart. Appl. Math. 22 (1964) 305 317.

Harary, F., A graph *theoretic method for the complete reduction of a matrix* with a view toward finding its eigenvalues, J. Math. and Phys. 38(1959) 104 111.

Harary, F., The determinant of the adjacency matrix of a graph, SIAM Rev. 4 (1962a) 202 210.

Harary, F., A graph theoretic approach to matrix inversion by partitioning, Numer. Math. 4 (1962b) 128 135.

Harary, F. (ed.), Graph Theory and Theoretical Physics (Academic Press, New York), 1967.

Harary, F., Graph Theory (Addison Wesley, Mass.), 1969.

Harary, F. and R. Z. Norman, Graph Theory as a Mathematical Model in Social Science (Institute for Social Research, University of Michigan, Ann Arbor), 1953.

Havel, V., Poznámka o existenci konečných grafů, Časopis Pěst. Mat. 80 (1955) 477 480.

Heawood, P. J., Map colour theorems, Quart. J. Math. 24(1890) 332 338.

Hohn, F. E. and L. Schissler, Boolean matrices and the design of combinational relay switching circuits, Bell System Tech. J. 34 (1955) 177 202.

Hohn, F. E., S. Seshu and D. D. Aufenkamp, The theory of nets, IRE Trans. Electronic Computers EC 6(1957) 154-161.

Holzmann, C. A. and F. Harary, On the tree graph of a matroid, SIAM J. Appl. Math. 22(1972) 187 193.

Hoskins, R. F., Signal flow graph analysis and feedback theory, Proc. IEE (London) 108C (1960) 12 19.

Hoskins, R. F., Flow graphs, signal flow graphs, and graph determinants, Proc. IEE (London) 109C (1961) 263 269.

Ingram, W. H. and C. M. Cramlet, On the foundations of electrical network theory, J. Math. Phys. 23 (1944) 134-155.

Jeans, J. H., The Mathematical Theory of Electricity and Magnetism (Cambridge University Press, England), 1925.

Kac, M. and J. C. Ward, A combinatorial solution of the 2 dimensional Ising model, Phys. Rev. 88 (1952) 1332 1337.

Kamae, T. The existence of a Hamilton circuit in a tree graph, IEEE Trans. Circuit Theory CT 14 (1967a) 279 283.

Kamae, T. A graph theoretical proof of an adjacency property of major submatrices, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967b) 1390 1399.

Kaufmann, A., Graphs, Dynamic Programming, and Finite Games (Academic Press, N. Y.), 1967.

Kirchhoff, G., Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchungen der linearen Verteilung galvanischer Ströme geführt wird, Poggendorf Ann. Phys. 72 (1847) 497 508.

Kishi, G. and Kajitani Y. On Hamilton circuits in tree graphs, IEEE Trans. Circuit Theory CT 15 (1968) 42 50

Kleitman, D. J., Minimal number of multiple edges in realization of an incidence sequence without loops, SIAM J. Appl. Math. 18 (1970) 25 28.

König, D., Über Graphen und ihre Anwendung auf Determinantentheorie und Mengenlehre, Math. Ann. 77 (1916) 453 465.

König, D., Theorie der endlichen und unendlichen Graphen (Chelsea, New York), 1950.

Kotzig, A., On decomposition of a tree into the minimal number of paths, Matematický časopis 17 (1967) 76-78

Kron, G., Tensor Analysis of Networks (Wiley, New York), 1939, 102 104.

Ku, Y. H., Extension of Maxwell's rule for analyzing electrical networks Science Report of National Tsing Hua University, Series A, 1 (1932) No. 6.

Ku, Y. H., Resume of Maxwell's and Kirchhoff's rules for network analysis, *J. Franklin Inst.* 253 (1952) 211 224.

Kuh, E. S. and R. A. Rohrer, The state variable approach to network analysis, Proc. IEEE 53 (1965) 672 686.

Kuh, E. S., D. M. Layton and J. Tow, Network analysis and synthesis via state variables, in Network and Switching Theory, G. Biorci (ed.) (Academic Press, New York), pp. 135 155, 1968.

Kuratowski, K., Sur le problème des courbes gauches en topologie, Fund. Math. 15 16 (1930) 271 283.

Lempel A. A note on orientation of graphs, Amer. Math. Monthly 75 (1968) 865 867.

Li, H. C., Computer aided enumeration of trees, M. S. Thesis Dept. of Elec. Engrg., Ohio Univ., Athens Ohio, March 1971.

Lorens, C. S. Flowgraphs (McGraw Hill, New York), 1964.

Lovász, L., On decomposition of graphs, Studia Sci. Math. Hungar. 1 (1966) 237-238.

Luce, R. D. and A. D. Perry, A method of matrix analysis of group structure, Psychometrika 14 (1949) 95-116.

Maclane, S. and G. Birkhoff, Algebra (Macmillan, New York), 1967.

Malik, N. R. and H. W. Hale, *Equations for active networks: existence of unique solutions*, IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) 37-43.

Mark, S. K., On the order of complexity of active electrical networks, Ph. D. dissertation, Ohio University, Athens, June 1971.

Mason, S. J., Feedback theory-some properties of signal flow graphs, Proc. IRE 41 (1953) 1144-1156.

Mason, S. J., Feedback theory-further properties of signal flow graphs, Proc. IRE 44 (1956) 920-926.

Mason, S. J., Topological analysis of linear nonreciprocal networks, Proc. IRE 45 (1957) 829-838.

Mason, S. J. and H. J. Zimmermann, Electronic Circuits, Signals, and Systems (Wiley, New York), 1960, chs. 4 and 5.

Maxwell, J. C., Electricity and Magnetism (Clarendon Press, Oxford) 1892, ch. 6 and appendix.

Mayeda, W., Topological formulas for nonreciprocal networks and networks with transformers, Proc. Natl. Electronics Conf. 14 (1958) 631-643.

Mayeda, W. and S. Seshu, *Topological formulas for network functions*, Engineering Experiment Station Bulletin 446, University of Illinois, Urbana, 1957.

Mayeda, W. and S. Seshu, Generation of trees without duplications, IEEE Trans. Circuit Theory CT-12 (1965) 181-185.

Mayeda, W., S. L. Hakimi, W. K. Chen and N. Deo, Generation of complete trees, IEEE Trans. Circuit Theory CT-15 (1968) 101-105.

McClenahan, J. O. and S.P. Chan, Computer analysis of general linear networks using digraphs, Int. J. Electronics 33 (1972) 153-191.

McIlroy, M. D., Generator of spanning trees, Comm. Assoc. Computing Machinery 12 (1969) 511, Algorithm 354.

Menon, V. V., On the existence of trees with given degrees, Sankhyā, Series A, 26 (1964) 63-68.

Milić, M. M., General passive networks-solvability, degeneracies, and order of complexity, IEEE Trans. Circuits Systems CAS-21 (1974) 177-183.

Mowshowitz, A., The characteristic polynomial of a graph, J. Combinatorial Theory 12 (B) (1972) 177-193.

Nathan, A., A proof of the topological rules of signal flow-graph analysis, Proc. IEE (London) 109C (1961) 83-85.

Nathan, A., A proof of the generalized topological Kirchhoff's rules, Proc. IEE (London) 109C (1962) 45-50.

Nathan, A., Topological rules for linear networks, IEEE Trans. Circuit Theory

CT 12 (1965) 344-358.

Nerode, A. and H. Shank, An algebraic proof of Kirchhoff's network theorem, Amer. Math. Monthly 68 (1961) 244-247.

Neville, E. H., The codifying of tree-structure, Proc. Cambridge Philos. Soc. 49 (1953) Part 3, 381-385.

Numata, J. and M. Iri, Mixed type topological formulas for general linear networks, IEEE Trans. Circuit Theory CT-20 (1973) 488-494.

Ohm, G. S., The Galvanic Circuit Investigated Mathematically (Original German edition Berlin, 1827); translation by W. Francis (Van Nostrand, 2nd edition, 1905).

Okada, S., On node and mesh determinants, Proc. IRE 43 (1955) 1527.

Ore, O., Theory of Graphs (American Math. Soc., R. I.), 1962; Colloq. Publ. ■■.

Ore, O. and J. Stemple, Numerical calculations on the four-color problem, J. Combinatorial Theory 8 (1970) 65-78.

Owens, A. B., On determining the minimum number of multiple edges for an incidence sequence, SIAM J. Appl. Math 18 (1970) 238-240.

Owens, A. B., On the planarity of regular incidence sequences, J. Combinatorial Theory 11 (1971) 201-212.

Owens, A. B. and H. M. Trent, On determining minimal singularities for the realizations of an incidence sequence, SIAM J. Appl. Math. 15 (1967) *406-418*.

Paul Jr., A. J., Generation of directed trees and 2-trees without duplication, IEEE Trans. Circuit Theory CT-14 (1967) 354-356.

Peikari, B., Fundamentals of Network Analysis and Synthesis (Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J.) 1974.

Percival, W. S., The solution of passive electrical networks by means of mathematical trees, Proc. IEE (London) 100C (1953) 143-150.

Percival, W. S., Improved matrix and determinant methods for solving networks, Proc. IEE (London) 101 (1954) Part IV, 258-265.

Percival, W. S., The graphs of active networks, Proc. IEE (London) 102C (1955) 270-278.

Pereira, J. M. S. S., A note on the tree realizability of a distance matrix, J. Combinatorial Theory 6 (1969) 303-310.

Pólya, G. and G. Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, vols 19 and 20 (Springer-Verlag, Berlin), 1945, p. 98.

Ponstein, J., Matrix description of networks, J. Soc. Indust. Appl. Math. 9 (1961) 233-258.

Ponstein, J., Self avoiding paths and the adjacency matrix of a graph, SIAM J. Appl. Math. 14 (1966) 600-609.

Pontryagin, L. S., Ordinary Differential Equations (Addison Wesley, Reading, Mass.) 1962.

Purslow, E. J. and R. Spence, Order of complexity of active networks, Proc

IEE (London), 114 Pt 2 (1967) 195 198.

Reed, M B, Foundation for Electric Network Theory (Prentice Hall, N J), 1961.

Reza, F M, Order of complexity and minimal structures in network analysis, Proc. Symposium on Circuit Analysis, University of Illinois, Urbana Illinois, 1955, 7.1 7.33.

Riegle, D E and P M Lin, Matrix signal flow graphs and an optimum topological method for evaluating their gains, IEEE Trans. Circuit Theory *CT-19 (1972) 427 436*

Robichaud, L. P. A, M. Boisvert and J Robert, Signal Flow Graphs and Applications (Prentice Hall, N J), 1962.

Rohrer, R. A, Circuit Theory, An Introduction to the State Variable Approach (McGraw-Hill, New York) 1970.

Roth, J P, An application of algebraic topology to numerical analysis: on the existence of a solution to the network problem, Proc Natl Acad Sci. U S 41 (1955) 518 521.

Roth, J P, An application of algebraic topology Kron's method of tearing, Quart Appl Math 17 (1959) 1 24.

Ryser, H J, Combinatorial properties of matrices of zeros and ones Can J Math. 9 (1957) 371 377.

Saltzer C, The second fundamental theorem of electrical networks, Quart Appl Math 11 (1953) 119 123.

Senior, J K., Unimerism, J Chem Phys 19 (1951a) 865 873.

Senior, J. K, Partitions and their representative graphs, Amer J Math 73 (1951b) 663 689.

Seshu, S, The mesh counterpart of Shekel's theorem, Proc. IRE 43 (1955) 342.

Seshu S. and N. Balabanian, Linear Network Analysis (Wiley, New York), 1959

Seshu, S and M B Reed, Singular transformations in network theory, Proc Natl Electronics Conf 11 (1955) 531 543

Seshu, S and M B Reed, On the cut sets of electrical networks, Proc 2nd Midwest Symposium on Circuit Theory, Michigan State University, East Lansing, Michigan, 1956, 1.1 1.13.

Seshu, S, and M B Reed, Linear Graphs and Electrical Networks (Addison-Wesley, Mass), 1961.

Seshu, S and R Waxman, Fault isolation in conventional linear systems-A feasibility study, IEEE Trans Reliability R-15 (1966) 11 16.

Shannon, C E, The theory and design of linear differential equation machines, OSRD Rept. 411, Sec D-2 (Fire Control) of the U. S National Defense *Research Committee, January 1942.*

Sharpe G. E. and B Spain, On the solution of networks by means of the equic factor matrix, IRE Trans Circuit Theory CT-7 (1960) 230 239.

Shekel, J, Two network theorems concerning change of voltage reference

terminal Proc IRE 42 (1954) 1127.
Shen, D W C, Generalised star and mesh transformations, Phil Mag., Series 7, 38 (1947) 267 275.
Shriver, B, P J Eberlein and R D Dixon, Permanent function of a square matrix I and II, Comm Assoc Computing Machinery 12 (1969) 634, Algorithm 361.
Slepian, P, Mathematical Foundations of Network Analysis (Springer-Verlag, New York) 1968, p 46 and pp 177 186.
Sylvester, J J, On the change of systems of independent variables, Quart J Pure Appl Math 1 (1855) 42 56.
Talbot, A, Topological analysis of general linear networks, IEEE Trans Circuit Theory CT-12 (1965) 170-180.
Talbot, A, Topological analysis for active networks, IEEE Trans Circuit Theory CT 13 (1966) 111 112.
Tellegen, B D H, A general network theorem, with applications, Philips Res. Rept 7 (1952) 259 269.
Ting, S L, On the general properties of electric network determinants and the rules for finding the denominator and the numerators, Chinese J Phys. 1 (1935) 18 40.
Tow, J, Order of complexity of linear active networks, Proc IEE (London) 115 Pt. 2 (1968) 1259 1262.
Trent, H M, Isomorphisms between oriented linear graphs and lumped physical systems, J Acoust. Soc. Amer. 27 (1955) 500 527.
Truxal, JG, Automatic Feedback Control System Synthesis (McGraw Hill, New York), 1955.
Tsai, C T., Short cut methods for expanding the determinants involved in network problems, Chinese J. Phys. 3 (1939) 148 181.
Tsang, N F., On electrical network determinants, J Math Phys 33 (1954) 185 193.
Tutte, W T, The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, Proc Cambridge Philos Soc. 44 (1948) 463 -482.
Tutte, W T, The 1 factors of oriented graphs, Proc Amer Math Soc. 4 (1953) 922 931.
Tutte, W T, A homotopy theorem for matroids, Trans Amer Math Soc. 88 (1958) 144 174.
Tutte, W T, Matroids and graphs, Trans Amer Math Soc 90 (1959) 527 552.
Veblen, O, Analysis Situs (Amer Math Soc, R I.) 2nd ed, 1931; Colloq, Publ 5.
Veblen, O and P Franklin, On matrices whose elements are integers, Ann. Math 23 (1921) 1 15
Walther, H, Uber die Nichtexistenz eines Knotenpunktes, durch den alle langsten Wege eines Graphen gehen, J Combinatorial Theory 6 (1969)

1-6.

Wang, K. T., On a new method for the analysis of electric networks, Natl Res. Inst. Engrg. Academia Sinica Memoir 2 (1934) 1 11.

Watanabe H., A computational method for network topology, IRE Trans. Circuit Theory CT 7 (1960) 296 302.

Weinberg, L., Number of trees in a graph, Proc. IRE 46 (1958) 1954 1955.

Weyl, H., Repartition de corriente et uno red conductora, Revista matematica, HispanoAmericana 5 (1923) 153-164.

Whitney, H., Planar graphs, Fund. Math. 21 (1933) 73 84.

Whitney, H., On the abstract properties of linear dependence, Amer. J. Math. 57 (1935) 509 533.

有关图论及其应用的其它书籍

Alavi, Y., D. R. Lick and A. T. White (eds.), Graph Theory and Applications (Springer, Berlin) 1972.

Anderson, S., Graph Theory and Finite Combinatorics (Markham, Chicago) 1970.

Bari, R. A. and F. Harary (eds.), Graphs and Combinatorics (Springer, Berlin) 1974.

Beckenbach, E. F. (ed.), Applied Combinatorial Mathematics (Wiley, New York), 1964.

Bellman, R. K. L. Cooke and J. A. Lockett, Algorithms, Graphs, and Computers (Academic Press, New York) 1970.

Berge, C., Graphs and Hypergraphs (North Holland, Amsterdam) 1973.

Biggs, N., Algebraic Graph Theory (Cambridge University Press, London), 1974.

Bose, R. C. and T. A. Dowling (eds.) Combinatorial Mathematics and Its Applications (University of North Carolina Press, North Carolina), 1969.

Bruter, C. P. (ed.) Théorie des Matroïdes (Springer, Berlin) 1971.

Capobianco, M., J. B. Frechen and M. Krolik (eds.), Recent Trends in Graph Theory (Springer, Berlin), 1971.

Chan, S. P., Introductory Topological Analysis of Electrical Networks (Holt, Rinehart and Winston, New York), 1969.

Chan, S. P., W. K. Chen, P. M. Lin, W. Mayeda and B. R. Myers, Network Topology and Its Engineering Applications (National Taiwan University Press, Taipei) 1975.

Chartrand, G. and M. Behzad, Introduction to the Theory of Graphs (Allyn and Bacon, Boston, Mass.), 1971.

Chartrand, G. and S. F. Kapoor (eds.), The Many Facets of Graph Theory (Springer, Berlin), 1969.

Deo, N., Graph Theory with Applications to Engineering and Computer Science

(Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey), [illegible].

Dynkin, E B and W A Uspenski, Mathematische Unterhaltungen Mehrfarbenprobleme (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin), 1955.

Elmaghraby, S E, Some Network Models in Management Science (Springer, Berlin) 1970.

Erdös, P and G Katona (eds), Theory of Graphs (Academic Press, New York), 1968.

Fiedler, M (ed), Theory of Graphs and Its Applications (Academic Press, New York), 196[illegible].

Franklin, P, The Four Color Problem (Yeshiva University, New York), 1941.

Fulkerson, D R (ed), Studies in Graph Theory (Mathematical Association of America, Washington, D C) Parts I and II, 1975.

Happ, H H, Diakoptics and Networks (Academic Press, New York) 1971.

Harary, F (ed), Proof Techniques in Graph Theory (Academic Press, New York), 1969.

Harary, F (ed), New Directions in the Theory of Graphs (Academic Press, New York) 1973.

Harary, F and E M. Palmer, Graphical Enumeration (Academic Press, New York), 1973

Harary, F, R. Z Norman and D Cartwright, Structural Models An Introduction to the Theory of Directed Graphs (Wiley, New York), 1965

Harris, B. (ed), Graph Theory and Its Applications (Academic Press, New York), 1970.

Henley, E J, and R A Williams, Graph Theory in Modern Engineering (Academic Press, New York) 1973.

Iri, M, Network Flow, Transportation and Scheduling Theory and Algorithms (Academic Press, New York) 1969.

Johnson, D E and J. R Johnson, Graph Theory with Engineering Applications (Ronald, New York) 1972.

Kim, W H and R. T Chien, Topological Analysis and Synthesis of Communication Networks (Columbia University Press, New York), 1962.

Liu, C. L, Introduction to Combinatorial Mathematics (McGraw Hill, New York), 1968.

McDonough, T P and V C Mavron (eds), Combinatorics (Cambridge University Press, London) 1974.

Malkevitch, J and W. Meyer, Graphs Models and Finite Mathematics (Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey) 1974.

Marshall, C W, Applied Graph Theory (Wiley Interscience, New York) 1971.

Maxwell, L M and M, B Reed, The Theory of Graphs A Basis for Network Theory (Pergamon Press, Oxford) 1971

Mayeda, W Graph Theory (Wiley Interscience, New York) 1972.

Moon, J W, Topics on Tournaments (Holt, Rinehart and Winston, New York), 1968.

Moon, J. W., Counting Labelled Trees (Canadian Math. Congress, Montreal, 1970; Math. Mono. No. 1.

Mullin, R. C., K. B. Reid and D. P. Roselle (eds.), Proceedings of the Louisiana Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing (Utilitas Mathematica, University of Manitoba, Canada) 1970.

Ore, O., Graphs and Their Uses (Random House, New York), 1963.

Ore, O., The Four Color Problem (Academic Press, New York), 1967.

Picard, C. F., Graphes et Questionnaires (Gauthier-Villars, Paris) 1972, Vols 1 and 2.

Potts, R. B. and R. M. Oliver, Flows in Transportation Networks (Academic Press, New York) 1972.

Read, R. C. (ed.), Graph Theory and Computing (Academic Press, New York) 1972.

Ringel, G., Farbungsprobleme auf Flachen und Graphen (VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin), 1959.

Ringel, G., Map Color Theorem (Springer, Berlin) 1974.

Rosenstiehl, P. (ed.), Theory of Graphs International Symposium (Gordon and Breach, New York), 1967.

Roy, B., Algebre Moderne et Theorie des Graphes (Dunod, Paris), Vol. 1, 1969 and Vol. 2, 1970.

Sachs, H. (ed.), Beitrage zur Graphentheorie (Teubner, Leipzig), 1968.

Sachs, H., Einführung in die Theorie der endlichen Graphen (Teubner, Leipzig) *1970*.

Sainte-Lague, A., Les Reseaux (ou Graphes), Memorial des Sciences Mathématiques, Paris 18 (1926).

Sedlacek, J., Einführung in die Graphentheorie (Teubner, Leipzig) 1968.

Turner, J. and W. H. Kautz, A survey of progress in graph theory in the Soviet Union, SIAM Rev., supplement issue, 12 (1970).

Tutte, W. T., Connectivity in Graphs (University of Toronto Press, Toronto), 1966.

Tutte, W. T. (ed.), Recent Progress in Combinatorics (Academic Press, New York), 1969.

Tutte, W. T., Introduction to the Theory of Matroids (American Elsevier, New York) 1971.

Wagner, K., Graphentheorie (Bibliographisches Institut, Mannheim) *1970*.

White, A. T., Graphs, Groups and Surfaces (North Holland, Amsterdam) 1973.

Wilson, R. J., Introduction to Graph Theory (Academic Press, New York) 1972.

Zykov, A. A., Theory of Finite Graphs (Nauka, Novosibirsk) 1969. (in Russian)

符 号 索 引

这里列出经常出现的符号，分为三种类型：拉丁字母，希腊字母；矩阵和矢量；以及图和集合的运算符号。

拉丁字母

符号	含义
am	电流表支路
b	边的数目
b_{g}	在子图 g 中电感的边数
b_{cg}	在子图 g 中电容的边数
B_d	有向二分图
c	片的数目
C	割切
$\mathscr{C}$，$\mathscr{C}^*$	树的代码
$C[P'(H_k)，P''(H_k)]$	基本互补划分
$C[P'(H_k)，P''(H_k)]$	互补划分
c_s	电流源支路
$C[V(Z)]$	补树阻抗乘积之和
$C[W_{ab,cd}(Y)]$	2 补树导纳乘积之和
$C[W_{ab,cd}(Z)]$	2 补树阻抗乘积之和
$\mathscr{D}$，$\mathscr{D}^*$	树的代码
detG	图的行列式
$d(i)$	节点 i 的度
$d^+(i)$	节点 i 的出度
$d^-(i)$	节点 i 的入度
$D_u(R')$，$D_v(R'')$	集合算子

e, e_k, e_{ij}	边
E	边集或 Euler 路
$f(G_s)$	权的乘积
G, $G(V, E)$	图
$\mathscr{G}$	G的子图集合
G'_c	改进 Coates 图
S_i^+	从节点 i 射出的边集
S_i^-	终止于节点 i 的边集
G'_m	改进 Mason 图
G_m, $G_m(A)$	Mason 图
$g_{ip,sc}$	(开路)电压增益或转移电压比函数
$\bar{G}_s$	G中 G_s 的互补
G_u	伴随无向图
$G(g_1; g_2)$	从G中导出的图
$G(I)$	从G中把在 I 中节点等同起来所得的图
$G^*[V_p]$	从G中把不在 V_p 中的节点等同起来所得的图
$G[V_r]$	由 V_r 所限定的局部子图
$G(Y)$	Y 的伴随有向图
$G_C(\hat{Y})$	C 子图
$G_C^*(\hat{Y})$	从 $G_C(\hat{Y})$ 得出的图
$G_L(\hat{Y})$	L 子图
$G_L^*(\hat{Y})$	从 $G_L(\hat{Y})$ 中得出的图
$G_u(Y)$	Y 的伴随图
h	1 因子
H_{ij}	1 因子连接
$H_{rp,sq}$	传输系数
$H(g)$	g 的边集
I_u, J_u	u 个整数集

(i, j)	边或有向边
$i(t)$, $i(s)$	支路电流
$k(\mathbf{B})$, $k(\mathbf{Q})$	非零大子矩阵行列式的平方值
$\mathbf{L}$	回路或有向回路
m	零度
$M_{uv}(\mathbf{B})$, $M_{uv}(\mathbf{Q})$	广义余子式
n	节点数
p	微分算子
$1/p$	积分算子
$\mathbf{p}^k$	真路径
$\mathbf{P}_{ij}$	路径或有向路径
$\mathrm{per}\,\mathbf{A}$	A的恒式
$\mathbf{P}(H_k)$	划分
$p(t)$	功率函数
q, q_s	偶片数
$\mathbf{Q}_i$	节点 i 的关联割切
r	秩
$\mathbf{R}$	部分因子
$R(j_1; j_2; \cdots; j_k)$	k 部分因子
$\mathscr{S}$	$\mathscr{S}$内所有子集的集合
S_0	空集
S_i^+	从节点 i 射出的边集
S_i^-	终止于节点 i 的边集
S^{uv}	$S-\{u, v\}$
SDR	相异表示式的集合
$\mathbf{t}$	树
	时间变量
	无源树
$\bar{\mathbf{t}}$	补树

T	树集
$\bar{T}$	补树集
t_r	有向树
T_0	有向树 t_0 的集合
$t_{ab,cd}$	2 树或有向 2 树
$\bar{t}_{ab,cd}$	2 补树
$t_{ab,cd,ef}$	3 树或有向 3 树
$t(E_q)$	特种树
$T(E_q)$	树 t(Eq)的集合
$T_n(G_d)$	树图
t(I)	有向树图
$\bar{t}(I)$	多补树
T(I)	多树 t(I)的集合
$\bar{T}(I)$	多补树 $\bar{t}(I)$的集合
U, U(G)	同号式
$U_{r,s,p}$	有向 3 树乘积之和
u(t)	驱动函数或激励函数
V	节点集
$\mathscr{V}_B$	B 空间
V_k	有向树乘积之和
$\mathscr{V}_Q$	Q 空间
$\mathscr{V}_G$, $\mathscr{V}(G)$	b 维矢量空间
v_m	电压表支路
v_s	电压源支路
v(t), v(s)	支路电压
V(Y)	树支导纳乘积之和
V(Z)	树支阻抗乘积之和
$W_{rp,sq}$	有向 2 树乘积之和
$W_{ab,cd}(Y)$	2 树导纳乘积之和

$W_{ab,cu}(Z)$	2 树阻抗乘积之和
$x(t)$	状态变量
Y_{ij}	(一阶)余子式
$y_{rp,sq}$	(短路)转移导纳函数
$Y_{rp,sq}$	二阶余子式
$y(t)$	输出变量
$z_{rp,sq}$	(开路)转移阻抗函数
$z_{rr,ss}$	策动点阻抗函数

希腊字母

$\alpha_{rp,sq}$	(短路)电流增益或转移电流比函数
$\alpha(S)$	S 的元素数目
ϕ	空图
ω	频率
δ_{ij}	Kronecker 符号
Δ_{ij}	余子式
λ	特征值
σ	复杂度

矩阵和矢量

$\mathbf{A}^+$	从 A 中用 0 替换 −1 所得的矩阵
$\mathbf{A}$	矩阵或基本关联矩阵
$\mathbf{A}_a$	关联矩阵
$\mathbf{A}_{-i}$	从 A 中删去第 i 行
$\mathbf{A}$	参数矩阵
$\mathbf{B}$	基本回路矩阵
$\mathbf{B}_a$	回路矩阵
$\mathbf{B}_f$	f 回路矩阵
$\mathbf{B}_p$	平面图的基本回路矩阵
$\mathbf{B}$	参数矩阵

BZB'	网络矩阵（回路阻抗矩阵）
$C(G)$	连接矩阵
C	参数矩阵
$D(G)$	有向树矩阵
$D(G_a)$	树矩阵
D	参数矩阵
E	支路电压源矢量
E_m	回路电压源矢量
$F(I_a, J_a)$	F 的子矩阵
$F(J_p)$	子矩阵或大子阵
$H(p)$	算子矩阵
I	支路电流矢量
I_m	回路电流矢量
J	支路电流源矢量
J_c	割切电流源矢量
J_n	节点电流源矢量
P	节点-基准点路径矩阵
Q	基本割切矩阵
Q_a	割切矩阵
Q_f	f 割切矩阵
QYQ'	网络矩阵（割集导纳矩阵）
U_n	阶为n的单位矩阵
$U(G)$	G的同号式矩阵
$u(t)$	输入矢量
V	支路电压矢量
V_c	割切电压矢量
V_n	节点电压矢量
$X_j(t)$	状态矢量
$\dot{X}$, $\dot{X}(t)$	x(t)的时间导函数

y, $y(t)$	输出矢量
$\mathbf{Y}$, $\hat{\mathbf{Y}}$	支路导纳或不定导纳矩阵
$\mathbf{Y}_c$	割切导纳矩阵
$\mathbf{Y}_n$	节点导纳矩阵
$\mathbf{Y}_{sc}$	短路导纳矩阵
$\mathbf{Y}(G)$	伴随等代数余子式矩阵
$\mathbf{Z}$	支路阻抗矩阵
$\mathbf{Z}_m$	回路阻抗矩阵
$\mathbf{Z}_{oc}$	开路阻抗矩阵

图和集合的运算

$G_1 \quad G_2$	同构图
$K_p J_u / I_u$	$(K_p \quad I_v) \cup J_v$
$\subset$	包含于集
$G_1 \cup G_2$	和图
$G_1 \cap G_2$	交图
$G_1 \oplus G_2$	图的环和
$G_1 - G_2$	移去子图
$S_1 \textcircled{a} S_2$	Wang 积
$S_1 \times S_2$	Cartesian 积
$S_1 \oplus S_2$	对称差
$S_1 \cup S_2$	并集
$S_1 \cap S_2$	交集
$S_1 - S_2$	差集

英 中 名 词 索 引

A

Abstract directed graph	抽象有向图
Abstract graph	抽象图
Accessible permutation	可达排列
Active edge	有源边
Acyclic directed graph	无圈有向图
Adjacency matrix	邻接矩阵
Adjacent nodes	邻接节点
Admittance	导纳
Alternating edge train	交替边列
Alternating path	交替路径
Arc	弧
Articulation point	断点
Associated directed graph	伴随有向图
Associated graph	伴随图
Associated matrix	伴随矩阵
Associated symmetric directed graph	伴随对称有向图
Associated undirected graph	伴随无向图

B

Basic value	基本值
~of a generalized cofactor	广义代数余子式的基本值
~of a network determinant	网络行列式的基本值
Basis circuit matrix	基本回路矩阵
~of a directed graph	有向图的基本回路矩阵
~of a graph	图的基本回路矩阵
Basis cut matrix	基本切割矩阵
~of a directed graph	有向图的基本切割矩阵

~of a graph	图的基本切割矩阵
Basis incidence matrix	基本关联矩阵
~of a directed graph	有向图的基本关联矩阵
~of a graph	图的基本关联矩阵
Binet Cauchy theorem	比耐 柯西定理
Bipartite graph	二分图
Block	块
Block graph	块图
Branch	支路，树支
meter~	电表支路
source~	电源支路
Branch admittance matrix	支路导纳矩阵
Branch impedance matrix	支路阻抗矩阵

C

Canocial form	范式
Capacitive edge	电容边
Cartesian product	笛卡儿积
0-Cell	0 胞
Chord	弦支
Circuit	回路
C ~	C-回路
f ~	f 回路
fundamental~	基本回路
Hamilton~	哈密尔顿回路
L ~	L-回路
length of~	回路的长度
oriented~	有向回路
Circuit edge	回路边
Circuit edge incidence matrix	回路-边关联矩阵
Circuit matrix	回路矩阵
~of a directed-graph	有向图的回路矩阵
~of a graph	图的回路矩阵
f Circuit matrix	f 回路矩阵

- Circuit rank 回路秩
- Coates graph 柯特图
    - decomposable～ 可分解的柯特图
    - determinant of～ 柯特图的行列式
    - modified～ 改进的柯特图
- Cofactor 代数余子式
    - first order～ 一阶代数余子式
- generalized～ 广义代数余子式
    - basic value of～ 广义代数余子式的基本值
    - ～of a directed path 有向路径的余子式
    - ～of a proper transmission path 真传输路径的余子式
    - second order～ 二阶代数余子式
- Coforest 补林
- Coincidence 一致
- Complement 补图
- Complementary partitions 互补划分
- Complementary subgraphs 互补子图
- Complete directed graph 完备有向图
- Complete graph 完备图
- Component 片
    - even～ 偶片
    - odd～ 奇片
    - strong～ 强片
- Connectedness 连通性
    - cyclic～ 圈连通
    - strong～ 强连通
- Connection 连接
    - 1 factorial～ 1因子连接
    - cyclic～ 圈1-因子连接
    - k factorial～ k-因子连接
    - one-～ 单连接
- Connectivity 连通度
- Converse deficiency 逆差
- Coordinates of a vector 矢量的坐标

Corresponding directed graph	对应有向图
Cotree	补树
~admittance product	补树导纳乘积
~impedance product	补树阻抗乘积
k-~	k-树
multi ~	多树
~product	补树乘积
2 Cotree	2 补树
~admittance product	2 补树导纳乘积
~impedance product	2 补树阻抗乘积
~product	2 补树乘积
Current	电流
loop~	回路电流
mesh~	网孔电流
reference of~	电流的参考方向
Current generator (ideal)	(理想)电流源
Cut	切割
C-~	C 切割
incidence~	关联切割
L-~	L 切割
orientation of~	切割方向
oriented~	定向切割
Cut admittance matrix	切割导纳矩阵
Cut-edge incidence matrix	切割-边关联矩阵
Cut matrix	切割矩阵
~of a directed graph	有向图的切割矩阵
~of a graph	图的切割矩阵
Cut voltage	切割电压
Cut transformation	切割变换
Cutpoint	割点
Cutset	割集
f ~	f-割集
fundamental ~	基本割集
f Cutset matrix	f 割集矩阵

Cycle	圈
P set of～	P 集圈
Cycle rank	环秩
Cyclic 1 factor	圈1 因子
Cyclically Connected directed graph	圈连通有向图
Cyclically Connected graph	圈连通图
Cyclomatic number	[illegible]

D

Decomposition of a separable graph	可分图的分解
Deficiency	差
Degree	度
incoming～	入度
negative～	负度
outgoing～	出度
positive～	正度
Degree invariant transformation	度不变变换
Degree of freedom	自由度
Degree pair	度对
weighted～	加权度对
Determinant	行列式
～of the Coates graph	柯特图的行列式
～of the Mason graph	梅森图的行列式
Difference	差
～of sets	集合的差
～of subgraphs	子图的差
P Digraph	P 有向图
weighted～	加权P 有向图
(P,S) Digraph	(P,S) 有向图
symmetric～	对称(P,S)-有向图
symmetric subgraph of～	(P,S) 有向图的对称子图
weighted～	加权(P,S)有向图
Directed bipartite graph	有向二分图
Corresponding～	对应有向二分图

Directed circuit	有向回路
length of～	有向回路的长度
Directed edge	有向边
Directed edge sequence	有向边序列
closed～	闭有向边序列
length of～	有向边序列的长度
open～	开有向边序列
Directed edge train	有向边列
Directed Euler line	有向尤拉路
Directed graph	有向图
abstract～	抽象有向图
acyclic～	无圈有向图
associated～	伴随有向图
associated symmetric～	伴随对称有向图
bipartite～	有向二分图
complete～	完备有向图
connected～	连通有向图
corresponding～	对应有向图
cyclically connected～	圈连通有向图
isomorphic～	同构有向图
nonseparable～	不可分有向图
planar～	平面有向图
regular～	正则有向图
semi regular～	半正则有向图
separable～	可分有向图
strongly connected～	强连通有向图
symmetric～	对称有向图
Directed path	有向路径
expansion in～	有向路径上的展开
length of～	有向路径的长度
Directed tree	有向树
realization of～	有向树的实现
normal～	正规有向树
Directed 2 tree	有向2 树

E

terminating at~　终止边
uncoupled~　分离边
Edge disjoint subgraphs　边不相接子图
Edge sequence　边序列
closed~　闭边序列
length of~　边序列的长度
open~　开边序列
Edge train　边列
alternating~　交替边列
directed-~　有向边列
Eigenvalue　特征值
Element　元
Elementary directed tree transformation　初等有向树变换
Elementary (p,s) d-invariant transformation　初等(p,s) d 不变变换
Elementary transformation　初等变换
Elementary tree transformation　初等树变换
Endpoint　端点
Energy function　能量函数
Equicofactor matrix　等代数余子式矩阵
associated~　伴随等代数余子式矩阵
Equivalence relation　等价关系
Essential complementary partition　基本互补划分
Euler line　尤拉路
directed~　有向尤拉路

F

1-Factor　1 因子
cyclic~　圈1 因子
n-Factor　n 因子
1-Factorial connection　1 因子连接
cyclic~　圈1-因子连接
k-Factorial connection　k-因子连接
Factorization　因式分解
Feedback loop　反馈环路

First Betti number	第一比特数
Flow graph	流图
Forest	林
normal~	正规林
Forward path	正向路径
Four-Color Conjecture	四色猜想
Function	函数
driving point admittance~	策动点导纳函数
driving-point impedance~	策动点阻抗函数
incidence~	关联函数
open circuit voltage gain~	开路电压增益函数
open-circuit transfer impedance~	开路转移阻抗函数
open-circuit transfer voltage ratio~	开路转移电压比函数
short circuit current gain~	短路电流增益函数
short circuit transfer admittance~	短路转移导纳函数
short circuit transfer current-ratio~	短路转移电流比函数
transfer admittance~	转移导纳函数
transfer current ratio	转移电流比函数
transfer impedance~	转移阻抗函数
transfer voltage ratio~	转移电压比函数
voltage gain	电压增益函数
Fundamental circuits	基本回路
Fundamental circuit matrix	基本回路矩阵
Fundamental cutset matrix	基本割集矩阵
Fundamental cutsets	基本割集

G

Generalized circuit	广义回路
odd~	奇广义回路
Generalized cofactor	广义代数余子式
basic value of~	广义代数余子式的基本值
Generalized directed k tree	广义有向k-树
Generalized k tree	广义k-树
odd~	奇广义k-树

Geometric diagram	几何图
Graph	图
abstract～	抽象图
associated～	伴随图
associated undirected～	伴随无向图
bipartite～	二分图
block～	块图
complete～	完备图
connected～	连通图
cyclically connected～	圈连通图
determinant of～	图的行列式
directed tree～	有向树图
finite～	有限图
flow～	流图
infinite～	无限图
intersection～	交图
isomorphic～	同构图
labeled～	标识图
linear～	线图
mixed～	混合图
nonseparable～	不可分图
null～	空图
(p,s)-～	(p,s) 图
planar～	平面图
regular～	正则图
separable～	可分图
signal flow～	信号流图
sum～	和图
tree～	树图
weighted～	加权图

H

Hamilton circuit	哈密尔顿回路
Hermitian part	哈密尔顿式部分

I

Impedance	[illegible]
Incidence	关联
Incidence cut	关联切割
Incidence matrix	关联矩阵
Incoming degree	入度
Indefinite admittance matrix	不定导纳矩阵
Inductive edge	电感边
Initial node	起始节点
Interchange	交换
～of the incoming edges	入边交换
～of the outgoing edges	出边交换
(p,s) Interchange	(p,s)-交换
Intersection graph	交图
Intersection of sets	交集
d-Invariant	d 不变
Inversion	转换
～of a matrix	矩阵求逆
Isolated node	孤立节点
Isomorphism	同构
～of directed graphs	有向图的同构
～of graphs	图的同构

J

Jacobi's theorem	雅各比定理
Jeans' theorem	琼恩定理
Junction	结

K

Kirchhoff's current law	基尔霍夫电流定律
Kirchhoff's voltage law	基尔霍夫电压定律
Konigsberg Bridge Problem	哥尼斯堡桥问题

L

Last exit edge of a node　节点的最终射出边

Line　线

Linear dependence　线性相关

　~of sets　集合的线性相关

　~of Subgraphs　子图的线性相关

Linear graph　线图

Linear independence　线性无关

　~of sets　集合的线性无关

　~of subgraph　子图的线性无关

Linear subgraph　线性子图

Linear vector space　线性矢量空间

Link　连支

Loop　环

　dynamically independent ~　动态独立回路

Loop impedance matrix　回路阻抗矩阵

Loop transformation　回路变换

Loop transmission　环路传输系数

M

Major determinant　主行列式

Major submatrix　大子阵

Mason graph　梅森图

　decomposable ~　可分解的梅森图

　determinant of ~　梅森图的行列式

　factorization of ~　梅森图的因式分解

　modified ~　改进梅森图

　normalized ~　正则梅森图

Matrix　矩阵

　adjacency ~　邻接矩阵

　associated ~　伴随矩阵

　associated equicofactor ~　伴随等代数余子式矩阵

basis circuit ~ 基本回路矩阵

basis cut ~ 基本割集矩阵

basis incidence ~ 基本关联矩阵

branch-admittance ~ 支路导纳矩阵

branch impedance ~ 支路阻抗矩阵

circuit ~ 回路矩阵

f circuit ~ f 回路矩阵

circuit edge incidence ~ 回路-边关联矩阵

current-transfer ~ 电流转移矩阵

cut ~ 切割矩阵

cut admittace ~ 切割导纳矩阵

cut edge incidence ~ 切割边关联矩阵

f cutset ~ f 割集矩阵

decomposable ~ 可分解的矩阵

directed tree ~ 有向树矩阵

distance ~ 距离矩阵

equicofactor ~ 等代数余子式矩阵

fundamental circuit ~ 基本回路矩阵

fundamental cutset ~ 基本割集矩阵

~ in normal form 范式矩阵

~ in proper form 真式矩阵

incidence ~ 关联矩阵

indecomposable ~ 不可分解的矩阵

indefinite admittance ~ 不定导纳矩阵

irreducible ~ 不可约的矩阵

loop impedance ~ 回路阻抗矩阵

network ~ 网络矩阵

node-admittance ~ 节点导纳矩阵

node edge incidence ~ 节点边关联矩阵

node to-datum path 节点对基准点路径矩阵

open circuit impedance ~ 开路阻抗矩阵

p ~ p-矩阵

parameter ~ 参数矩阵

(p, s)- ~ (p, s) 矩阵

primitive connection ~ 本原连接矩阵

rank of a circuit ~ 回路矩阵的秩

~ of a cut ~ 切割矩阵的秩

~ of an incidence ~ 关联矩阵的秩

reducible ~ 可约的矩阵

short circuit admittance ~ 短路导纳矩阵

totally unimodular ~ 全单位模矩阵

tree ~ 树矩阵

unisignant ~ 同号矩阵

variable adjacency ~ 变元邻接矩阵

voltage transfer ~ 电压转移矩阵

Matrix inversion 矩阵求逆

Maximal set 最大集合

Mesh 网孔

Mesh discriminant 网孔判别式

Miller integrator 密勒积分器

Mixed graph 混合图

Modified Coates graph 改进柯特图

Modified Mason graph 改进梅森图

Multi-cotree 多补树

Multi-tree 多树

N

Natural frequency 自然频率

Negative degree 负度

Network 网络

~ determinant 网络行列式

electrical ~ 电网络

reciprocal ~ 互易网络

RLC ~ RLC网络

RLC two port RLC二端口网络

RLCM ~ RLCM网络

two-port ~ 二端口网络

Network matrix 网络矩阵

Node	节点
Adjacent ~	邻接节点
degree of ~	节点的度
distance between ~	节点之间的距离
elimination of ~	消去节点
initial ~	起始节点
isolated ~	孤立节点
reference ~	参考节点
removal of ~	移去节点
source ~	源节点
terminal ~	终止节点
Node admittance matrix	节点导纳矩阵
Node discriminant	节点判别式
Node disjoint subgraphs	节点不相接子图
Node edge incidence matrix	节点边关联矩阵
Node expansion	节点展开式
Node-pair transformation	节点对变换
Node-pair voltage	节点对电压
Node splitting	节点分裂
Node-to-datum path matrix	节点对基准点路径矩阵
Node to datum voltage	节点对基准点电压
Noncircuit edge	非回路边
Non orientable manifold	非定向簇
Nonseparable graph	不可分图
Normal directed tree	正规有向树
Normal forest	正规林
Normal tree	正规树
Null graph	空图
Nullity	零度

O

Ohmicness	欧姆性
Ohm's law	欧姆定律
One connection	单连接

Open circuit impedance matrix 开路阻抗矩阵
Open circuit transfer impedance function 开路转移阻抗函数
Open circuit Voltage gain function 开路电压增益函数
Opposite orientations 相反定向
Order of Complexity 复杂度
Oriented circuit 有向回路
Oriented cut 定向切割
Oriented edge 取向边
Outgoing degree 出度
Output equation 输出方程
Outside region 外部区域

P

Parallel edges 并联边
Parameter matrix 参数矩阵
Parameter 参数
  open circuit impedance ～ 开路阻抗参数
  short circuit admittance ～ 短路导纳参数
  y ～ y参数
  z ～ z参数
Partition 划分
  complementary ～ 互补划分
  essential complementary ～ 基本互补划分
Passive edge 无源边
Passive tree 无源树
Path 路径
  alternating ～ 交替路径
  forward ～ 正向路径
  length of ～ 路径的长度
  proper ～ 真路径
  proper transmission ～ 真传输路径
  value of a proper transmission ～ 真传输路径值
Perfectly coupled inductors 全耦合电感
Permanent 恒式

Planar graph 平面图

Point 点

Port 端口

Positive degree 正度

Power absorbed in a branch 支路中吸收的功率

Power function 功率函数

Primary variable 基本变量

Primitive connection matrix 本原连接矩阵

Proper path 真路径

Proper transmission path value 真传输路径值

R

Rank 秩

Realization 可实现性

  ~ of degrees 度的实现

  ~ of degree pairs 度对的实现

  ~ of directed trees 有向树的实现

Reference node 参考节点

Reference of current or voltage 电流或电压的参考方向

Reference system 参考系

  coordinates of a vector with respect to ~ 矢量关于参考系的坐标

Region 区域

  outside ~ 外部区域

Regular directed graph 正则有向图

Regular graph 正则图

Regular polyhedra 规则多面体

Resistive edge 电阻边

Ring sum 环和

Rooted tree 有根树

S

SDR 相异表示式的集合

Secondary variable 辅助变量

Sectional subgraph	局部子图
~ *of a directed graph*	有向图的局部子图
~ of a graph	图的局部子图
Seg (segregate)	广义割集(分离)
Self-loop	自环
removal of ~	移去自环
Semifactor	部分因子
l ~	l 部分因子
k ~	k 部分因子
Semi-regular directed graph	半正则有向图
Separable graph	可分图
Set of distinct representatives (SDR)	相异表示式的集合
Set union	
Short circuit admittance matrix	短路导纳矩阵
Short circuit current-gain function	短路电流增益函数
Short circuit transfer-admittance function	短路转移导纳函数
Signal	信号
nodal ~	节点信号
Signal flow graph	信号流图
0 Simplex	0 单形
1 Simplex	1 单形
Source	[illegible]
Source node	源节点
B Space	B 空间
Q Space	Q 空间
Spanning subgraph	生成子图
Spanning tree	生成树
Star mesh transformation	Y-△变换
State	状态
State equations	状态方程
explicit form of ~	状态方程的显式
~ in normal form	标准形式的状态方程
State space	状态空间
State variables	状态变量

T

Terminal edge	终端边
Terminal node	终止节点
Topological formulas	拓扑公式
Totally unimodular matrix	全单位模矩阵
Transformation	变换
cut ~	切割变换
degree invariant ~	度不变变换
elementary ~	初等变换
elementary directed-tree ~	初等有向树变换
elementary(p,s)d-invariant ~	初等(p,s)d-不变变换
elementary tree ~	初等树变换
loop ~	回路变换
node-pair	节点对变换
star-mesh ~	Y-△变换
Transimmittance	转移导纳
Transmission (graph)	传输系数
~ in a Coates graph	柯特图的传输系数
~ in a Mason graph	梅森图的传输系数
loop ~	环路传输系数
path ~	路径传输系数
Transmission law	传输定律
Transmittance	传输量
Tree	树
~ -admittance product	树导纳乘积
directed ~	有向树
directed 2- ~	有向2-树
directed 3- ~	有向3-树
directed k- ~	有向k-树
generalized directed k- ~	广义有向k-树
generalized k- ~	广义k-树
~-impedance product	树阻抗乘积
k- ~	k-树
length of ~	树的长度
multi- ~	多树

normal ~	正规树
odd generalized k- ~	奇广义 k-树
passive ~	无源树
~ product	树乘积
rooted ~	有根树
spanning ~	生成树
2-Tree	2-树
~admittance product	2-树导纳乘积
directed ~	有向2-树
~ impedance product	2-树阻抗乘积
~ product	2-树乘积
k-Tree	k-树
Tree graph	树图
Tree matrix	树矩阵

U

U_{ij} in modified form	U_{ij} 的改进式
Uncoupled edge	分离边
Unique realization of degrees	度的唯一实现
Unisignant	同号式
Unisignant matrix	同号矩阵
in modified form	同号式的改进式
Unistor	单极子

V

Variable adjacency matrix	变元邻接矩阵
Vector	矢量
branch-current ~	支路电流矢量
branch voltage ~	支路电压矢量
branch voltage-source ~	支路电压源矢量
cut current-source ~	切割电流源矢量
cut-voltage ~	切割电压矢量
input ~	输入矢量

loop-current ~ 回路电流矢量

loop voltage-source ~ 回路电压源矢量

nodal current-source ~ 节点电流源矢量

output ~ 输出矢量

state ~ 状态矢量

Vertex 顶点

Voltage 电压

cut ~ 切割电压

node-pair ~ 节点对电压

node-to-datum ~ 节点对基准点电压

reference ~ 参考电压

voltage generator (ideal) (理想)电压源

W

Wang algebra 王氏代数

Wang product 王氏积

Weighted degree pair 加权度对

Weighted p-digraph 加权P-有向图

Weighted (p, s)-digraph 加权(p,s)-有向图

Weighted graph 加权图

Window 窗